JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. D 48

Žr. uždavinio K5 sprendimą.

J2. A 167

! Mėlynų modeliukų yra $\frac{1}{2} \cdot 2004 = 1002$, raudonų $\frac{1}{2} \cdot 1002 = 501$, žalių $\frac{1}{3} \cdot 1002 = 334$. Kitų spalvų modeliukų yra $2004 - 1002 - 501 - 334 = 1002 - 501 - 334 = 501 - 334 = 201 - 34 = 200 - 33 = 167$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Mėlynų, raudonų ir žalių modeliukų dalys sudaro $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2}{12} = \frac{11}{12}$, todėl kitų spalvų modeliukų dalis yra $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$. Vadinasi, kitų spalvų modeliukų yra $2004 : 12 = 501 : 3 = 167$.

J3. C 12

! Piramidė turi 7 sienas — viena iš jų pagrindas, kitos 6 — šoninės sienos. Todėl „šoninių“ briaunų ji turi šešias, o pagrindo briaunų — taip pat šešias.
Teisingas atsakymas **C**.

J4. E 1:200

! Pagrindo perimetras yra $2(40 + 60) = 200$ m. Plane jis lygus 1 m. Todėl plano mastelis yra 1:200.
Teisingas tik atsakymas **E**.

J5. D 11

! Nesunku sudaryti lygtis. Tomo monetų skaičių pažymėkime T, Romo — R. Tada pagal sąlygą $T + 5 = 2R$, $2(T + 5 - 12) = R$. Vadinasi, $T + 5 = 4(T + 5 - 12)$, $3(T + 5) = 4 \cdot 12$, $T + 5 = 16$, $T = 11$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Spręskime uždavinį „nuo galo“. Sakykime, kad senelei jau atiduota 12 monetų. Aišku, kad jos dabar sudaro $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Romo monetų. Vadinasi, Romas dabar turi $12 : \frac{3}{2} = 8$ monetas, Tomas 4 monetas. Prieš atiduodamas senelei 12 monetų, jis turėjo 16 monetų, o prieš gaudamas 5 monetas iš senelio — turėjo 11 monetų.

J6. D 65°

! Kadangi $\angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$, tai $\triangle ABC$ lygiašonis. Todėl $CA = CB = AD$. Vadinasi, ir $\triangle CAD$ lygiašonis, $\angle ACD = \angle ADC = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$.
Teisingas atsakymas **D**.

J7. A 11

? Jei baravykų būtų daugiau kaip 11, tai paėmus tik tuos baravykus tikrai nebūtų raudonviršių. Vadinasi, baravykų yra $\leqslant 11$, taigi tinka tik vienas atsakymas.
Renkamės atsakymą **A**.

! Kadangi tarp 12 grybų būtinai yra bent 1 raudonviršis, tai baravykų yra $\leqslant 11$. Kadangi tarp 20 grybų yra bent 1 baravykas, tai raudonviršių yra $\leqslant 19$. Bet kadangi krepšyje yra 30 grybų, tai baravykų yra 11, o raudonviršių — 19 (kitaip grybų būtų mažiau nei 30).
Teisingas atsakymas **A**.

J8. A 2002^2

Užtušuotos dvi „įstrižainės“ po 2003 langelius, bet vienas langelis bendras, todėl užtušuoti $2 \cdot 2003 - 1$ langeliai. Vadinasi, neužtušuotų langelių yra $2003^2 - (2 \cdot 2003 - 1) = (2003 - 1)^2 = 2002^2$. Teisingas atsakymas **A**.

J9. D 5

Sakykime, kad juodojo skritulio spindulys r, tada jo plotas πr^2. Baltojo žiedo r, pilkojo — taip pat r, todėl pilkojo žiedo išorinio apskritimo spindulys $3r$, o vidinio — $2r$. Pilkojo žiedo plotas lygus dviejų ką tik paminėtų apskritimų apribotų plotų skirtumui $\pi(3r)^2 - \pi(2r)^2 = 5\pi r^2$. Todėl pilkojo žiedo plotas už juodojo skritulio plotą didesnis 5 kartus.
Teisingas atsakymas **D**.

J10. D 198

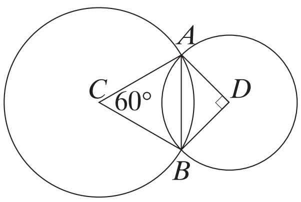
Iš sąlygos aišku, kad kiekvieniems Onos 9 riešutams Irenai teko 12 riešutų, o Natalijai teko 14. Vadinasi, jauniausia iš mergaičių buvo Ona, ir jai teko $\frac{9}{9+12+14} = \frac{9}{35}$ visų riešutų. Taigi Onai atiteko $770 \cdot \frac{9}{35} = 110 \cdot \frac{9}{5} = 22 \cdot 9 = 198$ riešutai.
Teisingas atsakymas **D**.

Galima apsieiti ir be trupmenų. Matėme, kad iš 35 riešutų Onai tenka 9. Bet 770 yra daugiau už 35 lygiai 22 kartus, todėl iš viso Onai atiteko $9 \cdot 22 = 180 + 18 = 198$ riešutai.

J11. C 256
Žr. uždavinio K17 sprendimą.

J12. B $\sqrt{2}$

Kadangi AC ir CB — apskritimo spinduliai, tai $AC = CB$, ir $\angle CAB = \angle CBA = 60^\circ$.



Vadinasi, $\triangle ABC$ lygiakraštis, ir $AB = AC$. Bet $AB^2 = AD^2 + DB^2 = 2AD^2$, ir $AB = \sqrt{2}AD$. Todėl $AC/AD = AB/AD = \sqrt{2}$.
Teisingas atsakymas **B**.

J13. D 42
Žr. uždavinio K10 sprendimą.

J14. C 3 cm

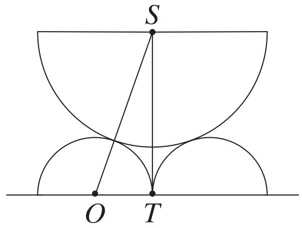
Vanduo į mažesnį indą nustos tekėti, kai jo lygis didžiajame inde (aplink mažąjį) bus 7 cm. Didžiajame inde likusio vandens tūris bus $(200 - 100)7 = 700\,\text{cm}^3$. Vadinasi, į mažąjį indą bus sutekėję $300\,\text{cm}^3$ vandens. Kadangi mažojo indo pagrindo plotas $100\,\text{cm}^2$, tai vandens lygis jame bus 3 cm.
Teisingas atsakymas **C**.

J15. E 1:24

Per 12 h valandinės rodyklės galiukas apsisuka vieną kartą ir nueina kelią $2\pi \cdot 4$ cm; todėl per 3 h jis nueis kelią 2π cm. Minutinės rodyklės galiukas per 3 h apsisuks 3 kartus ir nueis kelią $3 \cdot 2\pi \cdot 8$ cm. Taigi jų kelių santykis yra 1:24.
Teisingas atsakymas **E**.

J16. Ⓑ $\sqrt{32}$

Pagal Pitagoro teoremą $ST^2 = OS^2 - OT^2 = (2+4)^2 - 2^2 = 6^2 - 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$, todėl $ST = \sqrt{32}$.
Teisingas atsakymas **B**.



J17. Ⓓ 5

Pažymėkime x skaičių klausimų, į kuriuos Jonas atsakė teisingai, o y — į kuriuos neteisingai. Tada

$$7x - 2y = 87. \tag{1}$$

Užrašę šią lygtį kaip $7x = 84 + 3 + 2y$, matome, kad nelyginis skaičius $3 + 2y$ turi dalytis iš 7, t. y. $3 + 2y = 7, 21, 35, \ldots$ Atitinkamai $y = 2, 9, 16, \ldots$ Kai $y = 2$, tai $x = 13$, o kai $y \geqslant 9$, tai $7x = 87 + 2y \geqslant 105$, $x \geqslant 15$ ir suma $x + y$ per didelė. Vadinasi, lieka vienintelis variantas, ir Jonas neatsakinėjo į $20 - x - y = 20 - 13 - 2 = 5$ klausimus.
Teisingas atsakymas **D**.

Galima lygtį (1) spręsti ir kiek kitaip. Kadangi $x + y \leqslant 20$, tai $2y = 7x - 87$, $9y = 7(x + y) - 87 \leqslant 140 - 87 = 53$, ir $y \leqslant 5$. Dabar vėl $7x = 7 \cdot 12 + 3 + 2y$, $3 + 2y$ dalijasi iš 7 ir nelyginis, todėl $3 + 2y = 7$, $y = 2$, $6x = 13$.

J18. Ⓒ 4

(Plg. uždavinio K4 sprendimą). Iš pradžių lentelė pildoma vienareikšmiškai (žr. paveikslėlį).

1	2	•	
2	1		
4	3	•	
3	4		

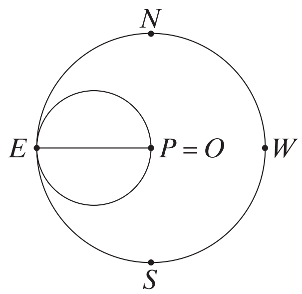
Dabar užpildyti pirmos eilutės trečią langelį galima skaičiumi 3 arba skaičiumi 4 — du būdai. Po to pirma ir antra eilutės užpildomos vienareikšmiškai. Lygiai taip pat trečios eilutės trečias langelis nepriklausomai užpildomas dviem būdais — skaičiumi 1 arba 2, o likusieji langeliai užpildomi vienareikšmiškai. Vadinasi, yra $2 \cdot 2$ būdai užpildyti lentelę.
Teisingas atsakymas **C**.

J19. Ⓓ 5

Mūsų skaičiai yra pavidalo $2^m \cdot 3^n$, kur $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. Kadangi $2^m < 200$, tai $m \leqslant 7$. Kai $m = 7$, tai $2^7 = 128$, ir tas skaičius tinka. Beje, jei kuris nors iš ieškomų skaičių papuola į intervalą $(100; 200)$, tai padaugintas iš 2 ar 3 jis į intervalą nebepateks (buvo didesnis už 100, todėl taps didesnis už 200).
Kai $m = 6$, tai $2^6 = 64$, ir matome, kad tinka skaičius $2^6 \cdot 3 = 192$.
Kai $m = 5$, tai $2^5 = 32$, ir iš 3 dauginti per mažai, o iš 9 — per daug, taigi reikiamų skaičių nėra.
Kai $m = 4$, tai $2^4 = 16$, ir $2^4 \cdot 3^2 = 144$.
Kai $m = 3$, tai $2^3 = 8$, ir iš 9 dauginti per mažai, o iš 27 — per daug.
Kai $m = 2$, tai $2^2 = 4$ ir $4 \cdot 27 = 108$.
Kai $m = 1$, tai $2 \cdot 81 = 162$.
Kai $m = 0$, tai 3^4 per mažai, o 3^5 — per daug. Turime 5 skaičius.
Teisingas atsakymas **D**.

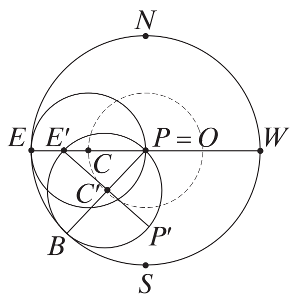
J20. Ⓐ

? Imkime mažojo apskritimo spindulį 1, didžiojo 2. Tada mažojo apskritimo ilgis 2π, o didžiojo 4π.



Tai reiškia, kad mažojo pusapskritimio EP ilgis π lygus didžiojo apskritimo ketvirtadalio ES ilgiui. Vadinasi, mažajam apskritimui riedant lanku ES, taškas P palies didįjį apskritimą taške S, o taškas E užims pradinę taško P padėtį ir bus didžiojo apskritimo centre O. Toliau ridenant mažąjį apskritimą, taškas P simetrišku keliu grįš į senąją padėtį. Dabar aišku, kad taško P trajektorijai priklauso taškai S ir N, bet nepriklauso taškai E ir W. Todėl atkrinta atsakymai **B**, **D** ir **E**. Bet taip pat aišku, kad iš pradinės padėties taško P momentinio greičio vektorius nukreiptas žemyn, o ne į kairę, todėl netinka ir atsakymas **C**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Sakykime, kad po tam tikro laiko riedantis apskritimas lies didįjį taške B, o riedančio apskritimo centras C atsidurs taške C'.



Apskritimo C' susikirtimo su EW tašką pažymėkime E'. Įrodysime, kad naujoje padėtyje taškas E atsidurs taške E'. Tam užtenka įsitikinti, jog didžiojo apskritimo lankas BE lygus apkstitimo C' lankui BE'. Bet tai aišku, nes pagal apskritimo lanko formulę $\ell = R\alpha$ turime $\smile BE = 2\cdot\angle EOB$, $\smile BE' = 1\cdot\angle E'C'B = \angle E'C'B = 2\angle E'OB$, nes apskritimo O' įbrėžtinis kampas $E'OB$ ir centrinis kampas $E'C'B$ remiasi į tą patį lanką BE'.
Dabar per tašką E' išveskime apskritimo C' skersmenį $E'P'$. Kadangi taškas E perėjo į tašką E', tai ir taškui E skersmeniškai priešingas taškas P perėjo į tašką P', o $\angle E'PP' = \frac{\pi}{2}$, nes remiasi į skersmenį.
Taigi kiekviena taško P' padėtis yra skersmenyje NS, statmename skersmeniui EW. Tai ir reiškia, kad taškas P juda skersmeniu NS.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Įsitikinti, kad taškas P juda vertikaliuoju skersmeniu, galima ir koordinačių metodu. Įveskime koordinačių sistemą Oxy, didžiojo apskritimo centrą imkime taške O, o mažojo — taške $C(-1; 0)$, lietimosi taškas bus $E(-2; 0)$. Sakykime, kad taško C' koordinatės $(x_0; y_0)$, o taško P' koordinates pažymėkime $(x; y)$. Kadangi $C'O = 1$, tai $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Taškas P' yra apskritime su centru C', todėl $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 1$. Pagaliau, taškai O ir E' simetriški atžvilgiu tiesės $x = x_0$, einančios per C' statmenai skersmeniui EW, todėl taško E' koordinatės yra $(2x_0; 0)$. Kadangi $E'P' = 2$ kaip apskritimo skersmuo, tai $(x-2x_0)^2+y^2=4$. Gavome trijų lygčių sistemą

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1, \quad (x-2x_0)^2+y^2=4, \quad x_0^2+y_0^2=1.$$

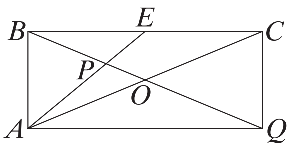
Išspręsti ją nesunku. Iš pirmos lygties atėmę antrą ir pridėję trečią, gauname

$$\begin{aligned}
&2xx_0-2x_0^2-2yy_0+2y_0^2=-2,\\
&y_0(y-y_0)=xx_0+1-x_0^2,\\
&y_0(y-y_0)=xx_0+y_0^2.
\end{aligned}$$

Eliminuokime y. Pakėlę paskutinę lygtį kvadratu, turime $y_0^2(y-y_0)^2=(xx_0+y_0^2)^2$, o iš sistemos pirmos lygties $y_0^2(x-x_0)^2+y_0^2(y-y_0)^2=y_0^2$. Vadinasi, $y_0^2(x-x_0)^2+(xx_0+y_0^2)^2=y_0^2$, $y_0^2x^2-2xx_0y_0^2+x_0^2y_0^2+x^2x_0^2+2xx_0y_0^2+y_0^4=y_0^2$, $x^2(x_0^2+y_0^2)+y_0^2(x_0^2+y_0^2)=y_0^2$, ir pakeitę $x_0^2+y_0^2$ vienetu, gauname $x^2=0$. Taigi taško P abscisė bet kurioje padėtyje lygi 0, o tai ir reiškia, kad taškas P juda skersmeniu SN.

J21. Ⓑ 6

! Kadangi AE ir BO yra $\triangle ABC$ pusiaukraštinės, tai įstrižainės BQ pusė BO ilgesnė už PO tris kartus. Todėl įstrižainė 6 kartus ilgesnė už PO.



Teisingas atsakymas **B**.

J22. Ⓒ $(a-b)^2$

! Kadangi a ir b skirtingų ženklų, tai $ab<0$, ir iš reiškinių

$$\begin{aligned}
&(|a|-|b|)^2=a^2-2|ab|+b^2=a^2+2ab+b^2,\\
&(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\\
&(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\\
&a^2+b^2
\end{aligned}$$

didžiausias yra $a^2-2ab+b^2$. Bet jis didesnis ir už $|a^2-b^2|$, nes $|a^2-b^2|\leqslant a^2+b^2$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima nesiremti modulių nelygybe, o pastebėti, kad $|a^2-b^2|\leqslant a^2+b^2$, nes $ba\neq 0$, ir $|a^2-b^2|^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4\leqslant a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2$.

J23. Ⓑ 72

! Kadangi dvylikakampio kraštinės lygios, tai jo kraštinės ilgis yra 3. Kvadrato kraštinę sudaro atkarpa, kurios ilgis $3\sqrt{2}$, ir dvi atkarpos, kurių kiekvienos ilgis lygus $\frac{3}{\sqrt{2}}$, todėl kvadrato kraštinė lygi $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, o plotas 72.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Dvylikakampį sudaro 5 kvadratėliai, kurių kraštinės ilgis yra 3. Iš neužtušuotų trikampių galima sudėti dar 3 tokius kvadratėlius. Taigi kvadrato plotas lygus $8\cdot 3^2=72$.

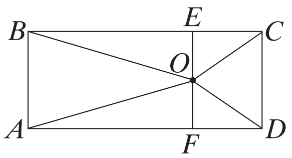
J24. Ⓐ 42

? Reikia patikrinti skaičius n (nuo 100 iki 199). Kadangi $98 = 7 \cdot 14$, tai sandaugos $101 \cdot 102 \cdot 103$ nė vienas dauginamasis nesidalija iš 7, ir $n = 100$ netinka. Netinka ir 101, o 102 tinka, nes $n+3 = 102+3 = 105$ dalijasi iš 7. Tinka ir 103, nes $103+2$ dalijasi iš 7, tinka ir 104, nes $104+1$ dalijasi iš 7. Netinka 105, 106, 107, 108. Vėl tinka 109 (nes $109+3 = 112$), 110, 111, bet netinka 112, 113, 114, 115. Matome, kad tinka 102, 103, 104, 109, 110, 111, … . Vadinasi, periodas 7, ir tinka 102, 103, 104, …, 193, 194, 195. Kadangi nuo 102 iki $102 + 91$ imant kas septintą skaičių yra 14, tai — išrašyta 14 trejetų, o tai yra 42 skaičiai.
Renkamės atsakymą **A**.

! Jeigu n dalijamas iš 7 duoda liekaną 6, tai $n + 1$ dalysis iš 7. Jei liekana 5, tai $n + 2$ dalysis iš 7. Jei liekana 4, tai $n+3$ dalysis iš 7. Jei liekana 3, tai nei $n+1$, nei $n+2$, nei $n+3$, nesidalija iš 3. Taip pat jei liekana 2, 1 ar 0, duotasis reiškinys nesidalija iš 7. Vadinasi, pavidalo $7k + 6$ skaičiai tinka, tik jie turi būti nuo 100 iki 199. Raskime, kiek jų yra: $100 \leqslant 7k + 6 \leqslant 199$, $94 \leqslant 7k \leqslant 193$, todėl $14 \leqslant k \leqslant 27$. Vadinasi, tokių skaičių yra tiek pat, kiek nuo 1 iki 14 (atėmėme po 13), t. y. 14. Lygiai taip pat po 14 yra pavidalo $7k + 5$ ir pavidalo $7k + 4$ skaičių. Vadinasi, iš viso tinkamų skaičių yra $3 \cdot 14 = 42$.
Teisingas atsakymas **A**.

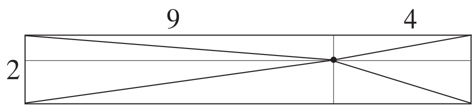
J25. Ⓐ 4, 5, 8, 9

! (Plg. su uždavinio S22 sprendimu.) Nuleiskime statmenis iš bendros trikampių viršūnės į stačiakampio pagrindus.



Tada $S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}BC \cdot OE + \frac{1}{2}AD \cdot OF = \frac{1}{2}BC(OE + OF) = \frac{1}{2}BC \cdot AB$. Vadinasi, šių dviejų trikampių plotų suma lygi pusei stačiakampio ploto. Bet tada ir kitų dviejų trikampių plotų suma tokia pat. Todėl norint atsakyti į uždavinio klausimą visų pirma reikia patikrinti, ar galima sudaryti dvi lygių plotų poras. Tai lengva padaryti atveju **A**: $4 + 9 = 5 + 8$. Nesunku įsitikinti, kad kitais atvejais to padaryti nepavyksta: atveju **B** ir **E** visų keturių skaičių suma nelyginė, atveju **C** suma lygi 30, bet dviejų dėmenų sumos 15 surinkti nepavyksta; atveju **D** suma lygi 52, bet ir vėl dviejų dėmenų suma nelygi 26.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Gal ir be reikalo sprendimas **!** nepavadintas spėjimu **?**, nors nesunku būtų padaryti jį visiškai griežtą — tereikia nurodyti pavyzdį, kad tokios plotų reikšmės įmanomos. Kadangi bendras trikampių plotas turi būti $4 + 5 + 8 + 9 = 26$, tai stačiakampio kraštines imame 2 ir 13.



Dabar ilgesniąją kraštinę dalijame santykiu 9 : 4, o trumpesniąją santykiu 5 : 8 ir išvedame per tuos taškus statmenis. Statmenų susikirtimo tašką sujungę su viršūnėmis, įsitikiname, kad gautų 4 trikampių plotai lygūs 9, 4, $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 2 \cdot \frac{5}{13} = 5$ ir $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 2 \cdot \frac{8}{13} = 8$.

J26. Ⓔ M ir T

Žr. uždavinio M24 sprendimą.

J27. (A) 16

! Nesunku suvokti, kad vienetas prie 120 nario bus pridėtas tiek kartų, kiek jis turi daliklių. Suskaičiuokime. Kadangi $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, tai išrašyti visus daliklius paprasta:

1	2	4	8
3	6	12	24
5	10	20	40
15	30	60	120

Turime 16 daliklių, todėl po 120 žingsnių prie 120 nario 1 bus pridėtas 16 kartų, o po to prie jo vienetai pridedami nebebus. Vadinasi, 120-tas narys sekoje bus lygus 16.
Teisingas atsakymas **A**.

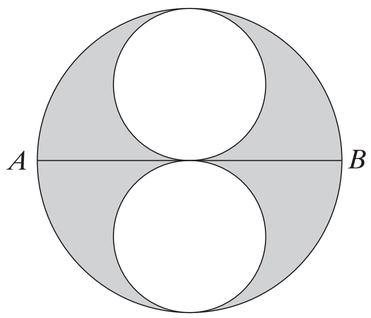
!! Daugiklių galima ir neišrašinėti, o jų skaičių nustatyti nesunku remiantis kombinatorine daugybos taisykle. Kadangi $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, tai daliklį sudaryti — reiškia paimti kažkiek dvejetų, kažkiek trejetų ir kažkiek penketų. Dvejetus paimti galima 4 būdais (imti 0, 1, 2 arba 3), trejetus — 2 būdais, penketus — 2 būdais. Vadinasi, sudaryti daliklį galima $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ būdų.

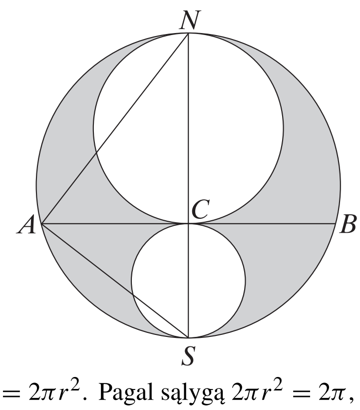
J28. (B) 35

! Paprasčiausia suskaidyti uždavinį pagal lygybės $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ kairėje ir dešinėje esančių sumų reikšmę.
Jeigu sumos lygios 4, tai turime 1 skaičių, visi skaitmenys vienetai.
Jeigu sumos lygios 3, tai ir kairėje, ir dešinėje turime 1 nulį (kiti vienetai). Kairėje jį galima pasirinkti 3 būdais (a_3, arba a_5, arba a_7), dešinėje — 4 būdais. Pagal sandaugos taisyklę gauname $3 \cdot 4 = 12$ skaičių.
Jeigu sumos lygios 2, tai ir kairėje, ir dešinėje turime po du nulius. Kairėje antrą vienetą galima pasirinkti 3 būdais, o dešinėje du nulius galima pasirinkti 6 būdais (išrašome indeksus): 24, 26, 28, 46, 48, 68. Gauname $3 \cdot 6 = 18$ skaičių.
Jeigu sumos lygios 1, tai kairėje visi nuliai, o dešinėje vienetą galima pasirinkti 4 būdais — gauname 4 skaičius.
Taigi iš viso turime $1 + 12 + 18 + 4 = 35$ skaičius.
Teisingas atsakymas **B**.

J29. (D) 4

? Imame abu vienodus neužtušuotus skritulius (žr. kairįjį pav.). Jeigu jų spindulius pažymėsime r, tai didžiojo skritulio spindulys $2r$.





Užtušuotas plotas lygus $4\pi r^2 - 2\pi r^2 = 2\pi r^2$. Pagal sąlygą $2\pi r^2 = 2\pi$, $r = 1$, todėl $AB = 4r = 4$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Pažymėkime neužtušuotų skritulių spindulius R ir r, tada didžiojo skritulio skersmuo lygus $2R+2r$, o spindulys $R+r$. Vadinasi, užtušuotas plotas lygus $\pi(R+r)^2 - \pi R^2 - \pi r^2 = 2\pi Rr$. Pagal sąlygą $2\pi Rr = 2\pi$, t. y. $Rr = 1$. Sujunkime tašką A su N ir S (žr. dešinįjį pav.). Kadangi $\angle NAS$ status (remiasi į skresmenį), tai $AC^2 = CN \cdot CS = 2R \cdot 2r = 4Rr = 4$, $AC = 2$, todėl $AB = 4$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Taip pat galima remtis teorema, kad susikertančių stygų atkarpų sandaugos lygios. Tada $AC \cdot CB = NC \cdot CS$, $AC^2 = 4Rr$, $AC^2 = 4$, $AC = 2$, $AB = 4$.

J30. (E) 7348

? Naujojoje sekoje yra tik tie skaičiai, kurie dalijasi arba iš 5, arba iš 11 (arba iš abiejų). Kadangi iš 5 dalijasi kas penktas skaičius, iš 11 — kas vienuoliktas, o iš 55 — kas penkiasdešimt penktas, tai iki skaičiaus n sekoje liks maždaug $\frac{n}{5} + \frac{n}{11} - \frac{n}{55} = \frac{15n}{55} = \frac{3n}{11}$ skaičių. Vadinasi, $\frac{3n}{11} \approx 2004$, $\frac{n}{11} \approx 668$, $n \approx 11 \cdot 668 = 6680 + 668 = 7348$.
Renkamės atsakymą **E**.

! Patikrinkime atsakymą. Dalių iš 5 skaičių iki 7348 yra $\left[\frac{7348}{5}\right] = 1469$, dalių iš 11 yra $\left[\frac{7348}{11}\right] = 668$. Tarp jų yra skaičių, dalių ir iš 5, ir iš 11, ir tuos skaičius jau įskaitėme abu kartus, taigi tą kiekį iš sumos reikės atmesti: $\left[\frac{7348}{55}\right] = \left[\frac{668}{5}\right] = 133$. Vadinasi, iki skaičiaus 7348 imtinai „dalių“ skaičių bus $1469 + 668 - 133 = 1336 + 668 = 2004$.
Beje, 7349 nesidalija nei iš 5, nei iš 11, taigi išbrauktas, o 7350 yra jau 2005-tas sekos narys. Panašiai 7345 yra 2003-as sekos narys.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Nedaug nuo spėjimo **?** skiriasi ir „griežtas“ sprendimas. „Dalių“ skaičių iki n yra $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{11}\right] - \left[\frac{n}{55}\right]$, ir pagal sąlygą $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{11}\right] - \left[\frac{n}{55}\right] = 2004$. Išspręskite šią lygtį. Kadangi $\frac{n}{55} - 1 < \left[\frac{n}{55}\right] \leqslant \frac{n}{55}$, tai

$$
\begin{aligned}
-\frac{n}{55} &\leqslant -\left[\frac{n}{55}\right] < -\frac{n}{55} + 1,\\
\frac{n}{5} - 1 &< \left[\frac{n}{5}\right] \leqslant \frac{n}{5},\\
\frac{n}{11} - 1 &< \left[\frac{n}{11}\right] \leqslant \frac{n}{11}.
\end{aligned}
$$

Sudėję šias tris nelygybes gauname

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{5} + \frac{n}{11} - \frac{n}{55} - 2 < 2004 &< \frac{n}{5} + \frac{n}{11} - \frac{n}{55} + 1,\\
\frac{3n}{11} - 2 < 2004 &< \frac{3n}{11} + 1,\\
3n - 22 < 2004 \cdot 11 &< 3n + 11,\\
n - \frac{22}{3} < 668 \cdot 11 &< n + \frac{11}{3},\\
-668 \cdot 11 - \frac{22}{3} < -n &< -668 \cdot 11 + \frac{11}{3},\\
668 \cdot 11 - \frac{11}{3} < n &< 668 \cdot 11 + \frac{22}{3},\\
668 \cdot 11 - 3 \leqslant n &\leqslant 668 \cdot 11 + 7.
\end{aligned}
$$

Šias vienuolika gautų reikšmių patogiausia tikrinti nuo $n = 668 \cdot 11$. Tada $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{11}\right] - \left[\frac{n}{55}\right] = \left[\frac{668 \cdot 11}{5}\right] + 668 - \left[\frac{668}{5}\right] = \left[\frac{665 \cdot 11 + 33}{5}\right] + 668 - 133 = 133 \cdot 11 + 6 + 535 = 1330 + 133 + 541 = 1463 + 541 = 2004$. Vadinasi, iš karto pataikėme atsakymą.