JUNIORAS (IX ir X klasės)

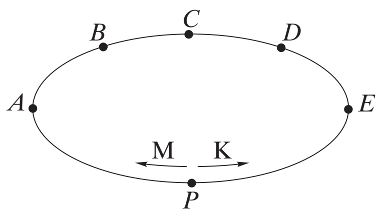
J1. Ⓓ 6

? Tikrinkime atsakymus nuo vidurinio. Jei Danutė suvalgė 5 pyragaičius, tai dviem nepaminėtiems vaikams liko $20 - 5 - 1 - 2 - 3 = 9$ pyragaičiai. Kad ir kaip šie du valgytų, bent vienas iš jų suvalgys bent 5 pyragaičius. O taip būti negali, o tai prieštarautų sąlygai, kad Danutė suvalgė pyragaičių daugiau už kiekvieną kitą vaiką. Jei Danutė suvalgė 6 pyragaičius, tai tiems dviem liko 8 pyragaičiai. Jie gali valgyti po 4 pyragaičius, ir uždavinio sąlygos bus išpildytos.
Renkamės atsakymą **D**.

! Galima įsivesti ir x — Danutės suvalgytų pyragaičių skaičių. Nepaminėti vaikai kiekvienas galėjo suvalgyti ne daugiau kaip $x - 1$ pyragaitį, taigi $2(x-1) + x + 6 \geqslant 20$, $3x \geqslant 16$, $x \geqslant 6$. Vadinasi, įsitikinome, kad Danutė negalėjo suvalgyti mažiau kaip 6 pyragaičius. Bet 6 pyragaičius Danutė suvalgyti galėjo: dviem liktų 8 pyragaičiai, ir jeigu šie suvalgytų po 4, tai uždavinio sąlygos būtų išpildytos (beje, vienas jų galėjo suvalgyti ir 5 pyragaičius).
Teisingas atsakymas **D**.

J2. Ⓔ E

? Nesunku patikrinti atsakymus. Jei jie susitiktų taške C, tai abu nubėgtų vienodai. Vadinasi, reikia eiti į dešinę. Jei jie susitiktų taške D, tai Matas būtų nubėgęs $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ rato, o Kotryna $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ rato, o tai nėra triskart mažiau. Jei jie susitiktų taške E, tai Matas būtų nubėgęs $\frac{3}{4}$ rato, o Kotryna — $\frac{1}{4}$ rato. Tai iš tikrųjų trigubai mažiau.
Renkamės atsakymą **E**.

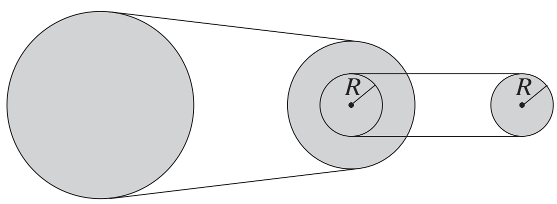


! Kadangi Matas bėga triskart greičiau, tai jo nubėgtas kelias bus triskart didesnis. Kadangi abu jie nubėgs vieną ratą, tai Kotryna nubėgs $\frac{1}{4}$ rato, t. y. iki taško E.
Teisingas atsakymas **E**.

J3. Ⓐ Žr. uždavinio B5 sprendimą.

J4. Ⓑ 200

! Kadangi mažasis ratas su viduriniu sujungti diržu, o vidurinis varomasis skriemulys yra to paties spindulio R kaip ir mažasis ratas, tai jie sukasi tuo pačiu greičiu.

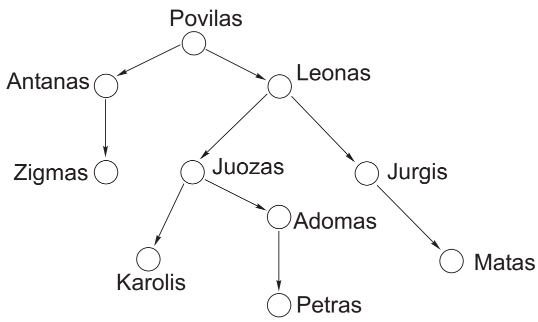


Teisingas atsakymas **B**.

J5. Ⓐ Žr. uždavinio B10 sprendimą.

J6. D Zigmas

Petro tėvas — Adomas, Adomo tėvas — Juozas. Adomo ir jo brolio (Karolio) senelis tas pats — tėvo Juozo tėvas, t. y. Leonas. Senelio brolis yra Antanas, o Antano sūnus — Zigmas.



Teisingas atsakymas **D**.

J7. B 6

Kadangi penkiakampis turi penkias kraštines — briaunas, o kiekvienoje briaunoje susieina dvi sienos, tai mažiausiai yra dar 5 sienos. O tai įmanoma: penkiakampė piramidė turi pagrindą ir 5 šonines sienas.
Teisingas atsakymas **B**.

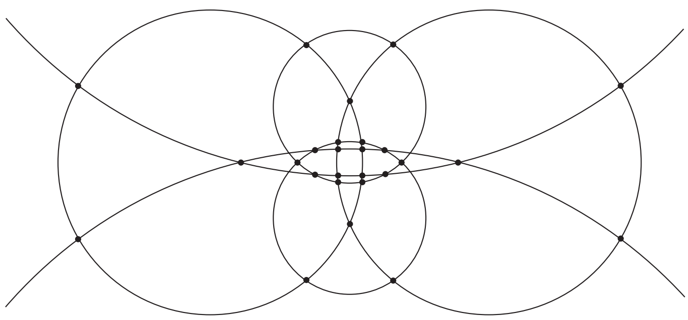
J8. B 1

Nulį iš pirminių dauginamųjų gauname tik dvejetą sudauginę su penketu. Kadangi daugiau dvejetų (beje, ir penketų) tarp pirminių nėra, tai turime vienintelį 0.
Teisingas atsakymas **B**.

J9. A Žr. uždavinio B18 sprendimą.

J10. E 30

Galima nusibrėžti 6 apskritimus taip, kad kiekvienas kirstų kiekvieną dviejuose taškuose, o kirtimosi taškai nesutaptų. Suskaičiavę gauname 30 taškų.

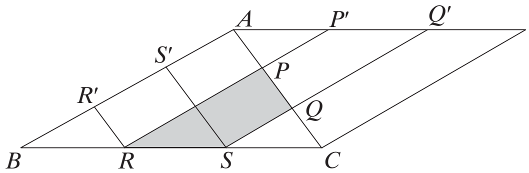


Uždavinio K25 sprendime jau išsiaiškinome, kad du apskritimai gali turėti tik 2 susikirtimo taškus. Kadangi kiekviena apskritimų pora gali turėti 2 susikirtimo taškus, o skirtingų porų iš 6 apskritimų galima sudaryti 15 (pavyzdžiui, sunumeravę apskritimus skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, gauname 15 porų: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56), tai galima gauti ne daugiau kaip 30 taškų. Įsitikinti, kad 30 taškų gauti įmanoma, nesunku brėžiniu.

J11. C Žr. uždavinio M20 sprendimą.

J12. Ⓑ $\frac{1}{3}$

? Iš karto matome, kad užtušuotas plotas mažesnis už S_{APRB}, todėl mažesnis už $\frac{1}{2}$. Kadangi trikampio kraštinė dalijama į tris lygias dalis, tai labai panašus būtų atsakymas su vardikliu 3.
Renkamės atsakymą **B**.



! Remsimės Talio teorema (tiesiogine ir atvirkštine). Kadangi trikampiai panašūs, tai jų plotai sutinka kaip kraštinių kvadratai. Todėl $S_{QCS} = \frac{1}{9}$, $S_{PCR} = \frac{4}{9}$. Vadinasi, $S_{PQSR} = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Dar įdomiau nesiremti jokiomis teoremomis. Papildykime brėžinį iki lygiagretainio. Tada lygiagretainis $SRP'Q'$ sudaro trečdalį didžiojo lygiagretainio ploto, lygaus 2. Todėl $S_{RPQS} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
Galima skaičiuoti ir kitaip. Išveskime $SS' \| RR' \| AC$. Tada trikampį ABC sudaro trys lygūs trikampiai ir trys lygūs lygiagretainiai, o užtušuotą plotą — vienas iš tų trikampių ir vienas iš lygiagretainių.
Vadinasi, užtušuotas plotas sudaro $\frac{1}{3}$ pradinio trikampio ploto.

J13. Ⓒ 20

! Suskaičiuokime sumą $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$. Pridėkime prie abiejų pusių 1, tada $S_n + 1 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = \cdots = 2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Vadinasi, $S_n = 2^{n+1} - 1$.
Raskime sumas, kurios „apglėbia“ skaičių $N = 2\,500\,000$. Kadangi $2^8 = 16^2 = 256$, $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1024^2 < 1100^2 < 1\,210\,000, 2^{21} < 2\,420\,000, 2^{22} = (2^{11})^2 = (2048)^2 > (2000)^2 > 4\,000\,000$, tai reikia palyginti skirtumus $N - S_{20} = N - 2^{21} + 1$ ir $S_{21} - N = 2^{22} - 1 - N$. Tam užtenka sužinoti, kas mažiau:

$$N - 2^{21} + 1 \quad \text{ar} \quad 2^{22} - 1 - N,$$

t. y.

$$2N \quad \text{ar} \quad 2^{22} + 2^{21} + 2,$$

t. y.

$$N \quad \text{ar} \quad 2^{21} + 2^{20} + 1 = 2 \cdot 2^{20} + 2^{20} + 1 = 3 \cdot 2^{20} + 1,$$

t. y.

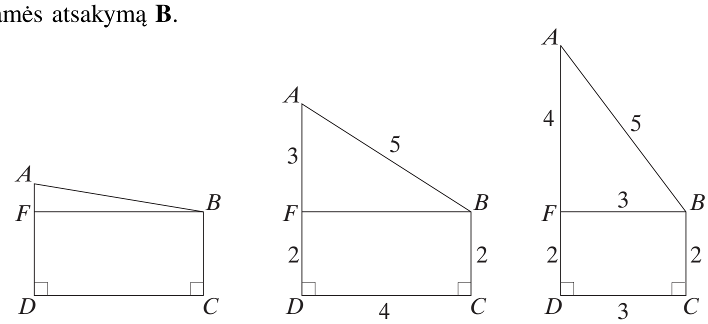
$$2\,500\,000 \quad \text{ar} \quad 3 \cdot 1024^2 + 1.$$

Bet aišku, kad dešinėje stovi daugiau nei $3 \cdot (10^3)^2$, t. y. daugiau nei 3 000 000.
Vadinasi, skirtumas yra mažiausias, kai $n = 20$.
Teisingas atsakymas **C**.

J14. Ⓑ 2

? Pabandykime tiesiog spėti: jeigu nubrėšime atkarpą BF, lygiagrečią CD, gausime statųjį trikampį ABF. Kadangi AD ir BC natūralieji, tai ir $AF = AD - DF = AD - BC$ natūralus. Natūralus ir $FB = DC$. Vadinasi, stačiojo trikampio AFB kraštinės — natūralieji skaičiai. Žinome tokį trikampį — jo krašinės 3, 4, 5. Tada jei pasirenkame $AF = 3$, $FB = 4$, tai $AB = 5$, ir $2BC =$

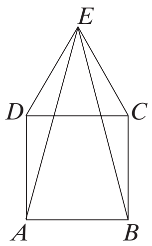
$= BC + FD = 16 - AB - AF - CD = 16 - 5 - 3 - 4 = 4$. Vadinasi, $BC = 2$.
Renkamės atsakymą **B**.



! Kadangi $BC \geqslant 1$, $FD \geqslant 1$, tai $AF + FB + AB \leqslant 14$. Bet $AF + FB > AB$, todėl $2AB < 14$, $AB < 7$, t. y. $AB \leqslant 6$. Įžambinė AB negali būti lygi 6, nes tada bent vienas statinis > 3, o nei vienas skirtumas $6^2 - 5^2 = 11$, $6^2 - 4^2 = 20$ nėra kvadratas. Jeigu įžambinė $AB = 5$, tai bent vienas statinis $\geqslant 3$, ir skirtumai $5^2 - 4^2 = 3^2$ ir $5^2 - 3^2 = 4^2$ duoda tą pačią statinių porą: 3 ir 4. Įžambinė AB negali būti $\leqslant 4$, nes nei viena iš statinių porų (1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 2), (2, 3), (3, 3) netinka: statinių kvadratų suma nėra kvadratas.
Vadinasi, yra tik dvi galimybes:
1) $AB = 5$, $AF = 3$, $FB = DC = 4$; tada $FD = BC = 2$.
2) $AB = 5$, $AF = 4$, $FB = DC = 3$; tada vėl $FD = BC = 2$.
Abu atvejai įmanomi, taigi uždavinio sąlygas tenkina trapecijos: $AB = 5$, $BC = 2$, $CD = 4$, $DA = 5$ ir $AB = 5$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 6$. Vis dėlto abiem atvejais kraštinės BC ilgis yra 2.
Teisingas atsakymas **B**.

J15. (A) Žr. uždavinio K20 sprendimą.

J16. (B) 30°



! Kadangi $ED = DC = DA$, tai trikampis ADE lygiašonis. Bet $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, todėl $\angle DEA = 15^\circ$. Taip pat ir $\angle CEB = 15^\circ$. Vadinasi, $\angle AEB = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$.
Teisingas atsakymas **B**.

J17. (D) 40

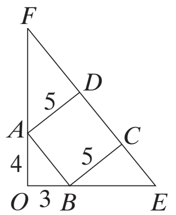
? Tikrinkime atsakymus nuo vidurinio. Jeigu (**C**) grupėje iš pradžių buvo 35 mergaitės, tai po pasitraukimo jų liko 20, berniukų buvo 40. Vadinasi, berniukų negalėjo pasitraukti 45. Jeigu (**D**) mergaičių buvo 40, tai po pasitraukimo jų liko 25, berniukų buvo 50. Kai pasitraukė 45 berniukai, jų liko 5, ir tai tikrai 5 kartus mažiau negu mergaičių.
Renkamės atsakymą **D**.

! Sakykime, kad iš pradžių mergaičių buvo x. Kai pasitraukė 15 mergaičių, jų pasidarė $x - 15$. Tada berniukų buvo $2(x - 15)$. Sudarome lygtį: $(2(x - 15) - 45)5 = x - 15$. Sprendžiame:$(2x - 75)5 = x - 15$, $10x - 75 \cdot 5 = x - 15$, $9x = 75 \cdot 5 - 15$, $3x = 25 \cdot 5 - 5 = 24 \cdot 5$, $x = 8 \cdot 5 = 40$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Pradėkime nuo „galo“. Sakykime, kad berniukų pabaigoje liko x, mergaičių $5x$. Prieš tai, kai iš grupės pasitraukė 45 berniukai, jų buvo $45 + x$, ir tai yra dukart daugiau negu $5x$ mergaičių. Vadinasi, $45 + x = 10x$, $x = 5$. Vadinasi, iš pradžių buvo $5x + 15 = 40$ mergaičių.

!!! Galima apsieiti ir be x-ų. Sakykime, kad galų gale berniukų liko „pulkelis“. Tada mergaičių buvo likę 5 pulkeliai. Grąžinus 45 berniukus, jų pasidarė 10 pulkelių. Vadinasi, 9 pulkeliai yra 45, 1 pulkelis — 5 žmonės. Vadinasi, iš pradžių mergaičių buvo $5 \cdot 5 + 15 = 40$.

J18. Ⓒ 185



! Kadangi $OB = 3 \cdot 12$, $OA = 4 \cdot 12$, tai $AB = 5 \cdot 12 = AD = BC = CD$. Bet visi keturi statieji trikampiai panašūs, todėl $FD : AD = OA : OB$, $FD : (5 \cdot 12) = 4 : 3$, $FD = 20 \cdot 4$. Panašiai $CE : CB = OB : AO$, $CE : (5 \cdot 12) = 3 : 4$, $CE = 15 \cdot 3$. Taigi $EF = EC + CD + DF = 15 \cdot 3 + 5 \cdot 12 + 20 \cdot 4 = 5(9 + 12 + 16) = 5 \cdot 37 = 185$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima apskaičiuoti visą EF iš karto. Kadangi $AF : AD = AB : OB$, tai $AF : (5 \cdot 12) = (5 \cdot 12) : (3 \cdot 12)$, $AF = 5 \cdot 12 \cdot 5 : 3 = 100$. Todėl $OF = 100 + 48 = 148$. Bet $EF : OF = AB : OA$, taigi $EF : 148 = 5 : 4$, $EF = 5 \cdot 37 = 185$.

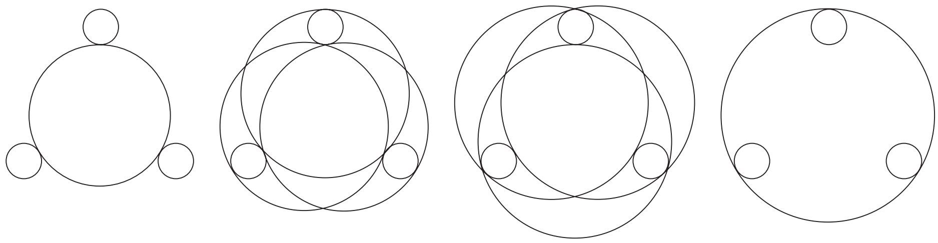
J19. Ⓓ $5000 < y < 15\,000$

? Nesunku suvokti, kad „didelį“ skaičių gausime dalydami $1 : x$. Vadinasi, x čia turi būti „mažas“. Kai iš 1,99 atimame 2, gauname $-0{,}01$. Tada operacija $\frac{1}{x}$ duoda -100. Dabar operacija x^2 duoda 10 000.
Renkamės atsakymą **D**.

! Įrodyti, kad pasirenkamas skaičius yra didžiausias, sunku. Tai įmanoma padaryti atlikus perranką. Beje, perranką galima padaryti mažesnę. Jeigu operacijas pažymėsime raidėmis A, B, C, D, tai nesunku įsitikinti, kad operacijos AB ir BA duoda tą patį rezultatą. Tą patį rezultatą duoda ir operacijos CD ir DC. Negana to, operacijos CC gražina skaičių į pradinę padėtį. Todėl, jeigu ieškome didžiausio rezultato, užtenka peržiūrėti rezultatus po pirmos operacijos, po antros operacijos, ir nebekreipti dėmesio į pasikartojusius. Vis dėlto rezultatų pakankamai daug — apie 60, ir nesinorėtų jų visų išrašinėti.
Pasiimkime realią ribą, pavyzdžiui, 100, ir pagalvokime, kada ji gali būti peržengta. Trečioji operacija — tai viena iš keturių: $x \to x + 3$, $x - 2$, $\frac{1}{x}$, x^2. Aišku, kad jeigu $\frac{1}{10} \leqslant |x| \leqslant 10$, tai nė viena operacija neduos skaičiaus, didesnio moduliu už 100. Vadinasi, mums įdomūs tik rezultatai po dviejų operacijų z, duodantys skaičius $|z| > 10$ arba $|z| < \frac{1}{10}$. Po pirmos operacijos iš skaičiaus $x = 1{,}99$ gauname skaičius $x+3$, $x-2$, $\frac{1}{x}$, x^2, po antros — skaičius $x+6$, $x+1$, $\frac{1}{x+3}$, $(x+3)^2$, $x-4$, $\frac{1}{x-2}$, $(x-2)^2$, $\frac{1}{x}+3$, $\frac{1}{x}-2$, x, $\frac{1}{x^2}$, x^2+3, x^2-2, x^4. Matome, kad su $x = 1{,}99$ į intervalą $[\frac{1}{10}; 10]$ nepakliūna tik skaičių $(x+3)^2$, $\frac{1}{x-2}$, $(x-2)^2$, x^4 moduliai. Po trečios operacijos jie daugiausiai gali duoti atitinkamai $(x+3)^4$, $\frac{1}{(x-2)^2}$, $\frac{1}{(x-2)^2}$, x^8. Taigi didžiausia reikšmė yra $\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(-0{,}01)^2} = 10^4$, o kitos dvi reikšmės mažesnės: $(x+3)^4 < 5^4 = 625$, $x^8 < 2^8 = 256$.
Teisingas atsakymas **D**.

J20. E 8

! Kiekvienas iš duotųjų apskritimų gali atsidurti tenkinančio sąlygą apskritimo išorėje arba viduje.
Jeigu tokio apskritimo viduje nėra duotųjų apskritimų, turime vieną tokį apskritimą.
Jeigu apskritimo viduje yra vienas iš duotųjų, turime tris tokius apskritimus.
Jeigu apskritimo viduje yra du iš duotųjų, vėl turime tris tokius apskritimus. Jeigu apskritimo viduje yra visi trys duotieji, turime vieną tokį apskritimą.



Vadinasi, iš viso yra 8 tokie apskritimai.
Teisingas atsakymas **E**.

J21. B 48

? Kadangi kvadrato su tokiu perimetru plotas būtų $8^2 = 64$, tai stačiakampio plotas turbūt bus mažesnis. Nesunkiai atspėjame tinkamo stačiakampio kraštines: 12 ir 4.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pasižymėkime ieškomojo stačiakampio kraštines a ir b, $a \leqslant b$. Tada $a+b = 16$ ir reikia nagrinėti a reikšmes nuo 1 iki 8. Atitinkamai plotus ab gauname $1\cdot 15, 2\cdot 14, 3\cdot 13, 4\cdot 12, 5\cdot 11, 6\cdot 10, 7\cdot 9, 8\cdot 8$.
Iš jų pasirinkimui duotas tik plotas $4 \cdot 12 = 48$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Perranka matyt ir yra greičiausias būdas. Šiaipjau nesunku įrodyti, kad plotas yra ne didesnis už 64, nes $S = a(16-a) = -(a^2 - 16a) = 64 - (a-8)^2$.
Lieka patikrinti atsakymus 24 ir 48. Kadangi a ir b sandauga abiem atvejais dalijasi iš 8, tai bent vienas dauginamasis dalijasi iš 4. Bet kadangi abiejų dauginamųjų suma yra 16, tai ir kitas dalijasi iš 4. Vadinasi, sandauga turi dalytis iš 16, taigi tinka tik 48.

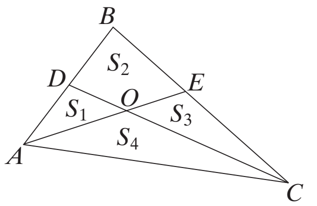
!!! Išskaidę atsakymų skaičius, turime $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3$, $2^2 \cdot 19$, $2^6 \cdot 3$, $2^7 \cdot 3$. Iš karto atkrenta $2^2 \cdot 19$, nes tada bent vienas iš dauginamųjų r ir b būtų 19-os kartotinis. Vadinasi, sandauga ab turi mažiausiai tris dvejetus, o vienas iš dauginamųjų — mažiausiai du dvejetus. Bet kadangi $a+b = 16$, tai ir kitas daugiklis dalijasi iš 4, t. y. turi bent du dvejetus. Nei vienas daugiklis negali turėti trijų ar daugiau dvejetų — tada ir kitas dalytųsi iš 8 ir turėtų bent 3 dvejetus. Bet tada vienas daugiklis turėtų dar ir 3, o tada jis būtų didesnis už $2^3 \cdot 3 > 16$. Taigi lieka keturių dvejetų atvejis, t. y. $2^4 \cdot 3$, o daugikliai tada 2^2 ir $2^2 \cdot 3$.

J22. C 8

! Iš viso krovinio yra $150 + 151 + \cdots + 199 = 25(150 + 199) = 349 \cdot 25\,(\text{t})$. Kadangi vienas sunkvežimis veža ne daugiau kaip $12 \cdot 100 = 48 \cdot 25\,(\text{t})$, tai reikia ne mažiau kaip $\frac{349\cdot 25}{48\cdot 25} = \frac{349}{48} = 7{,}\ldots$, t. y. ne mažiau kaip 8 sunkvežimių. Jiems užtenka imti po 7 konteinerius (kai kuriems liks net mažiau). Bet net sunkiausius 7 konteinerius gali pavežti vienas sunkvežimis:
$150 + \cdots + 156 = (75 + 78)7 = 153 \cdot 7 = 1071\,(\text{t})$.
Teisingas atsakymas **C**.

J23. Ⓐ Ne

? Čia negalime imti „patogaus“ trikampio — gal jam plotai negali būti lygūs, o kitiems — gali. Bet iš akies matyti, kad $S_2 > S_1$.
Renkamės atsakymą **A**.



! Tarkime, kad $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Įsitikinsime, kad tai neįmanoma. Iš tikrųjų, kadangi $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, tai trikampių ABE ir ACE plotai lygūs, o aukštinė iš viršūnės A bendra. Todėl lygūs ir pagrindai $BE = EC$, t. y. AE — pusiaukraštinė. Lygiai taip pat ir CD — pusiaukraštinė. Bet pagal pusiaukraštinės savybę $AO : OE = 2 : 1$, todėl trikampių AOC ir EOC plotai sutinka kaip pagrindai OA ir OE, nes jų aukštinė iš taško C bendra. Vadinasi, $S_4 : S_3 = 2 : 1$, $S_4 = 2S_3$. Prieštara.
Galima ir nesiremti pusiaukraštinės savybe. Kadangi D ir E — kraštinių vidurio taškai, tai $\triangle BDE$ plotas lygus ketvirtadaliui $\triangle ABC$ ploto. Bet $S_{ABDE} < S_{BEOD}$, — prieštara.

!! Sakykime, kad $S_4 = S_3$. Tada $AO = OE$. Bet tada $S_1 = S_{\triangle AOD} = S_{\triangle OED} < S_{\triangle OEBD} = S_2$. Prieštara.

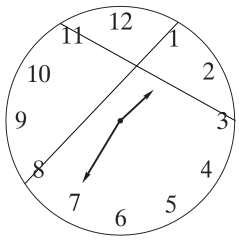
J24. Ⓒ 55%

? Aišku, kad ieškomas vidurkis yra mažesnis už 88 ir didesnis už 44. Tokie skaičiai yra 66 ir 55. Bet 66 gautume, jei mėnesių skaičiai būtų vienodi, o dabar vidurkis sumažės.
Renkamės atsakymą **C**.

! Procentų vidurkis lygus $(3 \cdot 88 + 9 \cdot 44) : 12 = 1 \cdot 22 + 3 \cdot 11 = 55$.
Teisingas atsakymas **C**.

J25. Ⓑ 75°

? Spėjame, kad gretutiniai kampai proporcingi atitinkamų lankų ilgių sumoms: $(3 + 2) : (2 + 5) = 5 : 7$. Kadangi 1 dalis atitinka 30 laipsnių, tai mažesnis iš kampų yra $30° \cdot 5 : 2 = 75°$.
Renkamės atsakymą **C**.



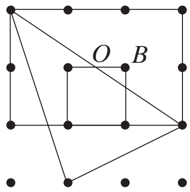
! Ieškomas kampas matuojamas puse atitinkamų lankų sumos, t. y. $(2 + 3) \cdot 30° : 2 = 75°$.
Teisingas atsakymas **C**.

J26. B 1

Sienos yra trikampiai: CAB su kraštinėmis $CA = 8$, $AB = 9$, $BC = 12$; ADB su kraštinėmis $DA = 6$, $AB = 9$, $BD = 12$; ACD su kraštinėmis $CD = 4$, $DA = 6$, $AC = 8$; BCD su kraštinėmis $CD = 4$, $DB = 12$, $BC = 12$. Kadangi surašytų didėjimo tvarka kraštinių santykiai yra $8 : 9 : 12$, $2 : 3 : 4$, $2 : 3 : 4$, $1 : 3 : 3$, tai yra tik viena pora panašiųjų trikampių — ABD ir ACD.
Teisingas atsakymas **B**.

J27. D $\frac{11}{12}$

Iš akies mažojo trikampio kraštinės lygios $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{3}$, todėl jo plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, todėl ieškomasis plotas lygus $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.
Renkamės atsakymą **D**.



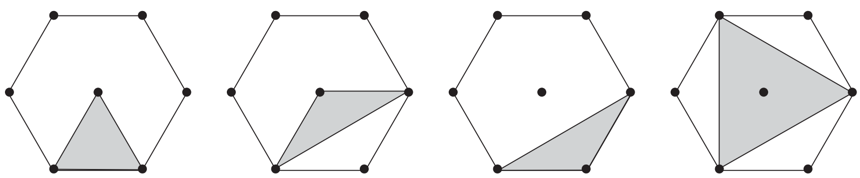
Matome, kad O yra stačiakampio centras, todėl $OB = \frac{1}{2}$. Kadangi didysis trikampis — pusė stačiakampio — panašus į mažąjį, o jų panašumo koeficientas lygus $3 : \frac{1}{2} = 6$, tai jų plotų santykis lygus 36. Kadangi didžiojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$, tai mažojo plotas $\frac{1}{12}$. Todėl ieškomasis plotas lygus $\frac{11}{12}$.
Teisingas atsakymas **D**.

J28. D 80

Pasižymėkime skaičių $\overline{abcd}$. Pagal sąlygą $10a + b + c + d = 10c + d$, $9a + (a + b) = 9c$. Kadangi $a \neq 0$, tai $9a < 9c$, $a < c$, t. y. $1 \leqslant a \leqslant 8$. Todėl $1 \leqslant a + b \leqslant 17$, o kadangi $a + b$ dalijasi iš 9, tai $a + b = 9$. Gauname, kad $9c = 9a + 9$, t. y. $c = a + 1$, o $b = 9 - a$. Vadinasi, a galima pasirinkti 8 būdais, tada c ir b nustatomi vienareikšmiškai, o d galima rinktis laisvai — 10 būdų. Vadinasi, a ir d galima pasirinkti 80 būdų, ir yra 80 norimų skaičių.
Teisingas atsakymas **D**.

J29. C 20

Iš pradžių žiūrėkime, kiek yra lygiašonių trikampių su viršūne centre. Aišku, kad yra 6 lygiakraščiai trikampiai, kurių kitos dvi viršūnės — gretimos šešiakampio viršūnės, taip pat 6 lygiašoniai trikampiai, kurių kitos dvi viršūnės — šešiakampio viršūnės vieną praleidus. Dabar suskaičiuokime, kiek yra trikampių, kurių viršūnės — šešiakampio viršūnės. Jeigu imame dvi gretimas viršūnes, tai lygiašonį trikampį gauname tik paėmę gretimą trečią viršūnę — kitaip sakant, galime imti 3 paeiliui einančias viršūnes. Tokių trikampių — 6.



Jeigu imame dvi viršūnes vieną praleidę, tai gauname (be jau turėto trikampio) taisyklingąjį trikampį. Aišku, kad tokių trikampių yra 2.
Vadinasi, iš viso gauname $6 + 6 + 6 + 2 = 20$ lygiašonių trikampių.
Teisingas atsakymas **C**.

J30. (A) $9 \cdot 2^{11}$

? Kadangi lyginis 2 laipsnis dalijamas iš 3, duoda liekaną 1, o nelyginis — liekaną 2, tai visų narių liekanų suma yra $2+0+1+1+0+2+2+0+1=9$, todėl ieškomoji suma dalijasi iš 3. Toks yra tik atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Lygybę

$$S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 10 \cdot 2^{10}$$

padauginkime iš 2:

$$2S = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + 9 \cdot 2^{10} + 10 \cdot 2^{11}.$$

Atimkime pirmą lygybę iš antros:

$$S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{10} - 2^9 - \cdots - 2^3 - 2 \cdot 2^2.$$

Bet

$$2 \cdot 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{10} = 2^4 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{10} =$$
$$= 2^5 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{10} = \cdots = 2^9 + 2^9 + 2^{10} = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11},$$

todėl $S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{11} = 9 \cdot 2^{11}$.
Žinoma, $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{10}$ galima buvo sudėti remiantis geometrinės progresijos sumos formule.

!! Lygybę

$$S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{10} - 2^9 - \cdots - 2^3 - 2 \cdot 2^2$$

padauginkime iš 2, ir iš gautos lygybės

$$2S = 20 \cdot 2^{11} - 2^{11} - 2^{10} - \cdots - 2^4 - 4 \cdot 2^2$$

atimkime ankstesnę:

$$S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{11} - 4 \cdot 2^2 + 2^3 + 2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 2^{11}.$$