KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. B 1
Žr. uždavinio M4 sprendimą.

K2. C 1
Žr. uždavinio B14 sprendimą.

K3. E 60
Žr. uždavinio M16 sprendimą.

K4. C 14

! Kadangi 1 stiklainis atstoja 2 butelius, tai $3 \cdot 2 + 2 = 8$ butelių talpa yra 16 litrų. Vadinasi, butelio talpa yra $2\,\ell$, stiklainio $4\,\ell$. Todėl 2 stiklainių ir 3 butelių bendra talpa yra $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$ litrų.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima sudaryti lygčių sistemą (S ir B — atitinkamos talpos) $3S + 2B = 16$, $S - 2B = 0$ ir ją išspręsti. Beje, galima neieškoti atskirai S ir B. Pirmą lygtį dauginame iš 7, antrą iš 5. Tada $21S + 14B = 7 \cdot 16$, $5S - 10B = 0$. Atėmę lygtis, turime $16S + 24B = 7 \cdot 16$, arba $2S + 3B = 14$.

K5. A 15%

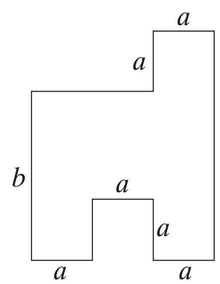
! Sakykime, kad licėjuje yra A mokinių. Vadinasi, dviračius turi $0{,}5A$ mokinių, todėl dar ir riedlentes turi $0{,}3 \cdot 0{,}5A$ mokinių. Vadinasi, ir dviratį, ir riedlentę turi $(0{,}3 \cdot 0{,}5A) \cdot 100 : A = 15(\%)$ licėjaus mokinių.
Teisingas atsakymas **A**.

K6. C 54°

! Kadangi $B = \frac{A}{3}$, $C = 2A$, tai trikampio kampų suma $180^\circ = A + \frac{A}{3} + 2A$, $3 \cdot 180^\circ = 3A + A + 6A$, $10A = 3 \cdot 180^\circ$, $A = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$.
Teisingas atsakymas **C**.

K7. E $3ab$

! Spręsti galima įvairiai, bet paprastas toks sprendimas. Nukirpkime viršutinį kvadratėlį $a \times a$ ir įdėkime jį apačioje į „įlanką“ $a \times a$. Gausime stačiakampį, kurio plotas $3a \cdot b$.
Teisingas atsakymas **E**.



K8. C 46

! (Plg. uždavinio B7 sprendimą.) Kiekvieną kartą karpant lapelių skaičius padidėja devyniais. Kadangi Jolita karpė 5 kartus, tai lapelių skaičius padidėjo $5 \cdot 9 = 45$-iais ir tapo lygus $1 + 45 = 46$.
Teisingas atsakymas **C**.

K9. B 3

? Nenorint sudaryti lygties, galima tikrinti atsakymus. Iš trečio sakinio išplaukia, kad varnų skaičius lyginis. Vadinasi, medžių skaičius nelyginis, ir reikia tikrinti atsakymus **B** ir **D**. Jeigu medžių yra 3, tai varnų yra 4, ir tada tikrai 2 medžiuose tupės po 2 varnas, o trečiame — nei vienos.

! Jeigu medžių darže yra x, tai varnų yra $x + 1$. Kita vertus, kai jos sutupia po 2, tai jų yra $(x - 1) \cdot 2$. Vadinasi, $x + 1 = 2x - 2$, $x = 3$.
Teisingas atsakymas **B**.

K10. D 536 479 879
Žr. uždavinio B28 sprendimą.

K11. C 10 029 010

Galima dauginti įprastiniu būdu, o galima remtis ir skirstymo taisykle:

$$2005 \cdot 5002 = 2005 \cdot (5000 + 2) = 10\,025\,000 + 4010 = 10\,029\,010.$$

Teisingas atsakymas **C**.

K12. C 14,80

Pažymėkime grupės žmonių skaičių x. Tai reiškia, kad reikiama suma lygi $14x + 4$ eurams. Kita vertus, ta suma lygi $16x - 6$ eurų. Turime lygtį $14x + 4 = 16x - 6$, iš čia $x = 5$. Reikiama suma yra $14 \cdot 5 + 4 = 74$ eurai, o kiekvienam įnešti reikia $74 : 5 = 14{,}80$ euro.
Teisingas atsakymas **C**.

Apsieikime be lygčių. Įnešus po 14 eurų, trūksta 4 eurų, o įnešus po 16 eurų — 6 eurais per daug. Vadinasi, 2 eurų įnašas duoda 10 eurų padidėjimą, 20 eurocentų įnašas duoda 1 euro padidėjimą, o trūkstamus 4 eurus duos 80 eurocentų įnašas. Vadinasi, reikia prie 14 eurų dar pridėti 80 eurocentų.

K13. D 2:3
Žr. uždavinio B15 sprendimą.

K14. D 34

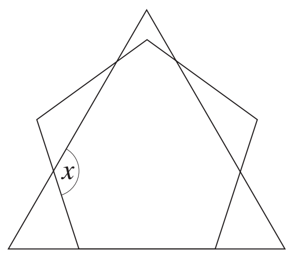
Pradedame darbo dienas skaičiuoti nuo pirmadienio — 1 dienos, kita poilsio diena bus penktadienis — 5 diena, tada darbo dienos 6, 7, 8, 9, poilsio 10, taigi turime poilsio dienų seką 10, 15, 20, ... Kita vertus, sekmadieniai bus 7, 14, 21, ... dienos — jų numeriai yra 7 kartotiniai. Taigi tęsiame poilsio dienų seką, kol pamatysime skaičių, dalų iš 7. Mūsų seka yra 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... Pirmas septynių kartotinis yra 35, vadinasi, tai poilsio diena ir sekmadienis. Bet skaičiuoti dienas nurodyta iki šeštadienio, taigi poilsio diena sekmadienis išpuola po 34 dienų.
Teisingas atsakymas **D**.

K15. B
Žr. uždavinio M24 sprendimą.

K16. C 18
Žr. uždavinio B26 sprendimą.

K17. C 132°

Taisyklingojo penkiakampio kampų suma lygi $3 \cdot 180°$ — juk jį vieno kampo įstrižainėmis galima padalyti į tris trikampius. Vadinasi, vienas taisyklingojo penkiakampio kampas lygus $3 \cdot 36°$. Todėl kairiojo apatinio trikampio dešinysis kampas $180° - 3 \cdot 36° = 72°$, o kairysis kampas (kaip taisyklingojo trikampio) lygus $60°$. Vadinasi, kampas prie viršūnės lygus $180° - 60° - 72° = 48°$. Todėl ieškomas kampas x kaip gretutinis lygus $180° - 48° = 132°$.
Teisingas atsakymas **C**.



K18. E 1009
Žr. uždavinio M22 sprendimą.

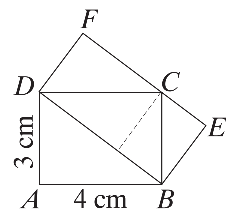
K19. D 1
Žr. uždavinio B25 sprendimą.

K20. Ⓒ 5

Kaip matome iš pavyzdžio, skaičiaus ilgį apsprendžia jo pirminių (vienodų ar ne — nesvarbu) daugiklių skaičius. Peržiūrėkime visus skaičius, mažesnius už 100. Kadangi skaičiai nelyginiai, tai jie neturi daugiklio 2, ir mažiausias daugiklis yra 3. Vadinasi, nagrinėti reikia skaičius pradedant nuo $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ iki $3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$. Vadinasi, daugikliai dar gali būti 5 ir 7. Surašykime visus tokius skaičius, ne didesnius už 99. Tris trejetus turi 27, du trejetus turi $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$, $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$, $3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$, vieną trejetą turi $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$, nei vieno trejeto negali toks skaičius turėti — iš jų mažiausias $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Taigi radome 5 tokius skaičius.
Teisingas atsakymas **C**.

K21. Ⓑ 12

Užtenka išvesti stačiakampio $DFEB$ aukštinę iš taško C į BD, ir tampa aišku, kad $\triangle CDB$ plotas yra pusė stačiakampio $DFEB$ ploto. Bet $\triangle CDB$ plotas taip pat yra stačiakampio $ABCD$ ploto pusė. Taigi kiekvieno stačiakampio plotas lygus $3 \cdot 4 = 12\,\text{cm}^2$.
Teisingas atsakymas **B**.



K22. Ⓓ 4
Žr. uždavinio B24 sprendimą.

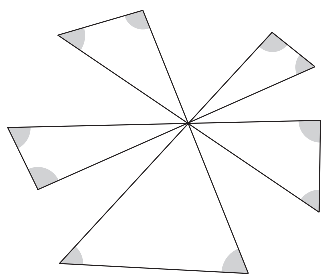
K23. Ⓐ 6

Jeigu dviženklį skaičių apsukus jis padidėja daugiau nei 3 kartus, tai jo antras skaitmuo turi būti didesnis už pirmąjį daugiau kaip 3 kartus. Vadinasi, pirmas skaitmuo gali būti tik 1 arba 2. Surašome tuos skaičius: 14, 15, 16, 17, 18, 19, 27, 28, 29. Patikriname, ar jie apsukti padidėja daugiau nei 3 kartus. Toks nėra skaičius 27, nes $72 < 3 \cdot 27$, skaičius 28, nes $82 < 3 \cdot 28$, ir skaičius 14, nes $41 < 3 \cdot 14$. Lieka 6 skaičiai.
Teisingas atsakymas **A**.

Geriausia sudaryti nelygybę ir ją išspręsti. Pažymėkime skaičių $\overline{ab}$, tada apsuktas skaičius bus $\overline{ba} = 10b + a$. Pagal sąlygą $10b + a > 3(10a + b)$, $29a < 7b$. Kadangi $b \leqslant 9$, tai $29a < 63$, $a \leqslant 2$. Vadinasi, $a = 1$ arba $a = 2$. Kai $a = 1$, nelygybę $29a < 7b$ tenkina $b \geqslant 5$. Kai $a = 2$, tą nelygybę tenkina tik $b = 9$. Gauname sprendinius 15, 16, 17, 18, 19, 29.

K24. Ⓔ 720°

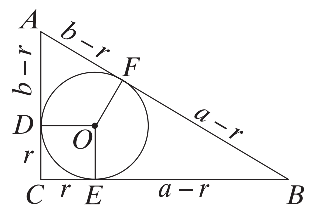
Visų penkių tiesių bendrame susikirtimo taške viršūnes turi 10 kampų. Jeigu kuris iš tų kampų priklauso vienam iš trikampių, tai jam lygus kryžminis nepriklauso, ir atvirkščiai. Kadangi visi 10 kampų sudaro pilnąjį 360° kampą, tai trikampiams priklausančių kampų suma lygi 180°. Penkių trikampių kampų suma lygi $5 \cdot 180°$, todėl pažymėtųjų kampų suma lygi $5 \cdot 180° - 180° = 4 \cdot 180° = 720°$.
Teisingas atsakymas **E**.



K25. Ⓐ 27

Kiekvieną kartą nupilamas ketvirtadalis skysčio. Po pirmo nupylimo lieka $64 - 16 = 48\,\ell$ sulos. Įpilama $16\,\ell$ vandens. Tada nupilant nusipila $\frac{1}{4}$ dalis sulos (ir $\frac{1}{4}$ dalis vandens), taigi lieka $48 - 12 = 36\,\ell$ sulos. Vėl įpilama vandens, ir vėl bus nupilta $\frac{1}{4}$ sulos, taigi liks $36 - 9 = 27\,\ell$ sulos.
Teisingas atsakymas **A**.

K26. Ⓔ $a+b$



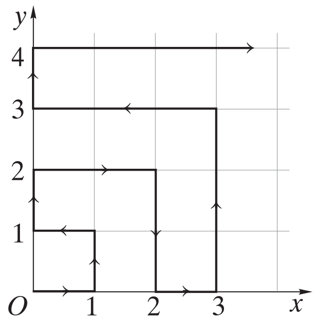
! Įbrėžtinio apskritimo spindulį pažymėkime r, apibrėžtinio R. Įbrėžtinio apskritimo centrą O sujunkime su statinių CA, CB ir įžambinės AB lietimosi taškais D, E, F (žr. brėžinį). Kadangi OD ir OE statmenos statiniams, tai keturkampis $CDOE$ — kvadratas, nes šio stačiakampio gretimos kraštinės OD ir OE lygios kaip spinduliai. Todėl $CD = CE = r$, $AD = b-r$, $BE = a-r$. Įžambinės atkarpos AF ir BF atitinkamai lygios, todėl $AB = a+b-2r$. Bet apibrėžtinio apskritimo centras yra įžambinės vidurys, $AB = 2R$, taigi $2R = a+b-2r$. Vadinasi, $2R+2r = a+b$.
Teisingas atsakymas **E**.

K27. Ⓑ 55

! Kadangi 10 skaičių vidurkis lygus 10, tai jų suma lygi 100. Dešimtas skaičius bus didžiausias, kai kiti devyni bus mažiausi, o tai skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jų suma lygi 45, todėl dešimtas skaičius lygus 55.
Teisingas atsakymas **B**.

K28. Ⓐ (10; 0)

? Matome, kad dalelė tašką (1; 0) pasieks po 1 minutės, tašką (0; 2) — po $4 = 2^2$ minučių, tašką (3; 0) — po $9 = 3^2$ minučių, tašką (0; 4) — po $16 = 4^2$ minučių.



Mums reikia 120 minučių. Artimiausias skaičiui 120 yra kvadratas $11^2 = 121$. Po 121 minutės dalelė bus taške (11; 0). Vadinasi, prieš minutę ji buvo taške (10; 0).
Renkamės atsakymą **A**.

! Žinoma, sprendimas **?** irgi geras, tik griežtai kalbant, reikėtų viską nuosekliai skaičiuoti iki 120 minutės. Todėl paprasčiau iš karto galvoti apie bendrą formulę. Iki taško (1; 0) dalelės kelio ilgis lygus 1, iki taško (0; 2) prisidės dvi kvadrato 1×1 kraštinės plius 1, iki taško (3; 0) prisidės dvi kvadrato 2×2 kraštinės plius vienetas, iki (0; 4) prisidės $2\cdot 3+1$, iki (5; 0) prisidės $2\cdot 4+1$, ir t. t. Taigi iki taško $(0; 2n)$ kelias bus $1+2\cdot 1+1+2\cdot 2+1+\cdots+2\cdot(2n-1)+1 = 2n+2\cdot(1+2+\cdots+2n-1) = 2n+2\cdot(2n-1)\cdot 2n/2 = 2n(1+2n-1) = 4n^2$, o iki taško $(2n+1; 0)$ kelias bus $1+2\cdot 1+1+2\cdot 2+1+\cdots+2\cdot 2n+1 = 2n+1+2(1+2+\cdots+2n) = 2n+1+2\cdot 2n\cdot(2n+1)/2 = (2n+1)(1+2n) = (2n+1)^2$. Tiek pat minučių reikia tam keliui įveikti. Mums reikia sužinoti, kur dalelė bus po 120 minučių. Patogu pasižiūrėti, kur ji bus po $121 = 11^2$ minučių — tai taškas (11; 0). Todėl po 120 minučių, t. y. minutę anksčiau, dalelė buvo taške (10; 0).
Teisingas atsakymas **A**.

K29. Ⓔ Skaičius 288 dalijasi iš 12

? Šiandien gali būti arba tiesos diena, arba melo diena. Įrodysime, kad šiandien melo diena. Iš tikrųjų, jeigu šiandien tiesos diena, tai Karolis tikrai nesakė teiginio **D** (jis juk žino, kad dažnai meluoja). Tada teiginiai **A**, **B**, **C** teisingi. Todėl remiantis teiginiu **B**, Karolis turi draugų n berniukų ir n mergaičių, o iš viso $2n$ draugų. Remiantis **C**, $2n \geqslant 3$. Teiginys **A** sako, kad $2n$ pirminis, bet tėra tik vienas lyginis pirminis — tai skaičius 2, o juk $2n \geqslant 3$. Vadinasi, mūsų prielaida, kad teiginiai **A**, **B**, **C** teisingi, yra klaidinga. Taigi bent vienas iš atsakymų **A**, **B**, **C** melagingas, ir šiandien melo diena.
Bet juk teiginys **E** teisingas: $288 = 2 \cdot 144 = 2 \cdot 12^2$ tikrai dalijasi iš 12. Vadinasi, būtent jo Karolis ir neištarė.
Teisingas atsakymas **E** (tiksliau: Šiandien tikrai nebuvo pasakytas teiginys **E**).

! Kengūriškasis sprendimas baigtas, bet tik kengūriškasis: o gal ir dar kurio nors teiginio Karolis tikrai negalėjo ištarti. Kitaip sakant, ar, ištaręs melo dieną teiginius **A**, **B**, **C**, **D**, jis gali išlikti melagis.
Imkime tokį pavyzdį: Karolis turi 3 draugus ir 1 draugą, kurie visi yra Karolio metų. Tada **A**, **B** ir **C** — melas, **D** — žinomai melas, taigi taip būti galėtų. Vadinasi, aprašytoji situacija įmanoma.

K30. Ⓓ 5

! Uždavinys tikrai būtų sunkus, jeigu nepasinaudotume paprastu teiginiu: kiekvienas daliklis turi „brolį“. Kitaip sakant,
$102^2 = 1 \cdot 102^2 = 2 \cdot (51 \cdot 102) = 3 \cdot (34 \cdot 102) = 4 \cdot 51^2 = 6 \cdot (34 \cdot 51) = 9 \cdot 34^2 = 12 \cdot (17 \cdot 51) = \ldots$
Jeigu daliklis d yra 4-ženklis, tai $10^3 \leqslant d < 10^4$, o jo brolis $\frac{102^2}{d}$ yra intervale

$$\frac{102^2}{10^4} < \frac{102^2}{d} \leqslant \frac{102^2}{10^3}.$$

Vadinasi, užtenka nustatyti, kiek skaičiaus 102^2 daliklių yra intervale $(\frac{102^2}{10^4}; \frac{102^2}{10^3}]$. Kadangi $102^2 : 10^4 = (102 : 100)^2 = 1{,}02^2$, o

$$\frac{102^2}{10^3} < \frac{105^2}{10^3} = \frac{11025}{10^3} < 12,$$

tai mums užtenka patikrinti daliklius iš intervalo $[2; 11]$. Jų yra 5 — tai 2, 3, 4, 6, 9, ir jie tikrai priklauso intervalui $(\frac{102^2}{10^4}; \frac{102^2}{10^3}]$, nes $2 > \frac{102^2}{10^4}$ ir $9 < \frac{102^2}{10^3}$, kadangi $\sqrt{2} > 1{,}02$ ir $90 < 10{,}2^2$.
Teisingas atsakymas **D**.
Beje, šis (ir ne tik šis!) uždavinys buvo sugalvotas Lietuvoje.