SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. C $\frac{2mn}{m+n}$

? Užtenka paimti $m = 2$ ir $n = 1$ ir įsitikinti, kad atsakymas $\frac{2\cdot1+1\cdot2}{3} = \frac{4}{3}$ atitinka tik atsakymą **C**: $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1} = \frac{4}{3}$.
Renkamės atsakymą **C**.

! Nė kiek nesunkiau apskaičiuoti vidutinę pieštuko kainą: visi pieštukai kainavo $m \cdot n + n \cdot m = 2mn$, pieštukų pirkta $m + n$, todėl vidutinė jų kaina lygi $\frac{2mn}{m+n}$.
Teisingas atsakymas **C**.

S2. B 17

! Uždavinys — apgaulingas: galime pagalvoti, kad pagrindas — tai ne siena, arba viršūnė — tai tik piramidės viršūnė. O šiaip jau — jeigu piramidė turi 17 sienų, tai šoninių sienų ji turi 16 (ir vadinasi šešiolikakampe piramide), pagrindo viršūnių — 16, taigi iš viso viršūnių — 17.
Teisingas atsakymas **B**.

S3. E $-\sqrt{2004}$

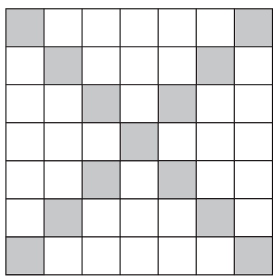
! Ir vėl — svarbiausia neapsirikti: mažiausias realusis skaičius — tai ne moduliu mažiausias realusis skaičius, reikia nepamesti ir neigiamųjų skaičių. O nelygybę išspręsti paprasta: $x^2 \leqslant 2004$, $-\sqrt{2004} \leqslant x \leqslant \sqrt{2004}$.
Mažiausia galima x reikšmė yra $-\sqrt{2004}$.
Teisingas atsakymas **E**.

S4. D 98%

! Sprendžiant procentų uždavinius geriausia pereiti prie „neprocentų", ir tik atsakymą duoti procentais. Sakykime, marsiečių yra M. Tričiuptuviai marsiečiai turi $0{,}01M \cdot 3$ čiuptuvėlių, dvičiuptuviai turi $0{,}97M \cdot 2$, o likusieji turi $0{,}02M \cdot 1$ čiuptuvėlių. Vadinasi, visų Marso gyventojų čiuptuvėlių vidurkis yra $(0{,}03M + 1{,}94M + 0{,}02M) : M = 1{,}99$. Daugiau už šitą vidurkį čiuptuvėlių turi tiek dvičiuptuviai, tiek tričiuptuviai gyventojai — o jų yra $97 + 1 = 98$ procentai.
Teisingas atsakymas **D**.

S5. A $s^2 + 1 - 2s$

! (Plg. su uždavinius J8.) Vienoje įstrižainėje yra s langelių. Kadangi dvi įstrižainės turi vieną bendrą langelį, tai dvi įstrižainės turi $2s - 1$ užtušuotą langelį. Kadangi iš viso langelių yra s^2, tai neužtušuotų langelių yra $s^2 - 2s + 1$.
Teisingas atsakymas **A**.



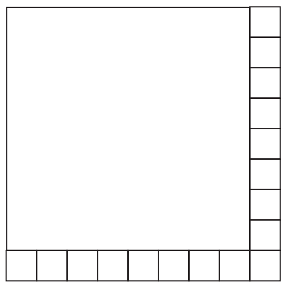
S6. E Daugiau kaip 30

! Skaičiaus n kubas n^3 ir kvadratas n^2 baigiasi tuo pačiu skaitmeniu tada ir tik tada, jei $n^3 - n^2 = n \cdot n(n-1)$ baigiasi nuliu. Aišku, kad šis reiškinys baigsis 0, kai n baigiasi $0, 1, 5, 6$. Vadinasi, kiekviename dešimtuke nuo 10 iki 19, nuo 20 iki 29, $\ldots$, nuo 90 iki 99 yra 4 tokie skaičiai. Iš viso tokių skaičių yra $4 \cdot 9 = 36$.
Teisingas atsakymas **E**.

S7. C 81

? Kvadrato $ABCD$ plotas atsižvelgiant į atsakymus gali būti lygus $25, 49, 81, 100, 225$. Septyniolikos kvadratėlių plotas lygus 17, todėl likusio kvadrato plotas galėtų būti lygus $8, 32, 64, 83, 208$. Kadangi didžiojo ir 17 vienetinių kvadratėlių kraštinės sveikos, tai sveika turėtų būti ir likusiojo aštuonioliktko kvadrato kraštinė. Bet tik 64 galėtų būti to kvadrato plotas (jis juk lygus kraštinės kvadratui). Tada kvadrato $ABCD$ plotas lygus 81.
Renkamės atsakymą **C**.

?? Parodyti, kad tai įmanoma, nesunku (žr. paveikslėlį).



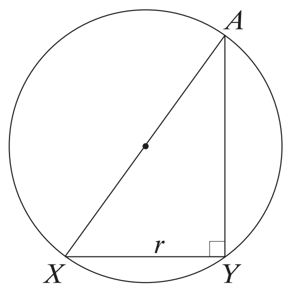
! Spręskime uždavinį griežtai. Kvadrato $ABCD$ plotą pažymėkime x^2, aštuonioliktojo iš jį sudarančių kvadratų plotą y^2. Pagal sąlygą $x^2 - y^2 = 17$. Išspręskime šią lygtį. Jeigu žinotume, kad x ir y sveiki, tai sprendimas paprastas: $(x - y)(x + y) = 1 \cdot 17$, todėl $x - y = 1$, $x + y = 17$, t. y. $x = 9$, $y = 8$.
Įrodykime, kad x ir y sveiki. Jeigu kurią nors kvadrato kraštinę sudaro vienetinių kvadratėlių kraštinės ir 18-to kvadrato kraštinė, tai į priešingą kvadrato kraštinę neįeina 18-to kvadrato kraštinė, taigi ją sudaro tik vienetinių kvadratėlių kraštinės. Vadinasi, x — sveikasis skaičius. Bet panašiai prie 18-to kvadrato kraštinės, kurios ilgis y, prigludę vienetinių kvadratėlių kraštinės, todėl jos ilgis taip pat sveikas. Tai ir reikėjo įrodyti.
Teisingas atsakymas **C**.

S8. C 84

! Kadangi keturiolikakampis taisyklingas, tai aplink jį galima apibrėžti apskritimą. Tada visų stačiųjų trikampių, kurių viršūnės yra 14-kampio viršūnės, įžambinės bus to apskritimo skersmenys. Tokių skersmenų yra 7. Su ta pačia įžambine galima nubrėžti 12 stačiųjų trikampių (nes atmetame dvi viršūnes, kurias jungia skersmuo). Taigi iš viso yra $7 \cdot 12 = 84$ statieji trikampiai.
Teisingas atsakymas **C**.

S9. E M ir T

Žr. uždavinio M24 sprendimą.

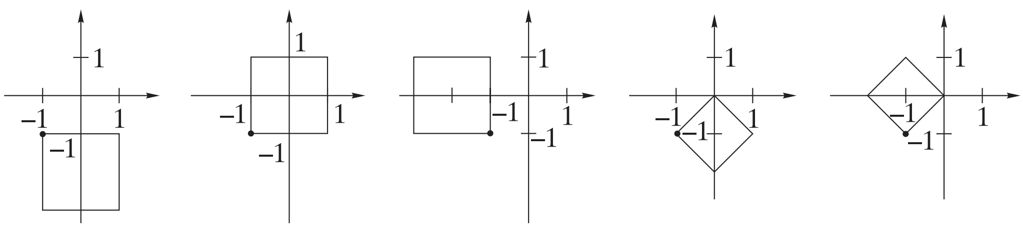


S10. B 30

! Sujungiame A ir X. Kadangi $\angle AYX = 90°$, tai AX — skersmuo, $AX = 2r$, $\sin\angle XAY = r : 2r = 1/2$, todėl $\angle XAY = 30°$.
Teisingas atsakymas **B**.

S11. D 5

? Kai kvadrato simetrijos ašys eina lygiagrečiai kvadrato kraštinėms, randame tris kvadratus:



Bet simetrijos ašys taip pat gali būti kvadrato įstrižainės. Tada randame dar du kvadratus.
Renkamės atsakymą **D**.

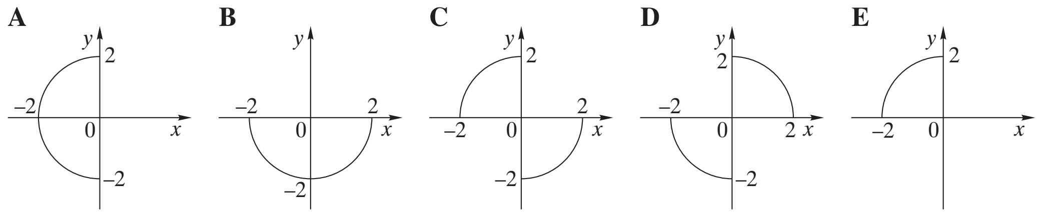
! Kvadratas turi 4 simetrijos ašis: dvi iš jų yra priešingų kraštinių linijos, dvi — įstrižainės. Bet kuriuo atveju taškas, simetriškas kvadrato viršūnei, taip pat yra kvadrato viršūnė. Taškas $(-1; -1)$ yra kvadrato viršūnė, todėl jeigu ašis Ox yra simetrijos ašis, tai ir taškas $(-1; 1)$ yra viršūnė. Jeigu atkarpa, jungianti tuos taškus, yra kvadrato kraštinė, tai galimi du kvadratai — „į kairę“ ir „į dešinę“ (žr. paveikslėlius). Jeigu ta atkarpa yra kvadrato įstrižainė, tai turime vienintelį kvadratą.
Jeigu kvadrato simetrijos ašis yra Oy, tai taškas $(1; -1)$ taip pat yra kvadrato viršūnė. Jeigu atkarpa, jungianti tuos taškus, yra kvadrato kraštinė, tai vėl galima nubrėžti du kvadratus — į viršų ir į apačią. Bet į viršų nubrėžtą kvadratą jau turime, taigi gavome ketvirtą kvadratą. Jeigu ta atkarpa — įstrižainė, tai gauname vienintelį kvadratą — penktą.
Teisingas atsakymas **D**.

S12. B 52

! Kortelių su nelyginiais numeriais yra 50, todėl 50 kortelių ištraukti neužtenka (įsivaizduokime, kad būtent jas ir ištraukėme). Neužtenka ir 51 kortelės: galime netyčia ištraukti, pavyzdžiui, 50 nelyginių numerių ir numerį 2. O štai 52 kortelių jau gana: tarp jų bus mažiausiai dvi „lyginės“ kortelės, ir jų sandauga jau dalysis iš 4.
Teisingas atsakymas **B**.

S13. C

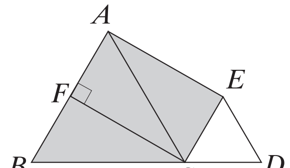
? Jeigu taškas yra I ar III ketvirčio „vidinis“ taškas, tai jis netenkina sąlygos $xy \leqslant 0$. Vadinasi, atkrenta atsakymai **A**, **B** ir **D**. Aibė **C** apima aibę **E**.
Renkamės atsakymą **C**.



! Lygtį $x^2 + y^2 = 4$ tenkina apskritimo su centru O ir spinduliu 2 taškai (ir tik jie). Sąlygos $xy \leqslant 0$ netenkina to apskritimo I ir III ketvirčio vidiniai taškai, o likusieji — ją tenkina.
Teisingas atsakymas **C**.

S14. E $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

! Keturkampis $ABCE$ — trapecija, nes $\angle ABC = \angle ECD = 60^\circ$, taigi $AB \parallel EC$, o trapecijos plotas yra $\frac{EC+AB}{2} \cdot h$.



Trapecijos aukštinė $CF = h$ yra $\triangle ABC$ aukštinė, taigi $h = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
Teisingas atsakymas **E**.

S15. Ⓓ 121

? Kiekvieną iš koeficientų a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 galima pasirinkti 3 būdais, taigi gauname 3^5 skaičių. Tarp jų yra 0, taigi nenulinių variantų yra $3^5 - 1$, o iš jų lygiai pusė yra neigiamų, taigi šia išraiška galime užrašyti $\frac{3^5-1}{2} = 121$ natūraliųjų skaičių.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kad sprendimas būtų išsamus, reikia įsitikinti, kad dvi skirtingos išraiškos niekada neduoda to paties skaičiaus. Iš tikrųjų, tarkime, kad

$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = b_0 + 3b_1 + 9b_2 + 27b_3 + 81b_4.$$

Įrodysime, kad koeficientai a ir b atitinkamai lygūs. Tarkime, kad $a_4 \neq b_4$, ir, pavyzdžiui, $b_4 > a_4$. Perrašome lygybę taip:

$$81(b_4 - a_4) = 27(a_3 - b_3) + 9(a_2 - b_2) + 3(a_1 - b_1) + (a_0 - b_0).$$

Kairė pusė ne mažesnė už 81, o dešinė — ne didesnė už $27 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 = 80$. Prieštara. Vadinasi, $a_4 = b_4$. Gauname lygybę

$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = b_0 + 3b_1 + 9b_2 + 27b_3,$$

ir vėl lygiai taip pat įrodome, kad $a_3 = b_3$, po to — kad $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, ir pagaliau gauname $a_0 = b_0$.
Teisingas atsakymas **D**.

S16. Ⓒ Ketvirtasis natūraliojo skaičiaus laipsnis

! Skaičiuojame:

$$\left(\sqrt{22+12\sqrt{2}} - \sqrt{22-12\sqrt{2}}\right)^2 = 22 + 12\sqrt{2} + 22 - 12\sqrt{2} - 2\sqrt{22^2 - 12^2 \cdot 2} =$$
$$= 44 - 4\sqrt{11^2 - 6^2 \cdot 2} = 44 - 4\sqrt{121 - 72} = 44 - 4 \cdot 7 = 16 = 2^4.$$

Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima ir nekelti kvadratu. Kadangi $22 \pm 12\sqrt{2} = (2 \pm 3\sqrt{2})^2$, tai reiškinys skliaustuose lygus $2 + 3\sqrt{2} - |2 - 3\sqrt{2}| = 2 + 3\sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 2) = 4$.

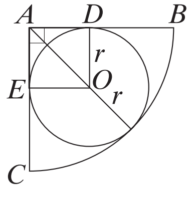
S17. Ⓑ 4

! Žinoma, galima tikrinti ir atsakymus, bet paprasčiau skaičiuoti. Sakykime, kad tai n-kampis. Jo vidaus kampų suma lygi $(n-2)180°$. 16-kampio kampų suma lygi $14 \cdot 180°$. Pagal sąlygą $7 \cdot (n-2)180 = 14 \cdot 180$, $n - 2 = 2$, $n = 4$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! 16-kampio kampų suma lygi $14 \cdot 180°$, septynis kartus mažesnė suma yra $2 \cdot 180° = 360°$, o tai keturkampio kampų suma.

S18. Ⓔ $6(\sqrt{2} - 1)$

! $ADOE$ — kvadratas, nes apskritimo spindulys statmenas liestinei, o iš vieno taško išeinančios liestinės lygios. Taigi didžiojo apskritimo spindulį sudaro mažojo apskritimo spindulys r ir kvadrato $ADOE$ įstrižainė,



$$r + r\sqrt{2} = 6, \quad r(\sqrt{2} + 1) = 6, \quad r = 6(\sqrt{2} - 1).$$

Teisingas atsakymas **E**.

S19. Ⓑ $a_2a_3 < 0$

? Kadangi $a_3 < a_2 < a_4$, tai geometrinės progresijos vardiklis neigiamas, o tada dviejų gretimų narių a_2 ir a_3 ženklai skiriasi.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pagal sąlygą $a_1q^2 < a_1q < a_1q^3$. Jeigu $a_1 > 0$, tai $q^2 < q < q^3$. Kadangi $q > q^2$, tai q teigiamas, bet tada padauginę pastarąją nelygybę iš q gauname $q^2 > q^3$. Prieštara.
Vadinasi, $a_1 < 0$, tada $q^2 > q > q^3$. Negali būti $q > 0$, nes tada $q > 1$ ir $q > q^2$, — prieštara. Negali būti ir $q = 0$. Vadinasi, $q < 0$, o tada $a_2a_3 = a_1q \cdot a_1q^2 = a_1^2q^3 < 0$.
Teisingas atsakymas **B**.

S20. Ⓔ 4

? Kadangi $11^0 = 1, 11^1 = 11, 11^2 = 121, 11^3 = 1331$ ir t. t., tai matome, kad padidėjus laipsnio rodikliui vienetu, priešpaskutinis skaitmuo taip pat padidėja vienetu. Todėl priešpaskutinis laipsnio skaitmuo lygus paskutiniam laipsnio rodiklio skaitmeniui. Vadinasi, skaičiaus 11^{2004} priešpaskutinis skaitmuo yra 4.
Renkamės atsakymą **E**.

! Nustatykime du paskutinius skaičiaus $11^{2004} - 1$ skaitmenis. Išskaidykime:

$$11^{2004} - 1 = (11 - 1)(11^{2003} + 11^{2002} + \cdots + 11^1 + 11^0).$$

Kadangi pirmuose skliaustuose stovi 10, tai paskutinis skaitmuo yra 0, o priešpaskutinį apsprendžia antrieji skliaustai. Juose yra 2004 skaičiai, kurie baigiasi 1, taigi paskutinis sumos skaitmuo yra 4. Kadangi skaičius $11^{2004} - 1$ baigiasi skaitmenimis 40, tai 11^{2004}, būdamas vienetu didesnis, baigiasi skaitmenimis 41.
Teisingas atsakymas **E**.

S21. Ⓐ 40%

? Balsavusius už Brokolių partiją vadinkime trumpai brokolininkais, balsavusius už kitas partijas — nebrokolininkais. Įsivaizduokime, kad buvo 100 rinkėjų, tada 46 buvo ragavę brokolių, 54 — buvo neragavę. Neragavę brokolių 54 rinkėjai sudarė $\frac{9}{10}$ visų nebrokolininkų, taigi nebrokolininkų buvo $54 : \frac{9}{10} = 60$. Vadinasi, brokolininkų buvo 40, ir jie sudarė 40% rinkėjų.
Renkamės atsakymą **A**.

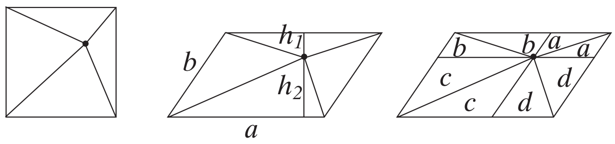
! Spėjimą **?** visiškai paprasta paversti griežtu sprendimu. Sakykime, kad buvo n rinkėjų. Tada $0{,}46n$ rinkėjų buvo ragavę brokolių, o $0{,}54n$ — ne. Pastarieji sudarė $\frac{9}{10}$ dalis visų nebrokolininkų, taigi nebrokolininkų $\frac{1}{10}$ dalis sudarė $0{,}06n$ rinkėjų, o nebrokolininkų buvo $0{,}6n$. Vadinasi, brokolininkų buvo $0{,}4n$, taigi jie sudarė 40% visų rinkėjų.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Matėme, kad sprendime **!** reikėjo šiokio tokio išradingumo. Pasirodo, kad įsivedus du nežinomuosius visi sunkumai dingsta — už mus galvoja lygtys.
Tarkime, kad iš viso rinkėjų buvo x, o už Brokolių partiją balsavo y rinkėjų. Tada už kitas partijas balsavo $x - y$ rinkėjų, iš jų brokolių ragavo $0{,}1(x - y)$. Pagal sąlygą $y + 0{,}1(x - y) = 0{,}46x$, $100y + 10x - 10y = 46x$, $90y = 36x$, $y = 0{,}4x$. Taigi už Brokolių partiją balsavo 40% rinkėjų.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Įmanoma uždavinį išspręsti griežtai ir visai neįsivedant nežinomųjų. Pagal sąlygą brokolių nebuvo ragavę 54% rinkėjų, ir tai yra $\frac{9}{10}$ nebrokolininkų. Vadinasi, $\frac{1}{10}$ nebrokolininkų sudaro 6% rinkėjų, o iš viso nebrokolininkų buvo 60% rinkėjų. Todėl brokolininkų buvo 40% rinkėjų.

S22. Ⓐ $4, 5, 8, 9$

? (Plg. uždavinio J25 sprendimą.) Spėdami atsakymus, galime imti kvadratą. Nuleidus trikampių aukštines, pasidaro aišku, kad plotai proporcingi aukštinėms. Kadangi priešingų trikampių aukštinių sumos lygios, tai lygios ir plotų sumos. Tik iš ketverto **A** įmanoma sudaryti lygias sumas $4 + 9 = 5 + 8$.
Renkamės atsakymą **A**.

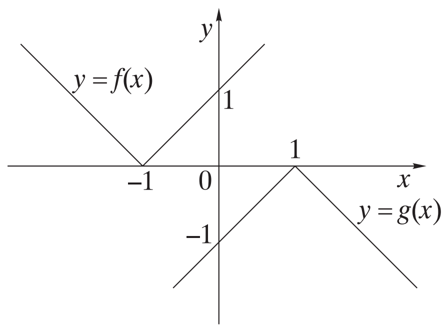


! Nedaug skiriasi ir griežtas sprendimas. Iš susikirtimo taško nuleiskime viršutinio ir apatinio trikampio aukštines. Jos sudaro lygiagretainio aukštinę, $h_1 + h_2 = h$. Trikampių plotų suma $\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}ah$ sudaro pusę lygiagretainio ploto. Vadinasi, priešingų trikampių plotų sumos lygios. Lygias sumas galima sudaryti tik atveju **A**: $4 + 9 = 5 + 8$. Dar reikia įsitikinti, kad duotajame (t. y. kiekviename) lygiagretainyje galima rasti tokį tašką, kad trikampių plotai sutiktų kaip $4 : 5 : 9 : 8$. Padalykime vieną lygiagretainio kraštinę santykiu $8 : 5$, o kitą — santykiu $9 : 4$ ir išveskime tieses, lygiagrečias lygiagretainio kraštinėms. Tos tiesės ir susikerta reikiamame taške. Iš tikrųjų, tiesės per tą tašką išvestas lygiagretainio aukštines taip pat dalija tais pačiais santykiais $8 : 5$ ir $9 : 4$.

!! Ypač gražus sprendimas be formulių. Vėl išveskime lygiagretes kraštinėms per bendrą trikampių viršūnę. Gauname keturias poras lygių trikampių: a ir a, b ir b, c ir c, d ir d.
Matome, kad tiek viršutinio ir apatinio trikampių plotų suma bei kairiojo ir dešiniojo trikampių plotų suma lygios $a + b + c + d$.

S23. Ⓒ $f(x) = -g(x + 2)$

? Atsakymai **A** ir **B** netinka, nes juose funkcijos $y = g(x)$ grafikas apverstas per ašį Ox, po to pakeltas ir nuleistas, o duotame brėžinyje pastumtas į šoną. **D** ir **E** galime atmesti vien todėl, kad šie variantai sutampa (**D** varianto lygybėje pakeitę $x \to x - 1$ gausime **E** varianto lygybę).
Renkamės atsakymą **C**.



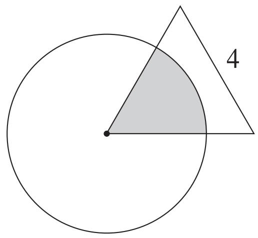
! Kadangi $f(x) = |x + 1|$, o $g(x) = -|x - 1|$, tai $f(x) = -g(x + 2)$. Vadinasi, teisinga lygybė **C**. Kitos lygybės

$$|x + 1| = |x - 1| + 2, \quad |x + 1| = |x - 1| - 2, \quad |x + 3| = |x - 1|, \quad |x + 2| = |x - 2|$$

neteisingos — pirmoje užtenka paimti $x = 0$ (gauname $1 = 3$), o kitose $x = 1$, ir atitinkamai gauname $2 = -2$, $4 = 0$, $3 = 1$.
Teisingas atsakymas **C**.

S24. (A) $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$

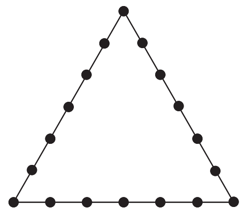
Kadangi trikampio plotas lygus $\frac{4^2\sqrt{3}}{4}$, tai skritulio išpjovos plotas lygus $2\sqrt{3}$. Bet išpjovos kampas yra 60°, todėl ji sudaro šeštadalį skritulio ploto. Vadinasi, $\frac{1}{6}\pi r^2 = 2\sqrt{3}$, $r^2 = \frac{12\sqrt{3}}{\pi}$, $r = \sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$.
Teisingas atsakymas **A**.



S25. (A) 16
Žr. uždavinio J27 sprendimą.

S26. (B) 711

3 taškus iš 18, kai nesvarbu jų tvarka, galima pasirinkti $\frac{18\cdot17\cdot16}{2\cdot3} = 3\cdot16\cdot17$ būdų. Iš tų tritaškių rinkinių trikampio nesudaro tie, kai visi taškai yra vienoje tiesėje, ir juos reikia atmesti. Tokių rinkinių yra $3\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{2\cdot3} = 3\cdot5\cdot7$. Vadinasi, galima sudaryti $3\cdot16\cdot17 - 3\cdot5\cdot7 = 3(272-35) = 3\cdot237 = 711$ trikampių.
Teisingas atsakymas **B**.



S27. (B) 4

Visi įmanomi triženkliai skaičiai, užrašomi skirtingais skaitmenimis, yra $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Jų suma lygi $2(a+b+c)+2\cdot10(a+b+c)+2\cdot100(a+b+c) = 222(a+b+c)$. Pagal sąlygą $222(a+b+c) = 1554$, todėl $a+b+c = 7$. Iš nenulinių skirtingų 3 skaitmenų sumą 7 galima sudaryti vieninteliu būdu: $1+2+4$. Vadinasi, $c = 4$.
Teisingas atsakymas **B**.

S28. (B) 8991

Prie skaičiaus m pridėję 1, gauname 10^{999}, vadinasi, $m = 10^{999}-1$. Todėl

$$m^2 = 10^{1998} - 2\cdot10^{999} + 1 = 10^{999}(10^{999}-2) + 1.$$

Gautą skaičių galima užrašyti taip:

$$(1\underbrace{00\ldots00}_{999}-2)10^{999} + 1 = \underbrace{99\ldots99}_{998}8\underbrace{00\ldots00}_{998}1.$$

Vadinasi, skaičiaus m^2 skaitmenų suma lygi $9\cdot998+8+1 = 9\cdot999 = 9\cdot(1000-1) = 9000-9 = 8991$.
Teisingas atsakymas **B**.

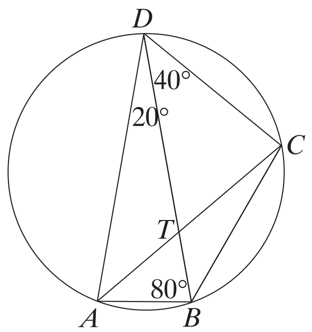
S29. (C) $\frac{7\sqrt{3}}{16}$

Kadangi tiek turinys, tiek atėminys yra tarp 0 ir 1 ir nelygūs, tai iš karto atkrenta atsakymai **B**, **D** ir **E**. Nepanašus į teisybę ir atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **C**.

Duotojo reiškinio reikšmę nesunku apskaičiuoti:
$\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = (\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ)(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)(\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ) =$
$= \frac{1}{4}(4\sin^4 75^\circ + 4\cos^4 75^\circ)\cdot 1\cdot(-\cos 150^\circ) = \frac{1}{4}((1-\cos150^\circ)^2 + (1+\cos150^\circ)^2)\cos30^\circ =$
$= \frac{1}{2}(1+\cos^2 150^\circ)\cos30^\circ = \frac{1}{2}(1+\cos^2 30^\circ)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\frac{3}{4}) = \frac{7\sqrt{3}}{16}$.
Teisingas atsakymas **C**.

S30. Ⓓ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Kadangi $AD = DB$, tai $\angle DAB = \angle ABD = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$. Kampų DAB ir DCB suma lygi 180°, todėl apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą. Tai padarę, sujungę A su C ir pažymėję DB ir AC susikirtimo tašką T, turime: $\angle TCD = \angle ABD = 80^\circ$ (kaip įbrėžtiniai). Vadinasi, $\angle DTC = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$. Bet keturkampio $ABCD$ plotas lygus $\frac{1}{2}AC \cdot BD \sin 60^\circ = 1$, todėl $AC \cdot BD = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
Teisingas atsakymas **D**.



Išveskime formulę keturkampio plotui apskaičiuoti $S = d_1 d_2 \sin\gamma$, kur d_1, d_2 — įstrižainių ilgiai, γ — kampas tarp įstrižainių. Tai padaryti labai paprasta — užtenka susumuoti keturių trikampių plotus.
Tegu brėžinyje $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle DTA = \gamma$. Tada $\sin\angle ATB = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, $\sin\angle BTC = \sin\gamma$, $\sin\angle CTD = \sin\gamma$. Keturkampio $ABCD$ plotas

$$
\begin{aligned}
S &= S_{\triangle DTA} + S_{\triangle ATB} + S_{\triangle BTC} + S_{\triangle CTD} = \\
&= \frac{1}{2}(DT \cdot TA + AT \cdot TB + BT \cdot TC + CT \cdot TD)\sin\gamma = \\
&= \frac{1}{2}(TA + TC)(TD + TB)\sin\gamma = \\
&= \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma.
\end{aligned}
$$