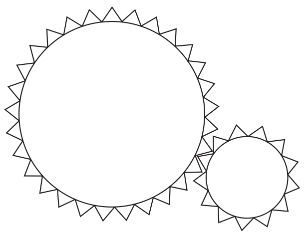
KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. (D) Žr. B21 uždavinio sprendimą.

K2. (B) 3 kartus pagal laikrodžio rodyklę

Jeigu didesnysis dantratis sukasi prieš laikrodžio rodyklę, tai mažesnysis — pagal. Kadangi mažesnysis dantratis „dantų“ turi 3 kartus mažiau už didesnįjį, tai jis apsisuks 3 kartus.



Teisingas atsakymas **B**.

K3. (E) 84 pakelius, 14 sąsiuvinių

Remkimės atsakymais ir „prisišaudykime“. Kadangi 84 pakeliuose yra $84 \cdot 24 = 2016$ sąsiuviniai, tai juos nupirkus liktų tik 14 sąsiuvinių. Vadinasi, nei daugiau, nei mažiau sąsiuvinių pirkti negalima. Teisingas atsakymas **E**.

Kitas dalykas, jeigu jokių atsakymų nėra. Tada galima samprotauti, pavyzdžiui, taip. Kadangi perkant 100 sąsiuvinių reikia 4 pakelių ir dar 4 sąsiuvinių, tai perkant 2000 sąsiuvinių reikės 20 kartų daugiau — 80 pakelių ir dar 80 sąsiuvinių, t. y. 83 pakelių ir dar 8 sąsiuvinių. Taigi iš viso reikia 83 pakelių ir dar 10 sąsiuvinių. Vadinasi, reikia pirkti 84 pakelius, o tada išdalijus liks 14 sąsiuvinių.
Žinoma, tai nesunku suskaičiuoti ir dalijant kampu.
Kadangi

$$\begin{array}{r|l} -2002 & 24 \\ \underline{192} & 83 \\ -82 & \\ \underline{72} & \\ 10 & \end{array}$$

tai $2002 = 83 \cdot 24 + 10$.

K4. (A) $\frac{7}{8}$

Kadangi suprastinę gauname $\frac{66}{77} = \frac{6 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{6}{7}$, $\frac{555}{666} = \frac{5 \cdot 111}{6 \cdot 111} = \frac{5}{6}$, $\frac{4444}{5555} = \frac{4 \cdot 1111}{5 \cdot 1111} = \frac{4}{5}$, $\frac{33333}{44444} = \frac{3 \cdot 11111}{4 \cdot 11111} = \frac{3}{4}$, tai reikia palyginti trupmenas $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$. Tai lengviausia padaryti pastebėjus, kad iki 1 joms atitinkamai trūksta $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$. Kadangi iš jų mažiausia pirmoji, tai didžiausia iš duotųjų trupmenų yra $\frac{7}{8}$.
Teisingas atsakymas **A**.

K5. (C) 13^{09}

Tikriname atsakymus. Pradėkime nuo vidurinio pagal laikrodį — **B**. Kadangi 12:39 − 4:53 = 11:99 − 4:53 = 7:46, o 21:25 − 12:39 = 20:85 − 12:39 = 8:46, tai reikia bandyti didesnį laiką — atsakymą **C**. Skirtumai 13:09 − 4:53 = 12:69 − 4:53 = 8:16 ir 21:25 − 13:09 = 8:16 lygūs.
Renkamės atsakymą **C**.

! Dienos ilgumas yra 21:25 − 4:53 = 20:85 − 4:53 = 16:32. Todėl saulė užims aukščiausią padėtį 4:53 + 8:16 = 12:69 = 13:09.
Teisingas atsakymas **C**.

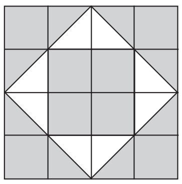
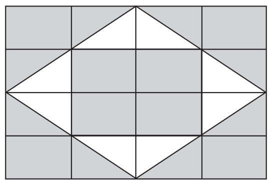
!! Ieškant dienos vidurio užtenka rasti duotųjų laikų vidurkį

$$\frac{4{:}53 + 21{:}25}{2} = \frac{25{:}78}{2} = \frac{26{:}18}{2} = 13{:}09.$$

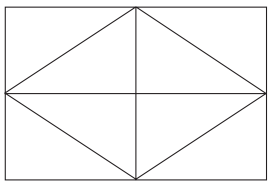
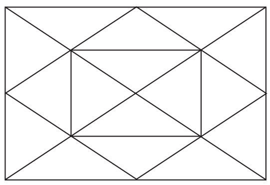
K6. Ⓓ $\frac{3}{4}$

? Kadangi visą laiką kraštinės dalijamos pusiau, tai natūralu tikėtis, kad ieškomos dalies vardiklis bus 2 laipsnis.
Renkamės atsakymą **D**.

?? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo stačiakampio matmenų, tai geriausia imti kvadratą ir jį sudalyti kvadratėliais. Neužtušuota 8 langelių po pusę, t. y. 4 langeliai. Iš viso yra 16 langelių, taigi neužtušuota ploto dalis yra $\frac{1}{4}$, o užtušuota $\frac{3}{4}$. Beje, pradinį stačiakampį taip pat galima sudalyti į 16 lygių stačiakampių.

! Padaliję stačiakampį horizontalia ir vertikalia vidurinėmis linijomis, matome, kad rombo plotas sudaro pusę stačiakampio ploto.

Išvedę stačiakampio įstrižaines, matome, kad vidinis stačiakampis yra pusė rombo. Vadinasi, neužtušuota yra $\frac{1}{4}$ stačiakampio.
Teisingas atsakymas **D**.

K7. Ⓔ 7

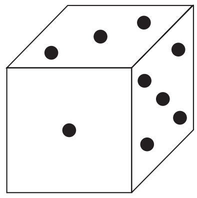
? Pradėkime spėlioti nuo vidurinio atsakymo. Jeigu Andrius suvalgė 6 pyragaičius, tai kitiems dviem vaikams liko 11 pyragaičių, todėl vienas jų suvalgė bent 6. Taigi Andrius turėjo suvalgyti bent 7 pyragaičius. Jeigu jis suvalgė bent 7, tai kitiems liko 10, ir jie galėjo, pavyzdžiui, suvalgyti po 5.
Renkamės atsakymą **E**.

! Sakykime, kad Andrius suvalgė x pyragaičių. Tada kiti suvalgė ne daugiau kaip po $x - 1$ pyragaitį. Vadinasi,

$$x + x - 1 + x - 1 \geqslant 17,$$

todėl $3x \leqslant 19$, $x \geqslant 7$.
Dar reikia įsitikinti, kad tai tikrai įmanoma. Jei Andrius suvalgė 7 pyragaičius, o kiti du 6 ir 4 atitinkamai, tai visos uždavinio sąlygos išpildytos.
Teisingas atsakymas **E**.

K8. Ⓒ 13



! Didžiausia suma galėtų būti $6+5+4=15$, bet tai neįmanoma, nes 5 ir 4 yra priešingose sienelėse. Sumą 14 galima gauti tik sumažinus vieną dėmenį vienetu, t. y. $6+5+3=14$. Bet 6 ir 3 taip pat yra priešingose sienelėse. Tikriname sumą $13=6+5+2=6+4+3$. Paskutinė suma vėl atkrenta (6 ir 3 yra priešingose sienelėse), taigi lieka $6+5+2$. Tai iš tikrųjų įmanoma: apatinę (6), dešiniąją (5) ir užpakalinę (2) sienelę galima pamatyti vienu metu, tinkamai pasukus kauliuką.
Teisingas atsakymas **C**.

K9. Ⓒ Žr. uždavinio M20 sprendimą.

K10. Ⓒ 3

? Pradėkime spėlioti nuo vidurinio atsakymo. Jeigu slyvų buvo 3 krepšeliai, tai slyvos kainavo 12 eurų, tada 5 krepšeliai kitų vaisių kainavo 11 eurų. Vadinasi, galima imti 4 krepšelius obuolių ir 1 krepšelį slyvų: $4\cdot 2+1\cdot 3=11$.
Dabar sakykime, kad slyvų buvo 4 krepšeliai. Tada slyvos kainavo 16 eurų, o likę vaisiai 7 eurus. Bet už juos galima nupirkti daugiausiai 3 krepšelius, nes net pigiausi obuolių 4 krepšeliai kainuotų 8 eurus.
Renkamės atsakymą **C**.

! Sakykime, kad slyvų yra x krepšelių. Tada likusių vaisių krepšelių yra $8-x$, ir jie kainuoja ne mažiau kaip $(8-x)2$ eurus. Vadinasi, $4x+(8-x)2\leqslant 23$, $2x\leqslant 7$, $x\leqslant 3$. Jau įsitikinome, kad 3 krepšeliai slyvų galėjo būti.
Teisingas atsakymas **C**.

K11. Ⓑ $25:8$

? Aišku, kad patogu būtų, jei b dalytųsi iš 4 ir iš 5. Imkime $b=20$, tada $a=45$, $c=12$. Vadinasi, $(a-b):(b-c)=25:8$.
Renkamės atsakymą **B**.

! Žinoma, toks spėjimas — tai beveik sprendimas. Pažymėkime $b=20x$. Tada $a=45x$, $c=12x$, todėl $(a-b):(b-c)=(25x):(8x)=25:8$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Kadangi $a:b=9:4$, tai $(a-b):b=5:4$. Kadangi $b:c=5:3$, tai $b:(b-c)=5:2$. Sudauginę gautas lygybes, gauname $(a-b):(b-c)=25:8$. Tą patį galima užrašyti įprastiniu būdu. Kadangi $\frac{a}{b}=\frac{9}{4}$, tai atėmę po 1 gauname $\frac{a-b}{b}=\frac{5}{4}$. Kadangi $\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$, tai $\frac{c-b}{b}=-\frac{2}{5}$, $\frac{b-c}{b}=\frac{2}{5}$. Padaliję gautąsias lygybes, randame santykį $\frac{5}{4}:\frac{2}{5}=\frac{25}{8}$.

K12. Ⓔ 150

? Imkime vidurinį atsakymą — sakykime, kad bazėje buvo 110 žmonių. Jie per 60 dienų būtų suvalgę $110\cdot 60$ „davinių“. Visi kartu su priimtaisiais per 50 dienų būtų suvalgę $140\cdot 50$ „davinių“, o tie skaičiai nelygūs. Taip pat $140\cdot 60\neq 170\cdot 50$. O štai $150\cdot 60=180\cdot 50$.
Renkamės atsakymą **E**.

! Sakykime, kad bazėje buvo x žmonių. Tada priėmus žvejus iš tralerio jų pasidarė $x+30$. Sudarome lygtį:

$$x\cdot 60=(x+30)\cdot 50.$$

Iš jos $6x=5x+5\cdot 30$, $x=150$.
Teisingas atsakymas **E**.

Abiem atvejais atmeskime tą maistą, kurį suvalgė bazės žvejai per 50 dienų. Tada per 50 dienų skęstantieji suvalgė tiek, kiek bazės žvejai būtų valgę 10 dienų. Vadinasi, skęstančiųjų buvo 5 kartus daugiau, t. y. 150 žmonių.

K13. Ⓐ 360

Sakykime, kad šventėje mokinių buvo x. Tada berniukų buvo $0{,}25x$, mergaičių — $0{,}75x$. Mėlynakių berniukų buvo $0{,}125x$, o mergaičių — $0{,}15x$. Vadinasi, $0{,}125x + 0{,}15x = 99$. Dauginame iš 80:

$$10x + 12x = 99 \cdot 80, \quad 22x = 99 \cdot 80, \quad 2x = 9 \cdot 80, \quad x = 9 \cdot 40.$$

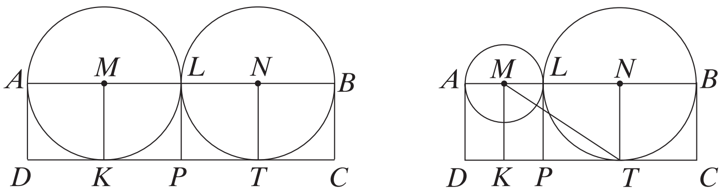
Teisingas atsakymas **A**.

Sakykime, kad mokinių buvo $100x$. Tada berniukų buvo $25x$, mergaičių $75x$. Mėlynakių berniukų buvo $12{,}5x$, mergaičių $15x$. Vadinasi, $12{,}5x + 15x = 99$, $25x + 30x = 99 \cdot 2$, $55x = 99 \cdot 2$, $5x = 9 \cdot 2$. Todėl šventėje dalyvavo $5x \cdot 20 = 9 \cdot 2 \cdot 20 = 360$ mokinių.

Žinoma, galima apsieiti ir be iksų. Berniukų šventėje buvo $\frac{1}{4}$ dalis. Vadinasi, mėlynakių berniukų buvo $\frac{1}{8}$. Mergaičių šventėje buvo $\frac{3}{4}$, iš jų mėlynakių buvo $\frac{3}{20}$. Mėlynakių dalyvių dalis buvo $\frac{1}{8} + \frac{3}{20} = \frac{11}{40}$. Kadangi mėlynakių iš viso buvo 99, tai šventėje dalyvavo $99 : \frac{11}{40} = 360$ mokinių.

K14. Ⓑ $\frac{15}{4}$

Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo spindulio, tai imkime juos lygius. Nuleidę statmenis MK ir LP gauname keturis kvadratus, todėl stačiakampio $MNTK$ plotas (du kvadratai) yra $\frac{15}{2}$, o trikampis MNT sudaro pusę to stačiakampio. Vadinasi, trikampio plotas lygus $\frac{15}{4}$.
Renkamės atsakymą **B**.



Sąlygos brėžinyje vėl nuleidžiame statmenis MK ir LP. Kadangi $MA = ML$ ir $LN = NB$, tai stačiakampio $MNTK$ pagrindas MN lygus pusei stačiakampio $ABCD$ pagrindo AB, todėl $MNTK$ plotas lygus $\frac{15}{2}$. Kadangi stačiakampį $MNTK$ sudaro trikampis MNT ir jam lygus trikampis, tai ieškomas plotas lygus $\frac{15}{4}$.
Teisingas atsakymas **B**.
Žinoma, tą patį gautume remdamiesi ploto formulėmis.

K15. Ⓒ Žr. uždavinio B20 sprendimą.

K16. Ⓓ Danutė

Tikrinkime atsakymus. Agnė (A) dovanos neslėpė, nes tada Celestina (C) ir Danutė (D) būtų melavusios. B dovanos neslėpė, nes tada B ir C būtų melavusios. C dovanos neslėpė, nes tada C ir D būtų melavusios.
Renkamės atsakymą **D**.

Iki pilno sprendimo reikia patikrinti atsakymą **D**. Jei dovaną paslėpė D, tai A, B ir C sakė tiesą, o melavo pati D. Uždavinio sąlyga tenkinama.
Teisingas atsakymas **D**.

K17. Ⓐ Žr. uždavinio B17 sprendimą.

K18. D 60%

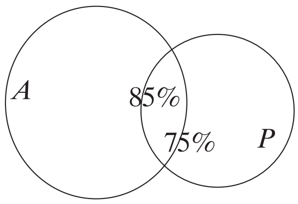
? Tikrinkime atsakymus. Pradėkime nuo vidurinio procento **A**. Jeigu abiem kalbomis kalba 50%, tai vien angliškai kalbėtų 35%, o vien prancūziškai — 25%. Bet tada gyventojų būtų $50 + 35 + 25 = 110(\%)$. Imkime mažesnį procentą.
Jeigu abiem kalbomis kalbėtų 40%, tai vien angliškai kalbėtų 45%, o vien prancūziškai — 35%. Gavome $40 + 45 + 35 = 120(\%)$, vadinasi, einame ne į tą pusę. Reikia imti didesnį procentą.
Jeigu abiem kalbomis kalbėtų 60%, tai vien angliškai kalbėtų 25%, vien prancūziškai 15%. Kadangi $60 + 25 + 15 = 100(\%)$, tai situacija panaši į tikrovę.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi 85% gyventojų kalba angliškai, tai angliškai nekalba 15%, ir jie kalba tik prancūziškai. Panašiai nustatome, kad 25% gyventojų kalba tik angliškai. Vadinasi, po vieną kalbą moka $15+25 = 40(\%)$, todėl abi kalbas moka $100 - 40 = 60(\%)$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad abiem kalbomis kalba $x\%$. Tada vien angliškai kalba $(85 - x)\%$, o vien prancūziškai $(75 - x)\%$. Gauname lygtį:

$$x + (85 - x) + (75 - x) = 100,$$

t. y. $x = 60$.



!!! Vaizdu naudotis ir skrituliais (vadinamosiomis Veno diagramomis). Kadangi abiejuose skrituliuose yra 100%, tai bendroji skritulių dalis yra $85 + 75 - 100 = 60(\%)$.
Tas pats būdas žodžiais nusakomas taip. Tarp angliškai kalbančių žmonių yra kalbančių vien angliškai ir abiem kalbomis. Todėl jei sudėtume angliškai kalbančių žmonių skaičių ir prancūziškai kalbančių žmonių skaičių, tai į sumą vien angliškai kalbantys žmonės (A) bus įskaityti vieną kartą, vien prancūziškai (P) — vieną kartą, o kalbantys abiem kalbomis (AP) — po du kartus. Todėl atmetus visus po vieną kartą (100%) liks kalbantys abiem kalbomis: $85\% + 75\% - 100\% = 60\%$.
Tą patį galima užrašyti lygybe

$$\begin{aligned}(A + AP) + (P + AP) &= 85 + 75,\\ (A + AP + P) + AP &= 160,\\ 100 + AP &= 160,\\ AP &= 60.\end{aligned}$$

K19. A 5

? Pabandykime padėlioti monetas. Padėkime vieną į kampą a1. Tada „neapšaudytas“ langelis b2. Todėl bandome monetą dėti ne į b2, o toliau, į b3. Dabar analogiškai verta užimti a5, tada b7 ir pagaliau a9. Matome, kad padėtos 5 monetos ir uždavinio sąlygos įvykdytos. Mažesnių atsakymų nėra.
Renkamės atsakymą **A**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	○	×			○				○
b	×		○				○		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	×	○	×				×	○	×
b	×	○	×				×	○	×

! Neblogai būtų įrodyti, kad 4 monetų neužtenka. Pagalvokime, kiek daugiausiai langelių gali „aptarnauti“ viena moneta: ji užima vieną langelį pati ir gali „apšaudyti“ langelį į kairę, langelį į dešinę ir langelį vertikaliai. Vadinasi, viena moneta gali aptarnauti daugiausiai 4 langelius, o 4 monetos — daugiausiai 16 langelių. Kadangi yra $2 \times 9 = 18$ langelių, tai 4 (arba mažiau) monetų neužtenka. Penkių monetų, kaip jau įsitikinome, gana.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Įdomu, kad toks 5 monetų išdėstymas iš esmės vienintelis (žinoma, galima pradėti ir nuo langelių b1, a9, b9, o ne tik nuo a1, — gausime simetriškas padėtis).
Iš tikrųjų, sakykime, kad nei a1, nei b1, nei a9, nei b9 neužimti. Tada būtinai turi būti užimti langeliai a2 (kad apšaudytų a1) ir b2 (kad apšaudytų b1). Dabar langeliai a3 ir b3 jau apšaudyti. Lygiai taip pat turi būti užimti langeliai a8, b8. Bet tada lieka 6 neaptarnauti langeliai ir tik 1 moneta, kuri gali aptarnauti daugiausiai 4 langelius.
Vadinasi, bent vienas kampinis langelis užimamas. Dėl simetrijos galime laikyti, jog tai langelis a1. Aišku, kad moneta negali būti langelyje b1 — tada 2 monetos aptarnautų tik 4 langelius, o kitoms 3 monetoms liktų net 14 langelių.
Negali moneta būti ir langeliuose a2 ar b2: tada dvi monetos aptarnautų tik 5 langelius, o kitoms 3 monetoms liktų 13 langelių. Bet tada moneta turi būti langelyje b3 — kitaip liks neaptarnautas langelis b2.
Eikime toliau į dešinę. Negali moneta būti langelyje a3 — liktų neaptarnautų 10 langelių ir tik 2 monetos. Negali moneta būti langelyje a4 ar b4 — dešiniau liktų 9 neaptarnauti langeliai. Dabar būtinai moneta turi būti langelyje a5 — kitaip liks neaptarnautas langelis a4.
Ketvirtoji moneta negali būti 6 stulpelyje — paskutinė moneta nesugeba aptarnauti 8 ir 9 stulpelių. Vadinasi, ji yra langelyje b7 — kitaip liktų neaptarnautas langelis b6. Liko neaptarnauti langeliai a8, a9, b9, todėl paskutinė moneta tai gali padaryti tik užėmusi langelį a9.
Įrodėme, kad monetos turi būti išsidėsčiusios žirgo ėjimu pradedant nuo kampinio langelio (kairiame paveikslėlyje pavaizduota padėtis, kai užimamas kampinis langelis a1).

K20. Ⓐ 36

? Sakykime, kad eskalatoriaus (laiptų) ilgis 180 m. Tada Mato greitis 2 m/s, eskalatoriaus greitis 3 m/s. Todėl jų bendras greitis 5 m/s, ir į viršų judančiu eskalatoriumi Matas pakils į viršų per $180 : 5 = 36$ (s).

! Šį sprendimą galima padaryti griežtu sakant: tegu laiptų ilgis yra 180 tam tikrų ilgio vienetų (i). Tada Mato greitis 2 i/s, eskalatoriaus 3 i/s, bendras jų greitis 5 i/s, ir į viršų Matas pakils per (180 i/s) : (5 i/s) = 36 s.

!! Per 1 s Matas įveikia $\frac{1}{90}$ laiptų dalį. Eskalatorius per 1 s įveikia $\frac{1}{60}$ laiptų dalį. Abu per 1 s jie įveikia $\frac{1}{90} + \frac{1}{60}$ laiptų dalį, todėl jiems „kartu“ prireiks $1 : \left(\frac{1}{90} + \frac{1}{60}\right) = 180 : (2 + 3) = 36$ sekundžių.

K21. Ⓓ 6

? Nagrinėkime skaičiaus 21 kartotinius. 21 nesidalija iš 9, 42 — nesidalija, o 63 dalijasi. Jo dalikliai yra 1, 3, 7, 9, 21, 63.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi n dalijasi iš 21, tai į jo skaidinį pirminiais įeina 3 ir 7. Kadangi n dalijasi iš 9, tai į skaidinį įeina bent du trejetai. Taigi $n = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot d$. Toks skaičius garantuotai turi daliklius 1, 3, 7, 9, 21, 63 ir gal dar kokių nors daliklių. Vadinasi, n turi mažiausiai 6 daliklius. Bet jau žinome, kad skaičius 63 turi lygiai 6 daliklius. Taigi skaičius n dalijasi mažiausiai iš 6 daliklių.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Įrodysime, kad toks n yra vienintelis. Jau žinome, kad $n = 63d$. Jeigu d lygus 1, tai $n = 63$ turi 6 daliklius. Jeigu $d \neq 1$, tai nesunku nurodyti 7 skirtingus n daliklius (gal jų yra ir daugiau): 1, 3, 7, 9, 21, 63, $63d$.

!!! Įdomus būtų toks uždavinys. *Žinome, kad skaičius n, turintis daliklius 9 ir 21, gali turėti 6 daliklius. O kiek mažiausiai jis gali turėti daliklių, jeigu jų yra daugiau kaip 6?*
Kadangi $n = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot d$, $d \neq 1$, tai vardijant n daliklius reikia sekti, kad jie nesikartotų. Pavyzdžiui, jeigu $d = 2k$, tai dalikliai bus

1	3	7	9	21	63
2	6	14	18	42	126.

Pasižiūrėkime, kiek gi bus daliklių, kai $d = 3k$. Tada dalikliai tikrai yra

1	3	7	9	21	63
3	9	21	27	63	189,

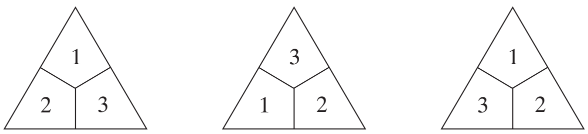
bet antroje eilutėje kartojasi pirmos eilutės skaičiai, išskyrus 27 ir 189. Taigi gauname 8 daliklius. Dar liko pasižiūrėti atvejį $d = 7k$. Tada dalikliai yra

1	3	7	9	21	63
7	21	49	63	147	441,

tik antroje eilutėje jau trys nauji: 49, 147, 441.
Taip pat ne mažiau kaip 12 daliklių gausime, jeigu 2 pakeisime bet kokiu pirminiu, nelygiu 3 ar 5.
Vadinasi, skaičius n gali turėti mažiausiai 8 daliklius.
Kitaip sakant, skaičius n gali turėti 6 arba 8 daliklius, bet negali turėti 7 daliklių.
Siūlome skaitytojui patyrinėti, kokias dar reikšmes galėtų įgyti skaičiaus n daliklių skaičius.

K22. E 20

! Iš pradžių suskaičiuokime, kiek yra žetonų, sunumeruotų numeriais 1, 2, 3. Jeigu į viršų atsuksime skaičių 1, tai apačioje gali stovėti 2, 3 arba 3, 2. Vadinasi, galimi tik 2 žetonai, jeigu jau pasirinktos 3 konkrečios spalvos. Reikia suskaičiuoti, keliais būdais galima *pasirinkti* 3 spalvas iš 5 galimų.



Tai tas pat, kas suskaičiuoti, keliais būdais galima *atmesti* 2 spalvas iš 5. O tai vėl tas pats, keliais būdais galima *pasirinkti* 2 spalvas iš 5.
Sunumeruokime spalvas: 1, 2, 3, 4, 5. Tada dvi spalvas galima pasirinkti taip:

12	13	14	15
	23	24	25
		34	35
			45

Vadinasi, yra 10 spalvų pasirinkimo būdų. (Galima skaičiuoti ir be lentelės. Pirmą spalvą galima pasirinkti 5 būdais, antrą — keturiais. Vadinasi, dvi spalvas galima pasirinkti $5 \cdot 4 = 20$ būdų. Bet vieną spalvą vadinome pirma, kitą — antra, todėl iš tikrųjų būdų yra dvigubai mažiau: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.)
Kadangi pasirinkti 3 spalvas iš 5 yra 10 būdų, o tas 3 spalvas pasirinkus galima pagaminti 2 skirtingus žetonus, tai iš viso remiantis daugybos taisykle galima pagaminti $10 \cdot 2 = 20$ skirtingų žetonų.
Teisingas atsakymas **E**.

K23. Ⓓ Ketvirtadienis

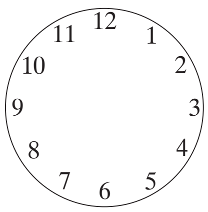
? Atsakymus tikrinti labai lengva. Pradėkime nuo **C**. Jeigu 20 d. buvo trečiadienis, tai 17 d. buvo sekmadienis, ir mėnesio sekmadieniai buvo 3 d., 10 d., 17 d., 24 d., 31 d. — trys nelyginiai sekmadieniai. Matome, kad pirmyn eiti rizikinga, tikriname atsakymą **B**. Jeigu 20 d. buvo antradienis, tai 18 d. buvo sekmadienis, bet tada sekmadieniai buvo 4, 11, 18, 25 d. — iš viso tik keturi.
Taigi apsirikome — rizikinga eiti atgal. Eikime pirmyn. Jeigu 20 d. buvo ketvirtadienis, tai 23 d. buvo sekmadienis, taigi sekmadieniai buvo 2, 9, 14, 23, 30 d. — trys lyginiai.
Renkamės atsakymą **D**.

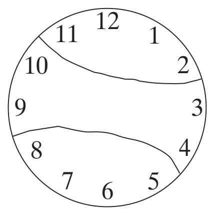
! Mėnesyje daugiausiai gali būti 5 sekmadieniai, ir tai tik tada, jeigu sekmadienis yra mėnesio 1, 2 arba 3 diena. Jeigu I sekmadienis mėnesio 1 d., tai II — 8 d., III — 15 d., IV — 22 d., V — 29 d. Kadangi mėnuo daugiausiai gali turėti 31 d., tai daugiau kaip 5 sekmadieniai nebūna. Maža to, sekmadieniai kaitaliojasi — po lyginio (lyginės mėnesio dienos) eina nelyginis, po nelyginio — lyginis. Todėl pirmas mėnesio sekmadienis turi būti lyginė mėnesio diena. Jeigu jis išpuola 2 d., tai paskutinis išpuola 30 d., bet jeigu jis išpuola 4 d., tai penkių sekmadienių tą mėnesį nebebūna. Vadinasi, sekmadieniai buvo 2, 16 ir 30 d. Kadangi 16 d. buvo sekmadienis, tai 17 d. — pirmadienis, o kadangi $20 - 17 = 3$ ir 4 (ketvirtadienis) $-$ 1 (pirmadienis) $= 3$, tai 20 d. buvo ketvirtadienis.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Nustatėme, kad 3 sekmadieniai lyginiai būna tik tais mėnesiais (išskyrus vasarį), kurie prasideda šeštadieniu.
O dabar — uždavinėlis skaitytojui: *kiek daugiausiai būna mėnesių per metus su trimis lyginiais sekmadieniais?*

K24. Ⓐ 12 ir 3 nėra toje pačioje dalyje

? Kadangi visų ciferblato skaičių suma lygi $1 + 2 + \cdots + 12 = 78$, tai kiekvienos dalies skaičių suma lygi 26.
Jeigu (**E**) 2, 11 ir 9 yra toje pačioje dalyje, tai joje yra ir 10. Kadangi atskirai 10 negali sudaryti vienos iš 3 dalių, tai 10 irgi priklauso tai daliai — per daug.
Jeigu (**D**) 11, 1 ir 5 toje pačioje dalyje, tai 12 priklauso tai daliai — per daug.
Jeigu (**C**) 7 ir 5 yra toje pačioje dalyje, tai joje dar yra ir 6. Kadangi $7 + 6 + 5 = 18$, tai dar trūksta 8. Vadinasi, reikia sudaryti sumą 8 iš dėmenų $1 + 2 + 3 + 4$. Tai įmanoma tik atmetus 2, bet tada dvejetas izoliuojamas į atskirą dalį.
Jeigu (**B**) 8 ir 4 yra toje pačioje dalyje, tai joje yra ir 7, 6, 5 — per daug.
Renkamės atsakymą **A**.





?? Įrodykime, kad 12 ir 3 nėra toje pačioje dalyje. Tarp 12 ir 3 yra 1 ir 2, todėl jeigu 12 ir 3 vienoje dalyje, tai joje yra ir 1, ir 2. Gauname 18, ir iki 26 trūksta 8. Kadangi 1, 2, 3 jau užimti, tai sumą 8 gali duoti tik pats skaičius 8. Bet tada tarp skaičų 3 ir 8 lieka 4, 5, 6, 7, kurių neužtenka gauti 26.

! Iš tikrųjų įrodėme tik tiek: jeigu pavyko ciferblato skaičius padalyti į 3 dalis, kurių kiekvienos skaičių suma lygi 26, tai 12 ir 3 nėra vienoje dalyje. Reikia įrodyti, kad toks padalijimas iš tikrųjų įmanomas. Bet tam užtenka imti $12 + 11 + 1 + 2$, $10 + 1 + 3 + 4$ ir $8 + 7 + 6 + 5$.
Teisingas atsakymas **A**.

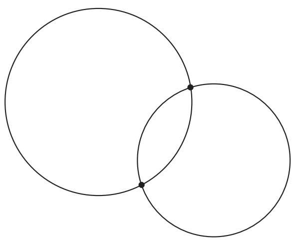
!! Tarkime, kad padalijome ciferblatą į 3 dalis, kurių kiekvienoje esančių skaičių suma lygi 26. Kadangi ciferblate yra tik viena netolydi vieta (kur po 12 eina 1), tai bent viena dalis bus sudaryta iš paeiliui einančių skaičių. Vadinasi,

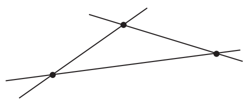
$$k + (k+1) + \cdots + (k+m) = 26,$$
$$\frac{(2k+m)(m+1)}{2} = 26,$$
$$(2k+m)(m+1) = 52.$$

Kadangi $2k \geqslant 2$, tai $(2+m)(m+1) \leqslant 52$, todėl $m \leqslant 5$.
Dabar:
jeigu $m = 1$, tai kairė pusė dalijasi tik iš 2, o dešinė — iš 4;
jeigu $m = 2$, tai kairė pusė dalijasi iš 3, o dešinė — ne;
jeigu $m = 3$, tai $2k + 3 = 13$, $k = 5$;
jeigu $m = 4$, tai kairė dalijasi iš 5;
jeigu $m = 5$, tai kairė dalijasi iš 3.
Vadinasi, tinka tik $m = 3$, $k = 5$, t. y. sudaryta iš paeiliui einančių skaičių grupė yra $5 + 6 + 7 + 8$.
Dabar aišku, kad į grupę, kurioje yra 9, reikia imti ir 10 — kitaip $9 + 4 + 3 + 2 + 1 = 19$ dar per mažai, o $19 + 12$ — jau per daug.
Kai paimame 9 ir 10, trūksta 7, o tai galima padaryti tik paėmus 4 ir 3. Likusi grupė $11+12+1+2$, žinoma, taip pat duoda 26.
Įrodėme, kad vienintelis būdas padalyti ciferblato skaičius į tris dalis taip, kad sumos būtų lygios, yra nurodytasis.

K25. Ⓑ 17

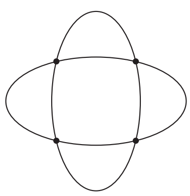
? „Jaučiame“, kad du apskritimai gali turėti daugiausiai du bendrus taškus.

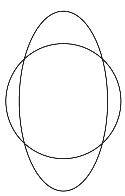


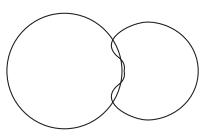


Taip pat aišku, kad trys tiesės daugiausiai kertasi trijuose taškuose.
Kadangi tiesė gali kirsti apskritimą daugiausiai dviejuose taškuose, tai tiesė gali kirsti 2 apskritimus daugiausiai 4 taškuose. Vadinasi, 3 tiesės gali kirsti 2 apskritimus daugiausiai dvylikoje taškų.
Iš viso gauname $12 + 3 + 2 = 17$ taškų.
Renkamės atsakymą **B**.

! Įrodysime, kad 2 apskritimai gali turėti tik 2 susikirtimo taškus.
Beje, jei „apskritimai“ ištempti, tai iš karto gauname daugiau susikirtimo taškų:

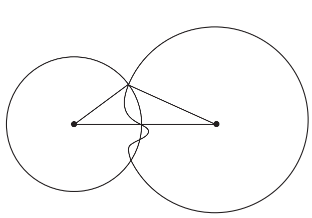


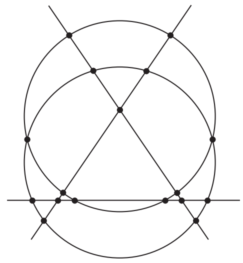




Vadinasi, samprotaujant neabejotinai teks remtis apskritimo apibrėžimu.
Taigi tarkime, kad du apskritimai turi bent 3 bendrus taškus. Jeigu apskritimai turi bendrą centrą, tai jie arba sutampa, arba neturi bendrų taškų. Vadinasi, apskritimų centrai skirtingi. Dabar, jeigu

turėtume bent 3 bendrus taškus, tai turėtume bent 3 lygius trikampius, kurių visos kraštinės lygios: dvi iš jų yra apskritimų sipnduliai, o trečia — atkarpa, jungianti tuos du centrus. Bet aišku, kad nuo centrų linijos galima nubrėžti tik du tokius vienodo didumo trikampius — į viršų ir į apačią.

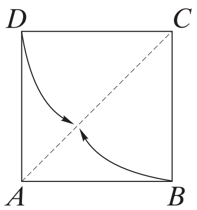


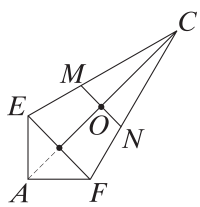


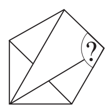
Tai, kad tiesė kerta apskritimą daugiausiai dviejuose taškuose, įrodėme uždavinio B28 sprendime. Vadinasi, daugiausiai gali būti 17 taškų. Brėžinys rodo, kad 17 taškų tikrai gali būti.
Teisingas atsakymas **B**.

K26. (D) 112,5°

? Žinoma, pavojinga pasitikėti brėžiniu ir matuoti ieškomą kampą matlankiu (juo labiau, kad brėžinys gali būti tyčia iškraipytas). Vis dėlto, jeigu pamatavę gauname apie 113°, tai įmanoma iš karto rinktis 112,5°.
Renkamės atsakymą **D**.







! Matome, kad paskutinis lenkimas nebedaro įtakos atsakymui: užlenktas trikampis yra gauto penkiakampio viduje. Todėl mums reikia rasti $\angle MNF$, kur $MN \parallel EF$ ir eina per tašką O, dalijantį AC pusiau. Bet $\angle C = 45°$, trikampis MNC lygiašonis, $\angle MNC = 135° : 2 = 67{,}5°$. Todėl $\angle MNF = 112{,}5°$.

K27. (C) 299

! Pažymėkime Tomo parašytą skaičių n. Tada antras mokinys parašė $n+1$, trečias $2(n+1)$, ketvirtas $4(n+1)$ ir t. t. Vadinasi, jeigu Petras buvo buvo k-tasis mokinys, tai jis parašė $2^{k-2}(n+1)$. Gauname lygtį:

$$2^{k-2}(n+1) = 1000.$$

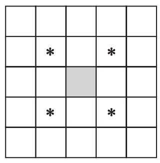
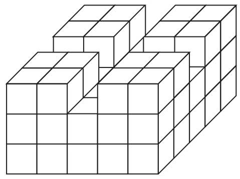
Kadangi 1000 dalijasi tik iš 2^3, tai $k-2 \leqslant 3$, $k \leqslant 5$. Jeigu $k = 5$, tai $n = 125 - 1 = 124$. Jeigu $k = 4$, tai $n = 250 - 1 = 249$. Jeigu $k = 3$, tai $n = 500 - 1 = 499$. Jeigu $k = 2$, tai $n = 1000 - 1 = 999$. Vadinasi, mūsų lygtyje iš nurodytų atsakymų negali būti tik $n = 299$.
Renkamės atsakymą **C**.

!! Įdomu nustatyti, kiek gi buvo mokinių. Iš karto atrodo, kad iš sąlygos išplaukia, jog Petras buvo paskutinis. Jeigu po Tomo prie lentos prieidavo „mokiniai“, tai Petras buvo ketvirtas, na, gal trečias, bet tik ne antras. Vadinasi, jis negalėjo parašyti 999.
Išeitų, kad Petras negalėjo parašyti nei 299, nei 999. Bet įdėmiau paskaičius sąlygą suvokiame, kad visiškai nebūtinai Petras buvo paskutinis: galėjo būti, kad mokinių buvo daugiau, jie galėjo įrašyti tuos skaičius ir prieš Petrą, ir po Petro, o Petras galėjo būti ir antras (po Tomo), ir trečias, ir t. t.

Taigi vėl grįžtame prie vienintelio skaičiaus, kurio Petras parašyti negalėjo: 299.
Teisingas atsakymas **C**.

K28. Ⓔ 24

! Panagrinėkime išorinę sieną.

Tik vieną uždažytą sieną turės kubeliai, pažymėti žvaigždute. Visų kitų bus uždažytos bent dvi sienos. Gauname, kad išorėje bus $4 \cdot 6 = 24$ kubeliai, tenkinantys sąlygą.
Kubeliai, esantys viduje, turės po dvi nudažytas sienas. Tai nesunku matyti iš paveikslėlio, vaizduojančio kubą be viršutinio sluoksnio.
Teisingas atsakymas **E**.

K29. Ⓒ 66 660

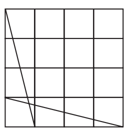
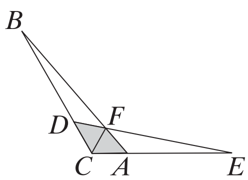
! Keturženklį skaičių galima sudaryti $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdais. Iš jų pirmoje vietoje 6 kartus stovės vienetas, 6 kartus — dvejetas, 6 kartus — trejetas ir 6 kartus — ketvertas. Tas pats bus kiekviename skyriuje, taigi gausime

$$6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 1000 + 6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 100 + 6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 10 + \\ + 6 \cdot (1+2+3+4) = 10 \cdot 6666 = 66\,660.$$

Teisingas atsakymas **C**.

K30. Ⓓ $\frac{2S}{5}$

? Atspėti atsakymą nesunku, languotame popieriuje nubraižius stačiuosius trikampius. Tada matome, kad $S = 2$ (langeliai), o atsakymai virsta 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$. Bet iš karto matyti, jog keturkampio plotas didesnis už $\frac{1}{2}$ langelio ir mažesnis už visą.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi $\triangle ABC = \triangle DEC$, tai $\angle FDC = \angle FAC$, o tada lygūs ir papildantys juos iki 180° kampai EAF ir BDF. Tada trikampiai EAF ir BDF lygūs pagal kraštinę $AE = BD = 3$ ir du kampus prie jos. Vadinasi, $FA = FD$, o tada trikampiai FAC ir FDC lygūs pagal tris kraštines. Kadangi $S_{FAC} : S_{FAE} = 1 : 3$, tai $S_{FACD} : S_{FAE} = 2 : 3$. Vadinasi, keturkampio $FACD$ plotas sudaro $\frac{2}{5}$ trikampio CED ploto, taigi lygus $\frac{2S}{5}$.
Teisingas atsakymas **D**.