SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. B -1

Jokių gudrybių čia nėra: reikšmės **A**, **B**, **C**, **D**, **E** atitinkamai duoda reiškinio $\frac{x^2}{x^3}$ reikšmes 1, -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{100}$. Mažiausia iš jų yra -1 (bet ne $\frac{1}{100}$ — kalbama ne apie absoliutųjį didumą!).
Teisingas atsakymas **B**.

S2. C 3

Aišku, kad tik trys kubai $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ yra tarp 2 ir 100, o $5^3 = 125$ ir tolimesni — didesni už 100.
Teisingas atsakymas **C**.

S3. D 2

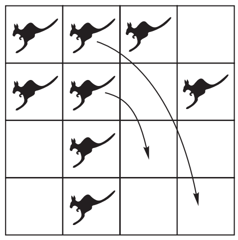
Žr. uždavinio B8 sprendimą.

S4. D 111

Sprendžiame lygtį: $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2n)^2$, $8n^2 = 888 \cdot 111$, $n^2 = 111^2$, $n = 111$.
Teisingas atsakymas **D**.

S5. E 2

(Plg. uždavinio M4 sprendimą.) Kadangi antrame stulpelyje yra 4 kengūros, tai būtinai prireiks dviejų ėjimų. O dviem ėjimais susitvarkyti paprasta: pavyzdžiui, antro stulpelio viršutinę kengūrą statome į apatinį dešinį langelį, o po ja esančią — į pastatytajai gretimą kvadrato įstrižainės langelį.
Teisingas atsakymas **E**.



S6. A

Žr. uždavinio B22 sprendimą.

S7. E 220

Nesunku tikrinti atsakymus. Kadangi vienas dėmuo yra apytikriai lygus sumos ketvirtadaliui, tai **A** atveju bandome 500, „pataisytus“ -1, 0, 1 ir 2, ir gauname $4 \cdot 500 + 2 = 2002$. **B** atveju 5 taisome taip pat $(-1, 0, 1, 2)$, gauname 22. **C** atveju 50 taisome vėl taip pat, gauname 202. **D** atveju 55 taisome vėl taip pat, gauname 222. Lieka paskutinis atsakymas.
Renkamės atsakymą **E**.

Žinoma, nesunku įrodyti, kad 220 gauti negalima: juk skaičių $55 - 2$, $55 - 1$, 55, $55 + 1$ suma $220 - 2$ per maža (juo labiau netinka mažesni skaičiai), o skaičių $55 - 1$, 55, $55 + 1$, $55 + 2$ suma $220 + 2$ per didelė (ir juo labiau netinka didesni skaičiai).
Teisingas atsakymas **E**.

Paprasčiausia skaičiuoti bendru atveju. Jeigu skaičiai n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, tai jų suma $4n + 6$. Ji dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 4. Būtent tokie yra visi atsakymų skaičiai, išskyrus paskutinį.

S8. C 600

Kiekvienos skylės tūris 3, bet jos visos turi bendrą centrinį kubelį, taigi išmetami $9 - 2 = 7$ kubeliai. Kadangi vienas kubelis sveria $810 : 27 = 30$ gramų, tai išmetame $7 \cdot 30 = 210$ gramų, ir lieka $810 - 210 = 600$ gramų.
Teisingas atsakymas **C**.

S9. Ⓑ 2005

? Įstatę $x = 2004$ į lygybę $f(x+1) = 2f(x) - 2002$, gauname $f(2005) = 2f(2004) - 2002$, t. y. $2008 = 2f(2004) - 2002$. Iš čia $f(2004) = 1001 + 1004 = 2005$.
Renkamės atsakymą **B**.

! Tokiame sprendime vienintelis trūkumas: o gal iš viso tokios funkcijos nėra? Nurodyti tokią funkciją paparasta — ją apibrėžiame, kaip sakoma, indukciškai. Imame $f(2005) = 2008$. Tada galime apibrėžti $f(2006)$, $f(2006) = 2f(2005) - 2002$ (skaičiuoti ir nebūtina). Dabar apibrėžiame $f(2007)$, $f(2007) = 2f(2006) - 2002$, ir t. t. Taip apibrėžiame $f(x)$ visoms sveikosioms reikšmėms $x \geqslant 2005$.
Dabar apibrėšime $f(x)$ sveikosioms reikšmėms $x < 2005$. Perrašykime duotąją lygybę ekvivalenčiai: $f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) + 1001$. Turime $f(2005)$. Tada $f(2004)$ apibrėžkime taip: $f(2004) = \frac{1}{2}f(2005) + 1001$. Dabar apibrėžkime $f(2003)$, $f(2003) = \frac{1}{2}f(2004) + 1001$, ir t. t. Taip apibrėšime $f(x)$ visoms sveikosioms (ir net neigiamosioms) x reikšmėms.
Negana to, aišku, kad funkcija $f(x)$ apibrėžiama vienareikšmiškai, jeigu tik norime, kad sąlygos lygybė būtų teisinga kiekvienam sveikajam x.
Taigi $f(x)$ egzistuoja ir yra vienintelė.
Atsakymas **B** teisingas.

!! Vis dėlto norėtųsi $f(x)$ užrašyti „išreikštiniu“ pavidalu. Tai nėra taip jau paprasta.
Parašykime duotąją lygybę su $x = n$ (taip įprasčiaũ) ir su $x = n - 1$:

$$f(n+1) = 2f(n) - 2002, \qquad f(n) = 2f(n-1) - 2002.$$

Atėmę jas vieną iš kitos, gauname:

$$f(n+1) - f(n) = 2[f(n) - f(n-1)].$$

Parašykime pastarąją lygybę su vis mažėjančiais argumentais:

$$\begin{aligned}
&f(n) - f(n-1) = 2[f(n-1) - f(n-2)],\\
&f(n-1) - f(n-2) = 2[f(n-2) - f(n-3)],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f(3) - f(2) = 2[f(2) - f(1)],\\
&f(2) - f(1) = 2[f(1) - f(0)].
\end{aligned}$$

Jei parašytose lygybėse bent vienas skirtumas, pavyzdžiui, $f(n-1) - f(n-2)$ būtų lygus 0, tai lygūs 0 būtų ir visi parašytieji skirtumai. Bet kadangi $f(n+1) - f(n) = f(n) - 2002$, tai tada būtų $0 = f(n) - 2002$, t. y. $f(n) = 2002$, o tai prieštarautų lygybei $f(2005) = 2008$. Todėl galime sudauginti anksčiau parašytas n lygybių ir suprastinti vienodus skirtumus. Gausime

$$f(n+1) - f(n) = 2^n[f(1) - f(0)],$$

o kadangi $f(n+1) = 2f(n) - 2002$, tai

$$f(n) = 2^n[f(1) - f(0)] + 2002.$$

Trumpiau tai užrašysime pavidalu $f(n) = C \cdot 2^n + 2002$, o C tuoj pat nustatysime. Kadangi $f(2005) = 2008$, tai $C \cdot 2^{2005} + 2002 = 2008$, $C \cdot 2^{2005} = 6$, $C = 6 \cdot 2^{-2005}$.
Vadinasi, mūsų funkcija yra

$$f(n) = 6 \cdot 2^{n-2005} + 2002.$$

Įdomumo dėlei galite pasitikrinti, kad ji tenkina uždavinio sąlygas.

S10. A 8
Žr. uždavinio J13 sprendimą.

S11. D 51
Žr. uždavinio J10 sprendimą.

S12. A 8
Neužmirškime, kad kubą galima sukioti. Pavyzdžiui, jeigu du kubai turi po vieną baltą sieną, tai juos galima sutapdinti. Vadinasi, tėra 1 toks kubas.
Sakykime, kad baltos 2 sienos. Jei tos sienos priešingos, tėra 1 toks kubas — visada jį galima pastatyti ant baltos sienos, o kita bus viršuje. Jei tos sienos gretimos, tai pastačius ant baltos sienos, kubą galima pasukti taip, kad kita balta siena būtų priekinė. Tokių kubų taip pat yra 1.
Dabar sakykime, kad yra 3 baltos sienos. Nagrinėkime du atvejus — 1) iš tų trijų sienų dvi priešingos ir 2) priešingų baltų sienų nėra.
1) atveju statome kubą ant baltos sienos, kuri turi priešingą. Tada viršutinė siena taip pat bus balta. Dabar kubą pasukame apie vertikaliąją ašį, einančią per jo centrą, kad balta pasidarytų priekinė siena. Taigi 1) atveju kubas vienas.
2) atveju vėl statome kubą ant baltos sienos — viršutinė siena bus juoda. Pasukime kubą taip, kad priekinė siena būtų balta. Kadangi priešinga jai siena juoda, tai balta kairioji arba dešinioji siena. Bet jei balta siena kairioji, tai kubą galima pasukti taip, kad ji taptų priekine, o priekinė taps dešiniąja. Taigi ir 2) atveju toks kubas vienas.
Turime jau 5 kubus. Dar reikėtų išnagrinėti atvejus, kai baltų sienų 4 arba 5. Bet tada juodų sienų atitinkamai 2 arba 1, ir jau žinome, kad tokių kubų yra 3. Vadinasi, iš viso skirtingų kubų yra 8.
Teisingas atsakymas **A**.

S13. A 6
Žr. uždavinio J24 sprendimą.

S14. D 25
Kortelių skaičius žymėkime spalvas žyminčių žodžių pirmosiomis raidėmis R, M, B. Remiantis sąlyga,

$$R + M + B = 60, \quad R + M = 2B, \quad B + M = 3R.$$

Iš šios sistemos rasti M paprasta. Atėmę iš pirmos lygties antrą, gauname $3B = 60$, $B = 20$. Atėmę iš pirmos trečią, gauname $4R = 60$, $R = 15$. Todėl (iš pirmos lygties) $M = 25$.
Teisingas atsakymas **D**.

S15. B $a + b$
Žr. K26 uždavinio sprendimą.

S16. A $(-\infty; 1)$
Sprendžiame nelygybę $2^{4^x} < 4^{2^x}$:

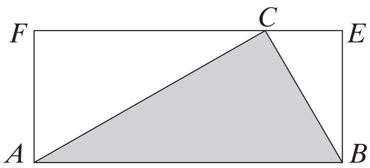
$$2^{4^x} < 2^{2\cdot 2^x}, \quad 4^x < 2 \cdot 2^x, \quad 2^{2x} < 2^{x+1}, \quad 2x < x + 1, \quad x < 1.$$

Teisingas atsakymas **A**.

S17. E 1
Žr. uždavinio B25 sprendimą.

S18. C 11:4
Žr. uždavinio J14 sprendimą.

S19. (D) $8\sqrt{3}$



Remiantis sąlyga, $\triangle AFC$ ir $\triangle CEB$ panašūs. Jeigu pažymėsime $AF = EB = h$, tai $\frac{6}{h} = \frac{h}{2}$, $h^2 = 12$, $h = 2\sqrt{3}$. Todėl $\triangle ABC$ plotas lygus $\frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.
Teisingas atsakymas **D**.

Aukštinę h galima rasti ir kitaip: $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACF - \angle ECB = 180^\circ - \angle ACF - (90^\circ - \angle CBE) = 90^\circ$. Remiantis Pitagoro teorema, $AC^2 + CB^2 = AB^2$, $6^2 + h^2 + 2^2 + h^2 = 8^2$, $2h^2 = 24$, $h^2 = 12$.

S20. (C) Skaičius 288 dalijasi iš 12
Žr. uždavinio K29 sprendimą.

S21. (E) 2025

Išskaidykime visus skaičius: $625 = 5^4$, $124 = 2^2 \cdot 31$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $2187 = 3^7$, $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Skaičius 625 turi keturis daugiklius, 124 — tik tris. Skaičius 108 turi penkis daugiklius, bet jei juos paskirstysime keturiems dauginamiesiems, tai vienam klius du daugikliai, trim — po vieną. Iš pastarųjų bent du turės tą patį daugiklį (2 arba 3). Pagaliau, su 2025 susidoroti lengva: $3 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5)$. Vadinasi, tik paskutinį iš skaičių galima išskaidyti skirtingais nevienetiniais dauginamaisiais.
Teisingas atsakymas **E**.

S22. (A) 4
Žr. uždavinio J22 sprendimą.

S23. (C) 21

Jeigu skaičius m baigiasi vienu iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, tai aišku, kad $m+3$ skaitmenų suma bus 33. Pavyzdžiui, jei $m = 9993$ ir skaitmenų suma 30, tai skaičiaus $m + 3 = 9996$ skaitmenų suma bus 33. Į žaidimą turi įsijungti devynetai. Pavyzdžiui, jei $m = 9939$, tai pereinant prie 9940 skaitmenų suma, užuot padidėjusi vienetu, „krenta“ aštuoniais, ir skaičiaus $m+3 = 9942$ ji lygi 24. Analogiškai skaičiaus $9399 + 3 = 9402$ skaitmenų suma lygi 15, o skaičiaus $3999 + 3 = 4002$ skaitmenų suma lygi 6.
Renkamės atsakymą **C**.

Mes jau visai nebetoli išsamaus sprendimo. Sakykime, kad skaičius m baigiasi 7, 8 arba 9, o prieš jį dar stovi k devynetų: $m = ...a999...9b$, kur $a \neq 9$, o $b = 7$, 8 arba 9. Tada $m + 3 = ...(a + 1)000...0(b - 7)$, o $b - 7$ ir $a + 1$ — skaitmenys. Matome, kad skaičiaus $m + 3$ skaitmenų suma už skaičiaus m skaitmenų sumą mažesnė $k \cdot 9 - 1 + 7 = 9k + 6$ vienetais. Taigi skaitmenų suma pereinant nuo m prie $m + 3$ gali sumažėti 6, 15, 24, ... vienetais. Kadangi mūsų uždavinyje skaičiaus m skaitmenų suma lygi 30, tai ji gali sumažėti 6, 15, 24 vienetais ir tapti lygi 24, 15, 6, gali padidėti 3 vienetais ir tapti lygi 33, bet tai ir viskas — kitokia (taigi ir 21) ji būti negali.
Teisingas atsakymas **C**.

S24. (C) 10

(Plg. uždavinio J18 sprendimą.) Mes turime būti tikri, kad tarp ištrauktų rutulių rasime 2 tokius, kad $5 + 125k_1 + 5 + 125k_2 = 2010$. Tai reiškia, kad ištrauktame skaičių k rinkinyje tikrai rasime tokius k_1 ir k_2, kurių suma $k_1 + k_2 = 16$. Suskaidykime k reikšmes į 9 grupes (kai kuriose iš jų 2 skaičiai, kai kuriose — po 1): (1, 15), (2, 14), (3, 13), (4, 12), (5, 11), (6, 10), (7, 9), (8), (16). Kol nėra dviejų skaičių iš tos pačios grupės, tol jokių dviejų skaičių suma nebus lygi 16. Vadinasi, net paėmus 9 skaičius, gali neatsirasti dviejų su suma 16 (pavyzdžiui, toks yra skaičių rinkinys 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16). O štai paėmus 10 skaičių, bent du iš jų tikrai pateks į vieną grupę, todėl duos sumą 16.
Teisingas atsakymas **C**.

S25. B $\frac{10}{a}$

! Pertvarkykime:

$$\sqrt{2005}-\sqrt{1995}=\frac{(\sqrt{2005}-\sqrt{1995})(\sqrt{2005}+\sqrt{1995})}{\sqrt{2005}+\sqrt{1995}}=\frac{10}{\sqrt{2005}+\sqrt{1995}}=\frac{10}{a}.$$

Teisingas atsakymas **B**.

S26. E Be papildomų duomenų nustatyti neįmanoma

! Nesunku suvokti, kad daug kas priklauso nuo to, ar tarp daliklių yra lygių skaičių. Pavyzdžiui, skaičius 2 turi lygiai du daliklius. Natūralusis skaičius 3^4 turi lygiai penkis daliklius $(1, 3, 3^2, 3^3, 3^4)$. Jų sandauga $2\cdot 3^4$ turi dešimt daliklių $(1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 2, 2\cdot 3, 2\cdot 3^2, 2\cdot 3^3, 2\cdot 3^4)$. O štai nors skaičius 2 turi du daliklius, skaičius 2^4 turi penkis daliklius $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4)$, bet jų sandauga $2^4\cdot 2=2^5$ turi tik šešis daliklius $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5)$.
Teisingas atsakymas **E**.

S27. A $\frac{1}{3}$

? Tikriname natūraliuosius skaičius iš eilės. Vienetas turi 1 nelyginį ir 0 lyginių daliklių, santykis $\frac{1}{0}$ beprasmis. Dvejetas turi 1 nelyginį (1) ir 1 lyginį (2) daliklį, santykis $\frac{1}{1}=1$. Trejetas turi 2 nelyginius ir 0 lyginių daliklių, santykis $\frac{2}{0}$ beprasmis. Skaičius 4 turi 1 nelyginį ir 2 lyginius daliklius, santykis $\frac{1}{2}$. (Jau mums nebeįdomūs nelyginiai skaičiai.) Skaičius 6 turi 2 nelyginius (1, 3) ir 2 lyginius (2, 6) daliklius, santykis $\frac{2}{2}=1$. Skaičius 8 duoda santykį $\frac{1}{3}$.
Renkamės atsakymą **A**.

! Natūralusis skaičius visada turi daliklį 1, todėl $n\geqslant 1$. Bet natūralusis skaičius gali neturėti lyginių daliklių (jeigu jis nelyginis). Šiuo atveju $k=0$, ir santykis $\frac{n}{0}$ beprasmis, todėl joks atsakymas jo reikšti negali. Vadinasi, nagrinėsime tik lyginius skaičius.
Lyginis skaičius L visada turi daliklį 2. Todėl jeigu imsime bet kurį nelyginį skaičiaus L daliklį p, tai skaičius $2p$ bus skaičiaus L lyginis daliklis. Tai reiškia, kad kiekvienas lyginis skaičius lyginių daliklių turi tiek pat arba daugiau. Savo ruožtu tai reiškia, kad visada $\frac{n}{k}\leqslant 1$ (ir atsakymai **D** ir **E** niekada netiks).
Galvokime apie skaidinį pirminiais dauginamaisiais. Lyginius skaičius gimdo daugikliai, lygūs 2. Sakykime, kad skaičiaus turi tik vieną daugiklį 2, t. y. turi pavidalą $2p$, kur p nelyginis. Tada kiekvieną nelyginį daliklį q atitinka lyginis daliklis $2q$ ir atvirkščiai, kiekvieną lyginį daliklį $2q$ atitinka nelyginis daliklis q. Vadinasi, kai skaidinyje vienas dvejetas, gauname $\frac{n}{k}=1$.
Dabar sakykime, kad skaičius yra pavidalo $4p$, kur p nelyginis. Tada kiekvieną nelyginį daliklį q atitinka 2 lyginiai dalikliai $2q$ ir $4q$ ir atvirkščiai, kiekvieną porą $2q$ ir $4q$ lyginių daliklių atitinka nelyginis daliklis q. Vadinasi, lyginių daliklių yra dvigubai daugiau, $\frac{n}{k}=\frac{1}{2}$.
Toliau jau viskas aišku. Jeigu skaičius yra pavidalo $8p$, kur p nelyginis, tai kiekvieną nelyginį daliklį q atitinka trys lyginiai $2q$, $4q$ ir $8q$. Ir atvirkščiai, kiekvieną daliklių trejetą $2q$, $4q$, $8q$ atitinka vienas nelyginis daliklis q. Vadinasi, $\frac{n}{k}=\frac{1}{3}$.
Iš pavyzdžių sprendime **?** jau matėme, kad taip ir yra.
Dabar visiškai aišku, kad skaičiaus nelyginių ir lyginių daliklių santykis priklauso tik nuo dvejeto laipsnio to skaičiaus skaidinyje pirminiais dauginamaisiais. Jei tas laipsnis lygus m, tai nelyginių daliklių skaičiaus ir lyginių daliklių skaičiaus santykis lygus $\frac{1}{m}$.
Teisingas atsakymas **A**.

S28. (E) Kitas skaičius

? Tikrinkime atsakymus. Pradėkime nuo 1. Atlikę pirmą procedūrą gausime $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Atlikę antrą vėl gausime $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Vadinasi, rezultatų seka bus vienetai.
Tikrinkime 2. Po pirmo žingsnio gausime $2 \cdot 2 - 1 = 3$. Po antro žingsnio $2 \cdot 3 - 1 = 5$, po trečio $2 \cdot 5 - 1 = 9$, po ketvirto $2 \cdot 9 - 1 = 17$. Po kažkelinto žingsnio turime gauti $2^{100} + 1$. Tai mums pasufleruoja, kad gautus rezultatus reikia užrašyti išskiriant dviejų laipsnį:

$$3 = 2 + 1, \quad 5 = 2^2 + 1, \quad 9 = 2^3 + 1, \quad 17 = 2^4 + 1, \ \dots .$$

Seka

$$2 \to 2 + 1 \to 2^2 + 1 \to 2^3 + 1 \to \cdots \to 2^{100} + 1 \to 2^{101} + 1 \to \cdots$$

iš tikrųjų gaunama pagal sąlygos taisyklę, pavyzdžiui, $2 \cdot (2^{100} + 1) - 1 = 2^{101} + 1$. Matome, kad pakartoję procedūrą 100 kartų, iš 2 gauname $2^{100} + 1$. Kadangi 3 iš 2 gauname pirmu žingsniu, tai $2^{100} + 1$ iš 3 gauname kaip tik per 99 žingsnius. Beje, aišku, kad atsakymas 3 yra vienintelis teisingas: jeigu pradinis skaičius bus mažesnis, tai ir po 99 žingsnių rezultatas bus mažesnis, o jeigu jis bus didesnis, tai ir po 99 žingsnių rezultatas bus didesnis.
Bet atsakymo 3 tarp pateiktųjų nėra.
Renkamės atsakymą **E**.

! Nesunku gauti bendrą formulę, t. y. pasakyti, į ką pavirs skaičius a_1 po $n - 1$ žingsnio. Turime:

$$a_n = 2a_{n-1} - 1.$$

Atimkime po 1 iš abiejų pusių:

$$a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1).$$

Dabar viskas paprasta:

$$a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1) = 2 \cdot 2(a_{n-2} - 1) = \cdots = 2^{n-2}(a_2 - 1) = 2^{n-1}(a_1 - 1),$$

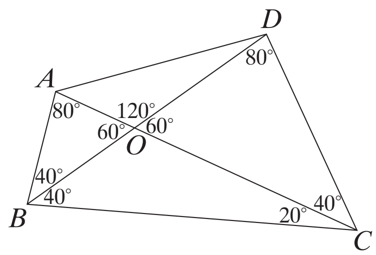
todėl $a_n = 2^{n-1}(a_1 - 1) + 1$. Pasižiūrėkime, koks turi būti a_1, kad po 99 žingsnių gautume $2^{100} + 1$. Tada

$$2^{100} + 1 = 2^{99}(a_1 - 1) + 1, \quad 2^{100} = 2^{99}(a_1 - 1), \quad a_1 - 1 = 2, \quad a_1 = 3.$$

Teisingas atsakymas **E**.

S29. (D) 120°

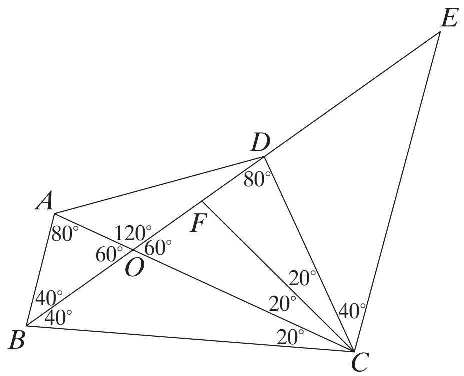
! Pažymėkime įstrižainių BD ir AC susikirtimo tašką O. Kadangi $AC = BC$, tai $\angle CAB = 80^\circ$, $\angle ABO = \angle OBC = 40^\circ$. Sužymėkime brėžinyje visų kampų laipsninius dydžius, kuriuos žinome ar iš karto randame. Trikampiai AOB ir DOC panašūs (pagal 3 kampus), todėl $AO : DO = OB : OC$. Bet tada trikampiai AOD ir BOC panašūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).



Vadinasi, $\angle DAO = 40^\circ$, ir ieškomasis $\angle BAD = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Apibrėžkime apskritimą apie trikampį ABD. Jeigu taškas C būtų apskritimo išorėje, tai į lanką AD besiremiantis kampas ACD būtų mažesnis už 40°, o jeigu viduje — tai didesnis už 40°. Vadinasi, taškas C yra apskritime. Bet tada $\angle DAO = \angle DBC = 40^\circ$, nes remiasi į tą patį lanką CD.

!!! Įdomus toks klausimas: nejaugi negalima suskaičiuoti visų reikalingų kampų nesiremiant panašumu ar įbrėžtiniais kampais? Pasirodo, kad tai padaryti įmanoma papildžius brėžinį. Pratęskime BD ir išveskime tiesę CE taip, kad $\angle DCE = 40^\circ$. Tada $\angle ECB = 100^\circ$, $\angle EBC = 40^\circ$, taigi ir $\angle BEC = 40^\circ$. Vadinasi, $\triangle BCE$ lygiašonis, ir $CB = CE$. Todėl $\triangle DCA = \triangle DCE$, ir $\angle DAC = \angle DEC = 40^\circ$.



Galima spręsti ir kitaip. Išveskime $\angle ACD$ pusiaukampinę iki susikirtimo su įstrižaine BD taške F. Kadangi $\angle DCF = 20^\circ$, $\angle CDF = 80^\circ$, tai ir $\angle DFC = 80^\circ$, $\triangle DCF$ lygiašonis, $DC = CF$. Todėl $\triangle BCF = \triangle ACD$ pagal dvi kraštines ir 40° kampą tarp jų. Vadinasi, $\angle DAC = \angle FBC = 40^\circ$.

S30. (B) 15

? Spėkime — sakykime, kad jo planuotas greitis 10 km/h. Tada didesnis greitis 15 km/h, didžiausias 20 km/h. Vadinasi, jo planuotas laikas dvigubai didesnis už trumpiausią laiką. Taigi, trumpiausias laikas yra 8 h, o planuotas 16 h. Todėl kelias AB yra 160 km, vidutiniu greičiu 15 km/h jis būtų įveiktas per $\frac{160}{15} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$ h, o tai nėra 4 h mažiau, kaip to reikalauja sąlyga.
Tikriname atsakymą **B**. Tada planuotas greitis 15 km/h, didesnis 20 km/h, didžiausias 25 km/h. Imkime patogų atstumą 300 km. Tada planuotas laikas 20 h, mažesnysis 15 h, mažiausias 12 h, ir matome, kad visos sąlygos išpildytos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pažymėkime suplanuotą greitį v km/h, o suplanuotą laiką t. Tada kelias iš A į B lygus vt. Jeigu jis važiuotų 5 km/h didesniu greičiu, tai greitis būtų $(v + 5)$ km/h, laikas $t - 5$ valandos, o jeigu važiuotų 10 km/h didesniu greičiu, tai greitis būtų $(v + 10)$ km/h, o laikas $t - 8$ valandos. Kadangi kelias visais trimis atvejais nuvažiuojamas tas pats, tai

$$vt = (v + 5)(t - 5) = (v + 10)(t - 8).$$

Iš lygties $vt = (v + 5)(t - 5)$ turime $5t = 5v + 25$, o iš lygties $(v + 5)(t - 5) = (v + 10)(t - 8)$ gauname $5t = 3v + 55$. Todėl $5v + 25 = 3v + 55$, $2v = 30$, $v = 15$ km/h.
Kaip visuomet tekstiniuose uždaviniuose, atsakymą patikriname (tai jau padaryta anksčiau).
Teisingas atsakymas **B**.