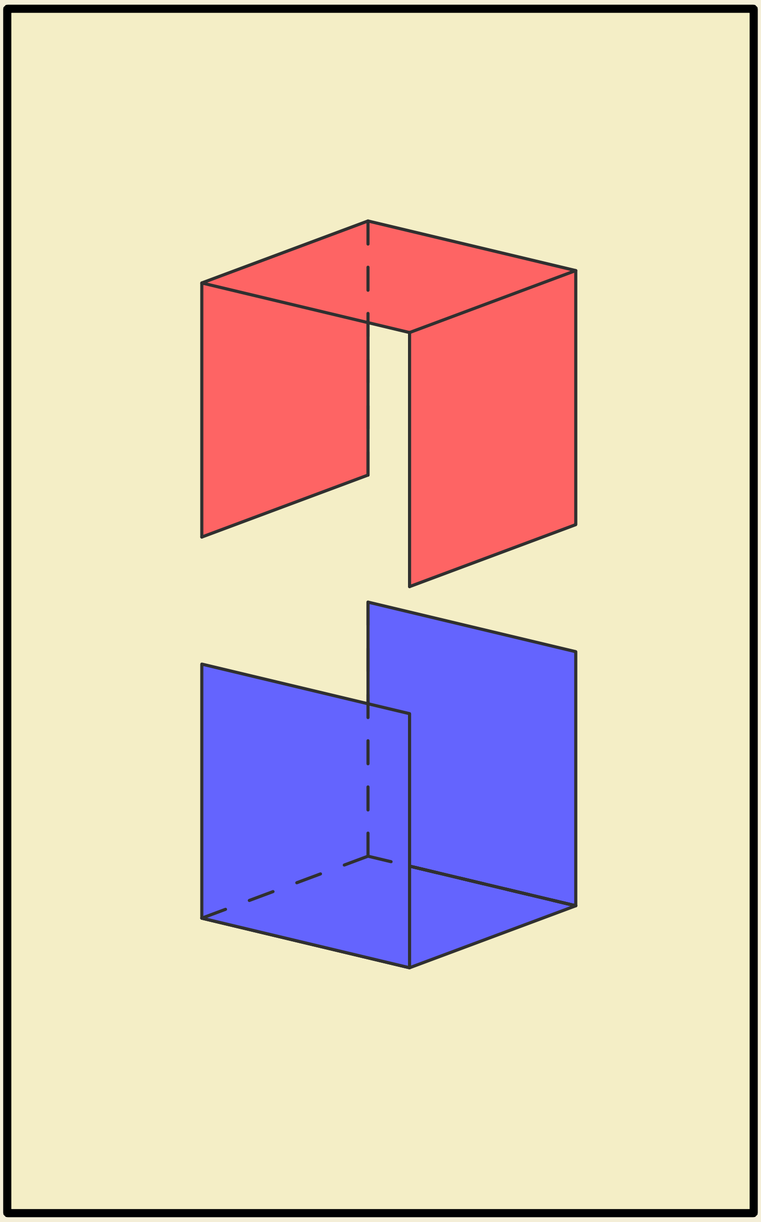
Kengūra 2015

Užduotys ir sprendimai



Bičiulis

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2015

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Jonas Šiurys

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesniųjų klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 50000 Lietuvos 1 – 12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2015 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia gali būti šmaikšti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2015 metų kovo 19 dieną keliavo ir gausiai sprendė 5–6 klasių (*Bičiulio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų kengūriniai sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Bičiulis, 5 klasė, 50 geriausiųjų

Adomas Traubas,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	150.00
Domantas Stanys,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	141.00
Ernestas Pučinskas,	Ukmergės Dukstynos pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	135.00
Elzė Amilevičiūtė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	135.00
Danielė Ramanauskaitė,	Progimnazija „Magis“,	Vilniaus m.,	133.75
Laurynas Žukauskas,	Rožyno progimnazija,	Panevėžio m.,	132.50
Robertas Zakšauskas,	Baltupių progimnazija,	Vilniaus m.,	132.50
Monika Žemgulytė,	„Saulės“ privati gimnazija,	Vilniaus m.,	132.50
Urtė Urbonavičiūtė,	„Verdenės“ progimnazija,	Klaipėdos m.,	131.25
Gabrielė Marija Pratkutė,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	128.75
Nikita Rockinas,	„Santaros“ vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	128.75
Elizaveta Popova,	Lazdynų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	128.75
Augustinas Jarockis,	„Šaltinio“ progimnazija,	Panevėžio m.,	127.50
Agnė Žitkauskaitė,	Vilkaviškio S. Nėries pagrindinė mokykla,	Vilkaviškio r.,	127.50
Julius Leonavičius,	LSMU vidurinė mokykla,	Kauno m.,	127.25
Karolina Zimkutė,	G. Petkevičaitės Bitės gimn. Pušaloto progimn. sk.,	Pasvalio r.,	127.00
Austėja Žvirblytė,	Pašlūžmio mokykla-daugiafunkcis centras,	Klaipėdos r.,	126.25
Emilija Kanaporytė,	Kėdainių Juozo Paukštelio pagrindinė mokykla,	Kėdainių r.,	126.25
Marius Mikelionis,	Taikos progimnazija,	Vilniaus m.,	125.75
Taurimas Valeika,	Juozo Grušo meno vidurinė mokykla,	Kauno m.,	125.00
Meda Večkytė,	Antano Vienuolio pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	123.75
Matas Sakalauskas,	Martyno Mažvydo progimnazija,	Vilniaus m.,	123.75
Vilius Stankevičius,	„Verdenės“ progimnazija,	Klaipėdos m.,	123.75
Rokas Baltrušaitis,	Prano Mašioto progimnazija,	Klaipėdos m.,	121.25
Evenika Mekšraitytė,	Vilkaviškio S. Nėries pagrindinė mokykla,	Vilkaviškio r.,	121.25
Simonas Lava,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	121.25
Patricija Miliun,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	118.00
Jonė Bagdanskytė,	Kuršėnų Daugėlių pagrindinė mokykla,	Šiaulių r.,	117.50
Tautvydas Pudžmys,	Lenkimų S. Daukanto mokykla,	Skuodo r.,	117.50
Kamilė Žemgulytė,	„Saulės“ privati gimnazija,	Vilniaus m.,	117.25
Alicija Jankovska,	Šolomo Aleichemo ORT gimnazija,	Vilniaus m.,	116.25
Beatričė Karlonaitė,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	116.25
Aldas Lenkšas,	Tuskulėnų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	116.25
Džiugas Budreika,	„Šaltinėlio“ privati mokykla,	Vilniaus m.,	113.75
Beatričė Zelenkevičiūtė,	KTU Vaižganto progimnazija,	Kauno m.,	113.75
Donatas Sanda,	Alfonso Lipniūno progimnazija,	Panevėžio m.,	113.75
Evelina Veliučkevič,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	113.00
Arvydas Vingis,	Martyno Mažvydo pagrindinė mokykla,	Kauno m.,	112.50
Martynas Albertas Ramanauskas,	Riešės gimnazija,	Vilniaus r.,	112.50
Augustas Giedraitis,	Juozo Grušo meno vidurinė mokykla,	Kauno m.,	112.25
Nortas Barutis,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	112.00
Jonas Kairys,	Martyno Mažvydo progimnazija,	Vilniaus m.,	111.75
Antanas Vasiliauskas,	Kazimiero Paltaroko gimnazija,	Panevėžio m.,	111.25
Mėja Plytnikaitė,	Simono Daukanto progimnazija,	Vilniaus m.,	111.25
Dovilė Lipnevičiūtė,	„Šaltinio“ pagrindinė mokykla,	Marijampolės sav.,	111.25
Radvilas Pelanis,	Jono Basanavičiaus progimnazija,	Vilniaus m.,	111.25
Daiva Kubilinskaitė,	Tytuvėnų gimnazija,	Kelmės r.,	111.00
Tomas Dambrauskas,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	110.75
Benedict Martinas Magee,	Žeimelio gimnazija,	Pakruojo r.,	110.75
Agnė Augustė Vėgėlytė,	Vilniaus tarptautinė Meridiano mokykla,	Vilniaus m.,	110.75
Kamilė Balžekaitė,	LSMU vidurinė mokykla,	Kauno m.,	110.75
Bitė Deksnytė,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	110.75

Bičiulis, 6 klasė, 50 geriausiųjų

Ugnė Mickutė,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	145.00
Ieva Modgabytė,	Simono Dacho progimnazija,	Klaipėdos m.,	145.00
Greta Duko,	Vilniaus Jeruzalės mokykla,	Vilniaus m.,	143.75
Anastasija Krapenenkova,	Aleksandro Puškino gimnazija,	Kauno m.,	143.75
Karolis Michalauskas,	Punios mokykla,	Alytaus r.,	140.00
Nedas Domkus,	„Vilties“ pagrindinė mokykla,	Panevėžio m.,	140.00
Simonas Melaika,	„Saulėtekio“ progimnazija,	Panevėžio m.,	137.50
Danielė Martišiūtė,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	137.50
Naglis Mikalkėnas,	Ragainės progimnazija,	Šiaulių m.,	137.50
Nojus Džiaugys,	Vilniaus „Versmės“ katalikiškoji gimnazija,	Vilniaus m.,	135.00
Martynas Malakauskas,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	133.75
Rokas Burneika,	Ukmergės „Šilo“ pagrindinė mokykla,	Ukmergės r.,	133.75
Vilius Gečas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	133.75
Benediktas Belevičius,	Balsių pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	133.00
Eimantas Vaičiūnas,	Prienų „Ąžuolo“ progimnazija,	Prienų r.,	132.50
Mantas Skyrius,	„Saulės“ privati gimnazija,	Vilniaus m.,	131.25
Denis Moskaliovas,	Aleksandro Puškino gimnazija,	Kauno m.,	131.25
Natanas Nainys,	Žygimanto Augusto pagrindinė mokykla,	Vilniaus m.,	131.25
Aistė Sliževskytė,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	128.75
Ugnė Kiriuškinaitė,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	128.75
Karina Jotko,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	128.75
Eglė Rimšelytė,	Trakų Vokės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	128.75
Martynas Kulys,	Vilniaus Jeruzalės mokykla,	Vilniaus m.,	128.75
Neda Narmontaitė,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	126.25
Arūnas Griškus,	KTU Vaižganto progimnazija,	Kauno m.,	126.00
Šarūnas Griškus,	KTU Vaižganto progimnazija,	Kauno m.,	126.00
Dovydas Tribuišis,	Pasvalio Svalios pagrindinė mokykla,	Pasvalio r.,	125.00
Vytenis Anthony Mekionis,	Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija,	Kauno r.,	124.75
Anton Zagzin,	„Santaros“ vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	124.50
Donatas Sinkevičius,	Eišiškių Stanislovo Rapolionio gimnazija,	Šalčininkų r.,	123.75
Rokas Grindenka,	Taikos progimnazija,	Vilniaus m.,	123.75
Adomas Bagdonas,	Kaišiadorių Vaclovo Giržado progimnazija,	Kaišiadorių r.,	123.75
Mantas Kasčiūnas,	Vilniaus „Ąžuolyno“ progimnazija,	Vilniaus m.,	123.75
Vakarė Raškinytė,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	123.75
Rapolas Pocevičius,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	122.50
Martynas Amalevičius,	Kėdainių „Ryto“ pagrindinė mokykla,	Kėdainių r.,	122.50
Dovydas Rutkauskas,	Kazlų Rūdos pagrindinė mokykla,	Kazlų rūdos sav.,	122.50
Mantas Lukošiūnas,	„Sandoros“ progimnazija,	Šiaulių m.,	122.50
Pavel Bandalevič,	Šalčininkų Jano Sniadeckio gimnazija,	Šalčininkų r.,	122.25
Daniilas Bondarenko,	Sofijos Kovalevskajos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	122.00
Vija Turulytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	121.25
Marijus Cvilikas,	KTU Vaižganto progimnazija,	Kauno m.,	121.25
Dovydas Vadišius,	Mažvydo progimnazija,	Klaipėdos m.,	121.25
Džoni Kuprašvili,	Vasilijaus Kačialovo gimnazija,	Vilniaus m.,	121.25
Rytis Dzemyda,	Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija,	Kauno r.,	121.25
Rugilė Matažinskaitė,	„Volungės“ pagrindinė mokykla,	Alytaus m.,	121.25
Linas Nikiperavičius,	Garliavos Jonučių progimnazija,	Kauno r.,	121.25
Mija Pilkaitė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	120.75
Aleksandra Špakaitė,	Sofijos Kovalevskajos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	120.00
Erikas Ulys,	Juozo Grušo meno vidurinė mokykla,	Kauno m.,	120.00
Šarūnas Jacikas,	Raseinių Šaltinio progimnazija,	Raseinių r.,	120.00
Augustė Jaškūnaitė,	Vilkaviškio S. Nėries pagrindinė mokykla,	Vilkaviškio r.,	120.00
Lukas Eigėlis,	Petro Vileišio progimnazija,	Vilniaus m.,	120.00
Aušrinė Zeleckytė,	Mikalojaus Daukšos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	120.00

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

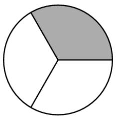
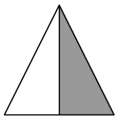
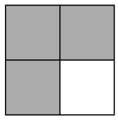
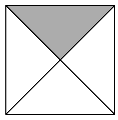
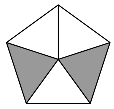
PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

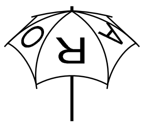
2015 m. *Bičiulio* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

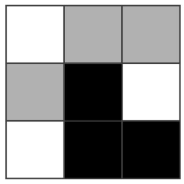
1. Kurios figūros užtušuota lygiai pusė ploto?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

2. Ant mano skėčio viršaus užrašyta KANGAROO taip, kaip parodyta paveikslėlyje dešinėje. Kuriame iš žemiau esančių paveikslėlių pavaizduotas ne mano skėtis?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

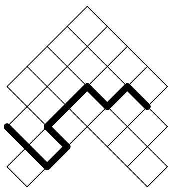
3. Tomas nuspalvino 9 kvadratėlius juodai, baltai ir pilkai (žr. pav.). Kiek mažiausiai kvadratėlių jam reikia perspalvinti, kad jokie du kvadratėliai, turintys bendrą kraštinę, nebūtų tos pačios spalvos?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

4. Močiutė turi 10 vištų. Ji pastebėjo, kad 5 iš jų padeda po kiaušinį kasdien, o likusios 5 vištos padeda po kiaušinį kas antrą dieną. Kiek kiaušinių visos 10 vištų padės per 10 dienų?
A) 75 **B)** 60 **C)** 50 **D)** 25 **E)** 10

5. Paveikslėlyje kiekvieno kvadratėlio plotas lygus 4 cm^2. Koks yra paryškintos linijos ilgis?



A) 16 cm **B)** 18 cm **C)** 20 cm **D)** 21 cm **E)** 23 cm

6. Kuri iš šių trupmenų yra mažesnė už 2?

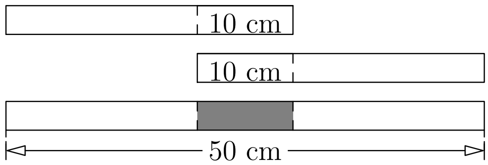
A) $\frac{19}{8}$ **B)** $\frac{20}{9}$ **C)** $\frac{21}{10}$ **D)** $\frac{22}{11}$ **E)** $\frac{23}{12}$

7. Melionas ir arbūzas kartu sveria 8 kg. Arbūzas yra 2 kg lengvesnis už melioną. Kiek sveria melionas?
A) 2 kg **B)** 3 kg **C)** 4 kg **D)** 5 kg **E)** 6 kg

8. Lentoje užrašytas natūralusis skaičius, kuris duoda liekaną 7 dalijant iš 9. Onutė nutrynė šį skaičių ir vietoj jo parašė dvigubai didesnį. Kokią liekaną dalijant iš 9 duoda naujasis skaičius?
A) 1 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

9. Kambarinio augalo kiekviena šakelė turi arba penkis lapelius, arba du lapelius ir vieną žiedą. Iš viso augalas turi 6 žiedus ir 32 lapelius. Kiek šakelių turi augalas?
A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 16

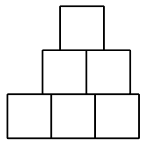
10. Aistė turi 4 vienodo ilgio popierines juosteles. Suklijavusi 2 iš jų taip, kad persidengimo ilgis būtų 10 cm, ji gavo 50 cm juostelę. Kitas dvi juosteles ji nori suklijuoti taip, kad gautų 56 cm ilgio juostelę. Kokio ilgio turėtų būti persidengimas?



A) 4 cm **B)** 6 cm **C)** 8 cm **D)** 10 cm **E)** 12 cm

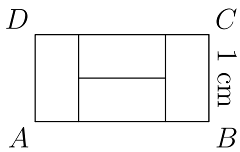
Klausimai po 4 taškus

11. Kvadrato kraštinės ilgis yra 1 cm. Iš 6 kvadratų Domas sudėjo paveikslėlyje pavaizduotą figūrą. Koks yra figūros perimetras?
A) 9 cm **B)** 10 cm **C)** 11 cm **D)** 12 cm **E)** 13 cm

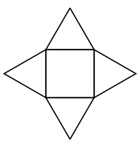
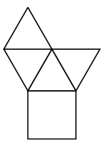
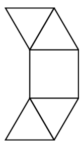
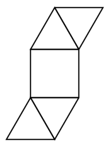
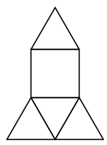


12. Marija visus metus kasdien užsirašo tos dienos datą ir suskaičiuoja jos mėnesio ir dienos skaitmenų sumą. Pavyzdžiui, kovo 19 dieną ji rašo 03.19 ir sudeda: $0 + 3 + 1 + 9 = 13$. Kokią didžiausią skaitmenų sumą ji gali gauti?
A) 7 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 20

13. Stačiakampį $ABCD$ paveikslėlyje sudaro 4 lygūs stačiakampiai. Koks yra AB ilgis, jei BC ilgis yra 1 cm?
A) 4 cm **B)** 3 cm **C)** 2 cm **D)** 1 cm **E)** 0,5 cm



14. Kuri iš šių penkių išklotinių negali būti piramidės išklotinė?

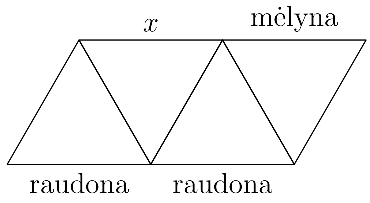
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

15. Šoklių gatvės vienoje pusėje išsirikiavę stovi 9 namai. Kiekviename name gyvena bent vienas žmogus. Bet kuriuose dviejuose gretimuose namuose gyvena ne daugiau šešių žmonių. Kiek daugiausiai žmonių gali gyventi Šoklių gatvėje?
A) 23 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 29 **E)** 31

16. Saulė ir jos mama abi gimusios sausį. Šiandien, 2015 metų kovo 19 dieną, Saulė sudėjo savo gimimo metus, mamos gimimo metus, savo amžių ir mamos amžių. Kokį skaičių ji gavo?
A) 4028 **B)** 4029 **C)** 4030 **D)** 4031 **E)** 4032

17. Stačiakampio plotas lygus 12. Jo kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai. Kuris iš žemiau išvardytų skaičių gali būti stačiakampio perimetras?
A) 20 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 48

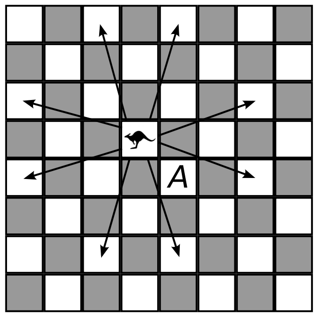
18. Paveikslėlyje pavaizduota figūra sudaryta iš 4 trikampių. Matas spalvina figūros kraštines mėlynai, žaliai arba raudonai. Jis nori, kad bet kurio trikampio kraštinės būtų skirtingų spalvų. Trys kraštinės jau nuspalvintos taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Kokia spalva Matas gali spalvinti kraštinę x?



A) Tik mėlyna **B)** Tik žalia **C)** Tik raudona
D) Bet kuria iš trijų spalvų **E)** Toks nuspalvinimas yra neįmanomas

19. Maiše yra 3 žali obuoliai, 5 geltoni obuoliai, 7 žalios kriaušės ir 2 geltonos kriaušės. Austėja nežiūrėdama traukia vaisius iš maišo po vieną. Kiek mažiausiai vaisių ji turi ištraukti, kad tarp jos paimtų vaisių būtų bent vienas obuolys ir bent viena kriaušė tos pačios spalvos?
A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

20. Nauja šachmatų figūra *kengūra* kiekvienu ėjimu gali eiti 3 langelius vertikaliai ir 1 horizontaliai arba 3 langelius horizontaliai ir 1 vertikaliai. Paveikslėlyje rodyklėmis pažymėti visi galimi kengūros ėjimai iš nurodyto langelio. Kiek mažiausiai ėjimų reikia kengūrai, kad iš to langelio ji pasiektų langelį A?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Klausimai po 5 taškus

21. Sudėties pavyzdyje vienodos raidės atitinka vienodus skaitmenis, o skirtingos raidės – skirtingus skaitmenis. Kokį skaitmenį atitinka raidė X?

$$\begin{array}{r} X \\ +\quad X \\ YY \\ \hline ZZZ \end{array}$$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

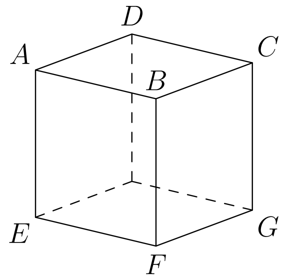
22. Giedrius nusipirko 3 knygas. Už pirmą knygą jis sumokėjo pusę savo santaupų ir 1 eurą. Už antrąją – pusę likusių pinigų ir 2 eurus. Trečioji knyga kainavo pusę to, kas liko nusipirkus dvi knygas, ir 3 eurus. Paaiškėjo, kad Giedrius išleido visas savo santaupas. Kiek kainavo 3 knygos?
A) 36 eurus **B)** 45 eurus **C)** 34 eurus **D)** 65 eurus **E)** 100 eurų

23. Keturių natūraliųjų skaičių suma lygi 39. Dviejų iš jų sandauga lygi 80, o likusių kitų dviejų sandauga taip pat lygi 80. Kam lygus didžiausias iš tų keturių skaičių?
A) 8 **B)** 10 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 25

24. Skaičius 100 dauginamas iš 2 arba iš 3. Prie gauto skaičiaus pridedamas 1 arba 2, o naujai gautas skaičius dalijamas iš 3 arba iš 4. Rezultatas yra sveikasis skaičius. Koks tai skaičius?
A) 50 **B)** 51 **C)** 67 **D)** 68 **E)** 76

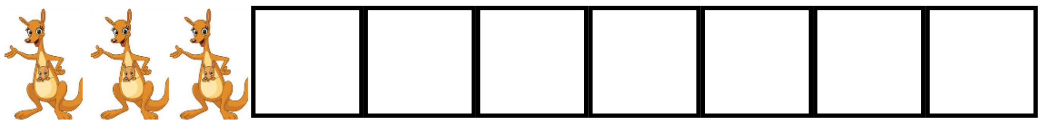
25. Keturženklio skaičiaus $\overline{abcd}$ skaitmenys a, b, c ir d tenkina nelygybes $a < b < c < d$. Koks yra didžiausias įmanomas dviženklių skaičių $\overline{bd}$ ir $\overline{ac}$ skirtumas $\overline{bd} - \overline{ac}$?
A) 86 **B)** 61 **C)** 56 **D)** 50 **E)** 16

26. Viltė ant kiekvienos kubo sienos užrašė po skaičių. Tada kiekvienai viršūnei priskyrė sumą 3 skaičių, užrašytų ant sienų, kurioms priklauso viršūnė. Pavyzdžiui, viršūnei B ji priskyrė skaičius, užrašytus ant sienų $BCDA$, $BAEF$ ir $BFGC$. Viršūnėms C, D ir E priskirtos reikšmės yra atitinkamai 14, 16 ir 24. Kokią reikšmę Viltė priskyrė viršūnei F?
A) 15 **B)** 19 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 26



27. Algis važiuoja traukiniu. Kiekviename traukinio vagone yra toks pats skaičius kupė. Algio vieta yra 50-oje kupė skaičiuojant nuo lokomotyvo, o ši kupė yra 7-ame vagone. Kiek kupė yra viename vagone?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

28. Kiek yra būdų patalpinti 3 kengūras į tris skirtingus langelius taip, kad jokios 2 kengūros nebūtų gretimuose langeliuose?

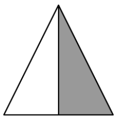


A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

29. Tiesėje pažymėti keturi taškai. Jų tarpusavio atstumai, surašyti didėjimo tvarka, yra tokie: 2, 3, k, 11, 12, 14. Kokia yra k reikšmė?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

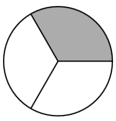
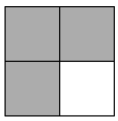
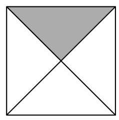
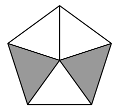
30. Iš kubelių, kurių briaunos ilgis yra 1, Simas sudėjo kubą, kurio briaunos ilgis yra 4. Tada tris jo sienas berniukas nudažė raudonai, o likusias tris – mėlynai, ir nebuvo nė vieno kubelio, kuris turėtų tris raudonai nudažytas sienas. Kiek yra kubelių, turinčių ir bent vieną raudoną, ir bent vieną mėlyną sieną?
A) 0 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 24 **E)** 32

Bičiulio užduočių sprendimai

1. (B) 

? Greitosiomis peržvelgę atsakymus matome, kad trikampis **B** padalytas į dvi dalis per savo simetrijos ašį ir viena iš šių dalių užtušuota, vadinasi, užtušuota pusė trikampio ploto. Renkamės atsakymą **B**.

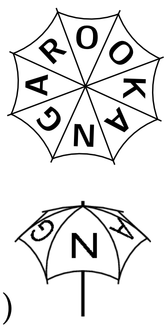
! Lieka įsitikinti, kad paveikslėliuose **A**, **C**, **D** ir **E** užtušuotas plotas yra arba didesnis, arba mažesnis už pusę figūros ploto.

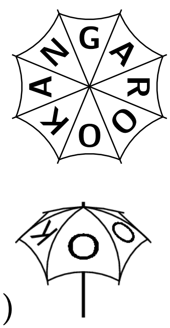
A)  **C)**  **D)**  **E)** 

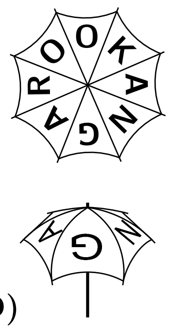
Skritulys **A** padalytas į tris lygias dalis, užtušuota viena dalis, t. y. $\frac{1}{3}$ figūros ploto. Kvadratai **C** ir **D** padalyti į keturias dalis, o iš jų užtušuotos atitinkamai trys ir viena dalys, taigi **C** figūros užtušuota $\frac{3}{4}$, o figūros **D** – $\frac{1}{4}$ ploto. Galiausiai, penkiakampyje **E** užtušuotos dvi iš penkių lygių dalių, o tai yra $\frac{2}{5}$ viso figūros ploto.

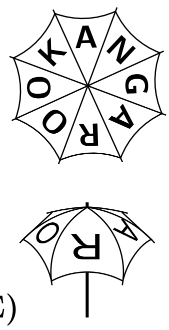
2. (C) 

! Teisingą atsakymą galima parinkti atmetimo būdu. Paveikslėliuose (žr. žemiau) parodyta, kad aš galiu taip pasukti savo skėtį, kad jis atrodytų taip, kaip atsakymuose **A**, **B**, **D** ir **E**.


A)


B)

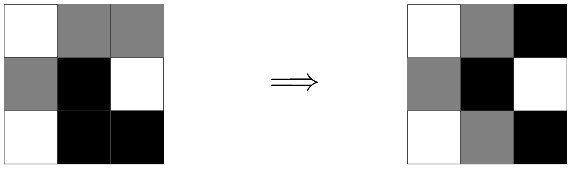

D)


E)

Taigi lieka vienintelis galimas variantas **C**. Iš tiesų, atsakyme **C** pavaizduotas skėtis tikrai ne mano, nes raidė **R** ant šio skėčio užrašyta atbulai.

3. **A** 2

! Matome, kad yra du pilki kvadratėliai, turintys bendrą kraštinę, todėl Tomui reikia perspalvinti



bent vieną iš jų. Taip pat reikia perspalvinti bent vieną iš juodų kvadratėlių. Paveikslėlyje parodyta, kad dviejų perspalvinimų užtenka uždavinio sąlygai išpildyti.

4. **A** 75

! Kiekviena višta, kuri deda kasdien, per 10 dienų padės 10 kiaušinių. Tokių vištų yra 5, tai iš viso jos padės $5 \cdot 10 = 50$ kiaušinių. Višta, kuri deda kas antrą dieną, per 10 dienų padės 5 kiaušinius. Tokių vištų irgi yra 5 ir iš viso jos padės $5 \cdot 5 = 25$ kiaušinius. Taigi per 10 dienų vištos padės $50 + 25 = 75$ kiaušinius.

!! Penkios močiutės vištos deda kasdien, tai per 10 dienų jos padės $5 \cdot 10 = 50$ kiaušinių. Kitos 5 vištos deda dvigubai rečiau, tai ir kiaušinių padės dvigubai mažiau: $50 : 2 = 25$. Taigi iš viso vištos padės $50 + 25 = 75$ kiaušinius.

5. **B** 18 cm

! Sąlygoje pasakyta, kad kvadratėlio plotas lygus 4 cm^2, todėl jo kraštinės ilgis yra lygus 2 cm. Paryškinta linija eina kvadratėlių kraštinėmis, taigi belieka suskaičiuoti, kiek tokių kraštinių yra. Tokių kraštinių yra 9, todėl visos linijos ilgis lygus $9 \cdot 2$ cm $= 18$ cm.

6. **E** $\frac{23}{12}$

? Čia laimi tie, kurie mėgsta tikrinti nuo galo. Atsakyme **E** trupmena $\frac{23}{12}$ yra mažesnė už $\frac{24}{12} = 2$, nes padidinus skaitiklį, trupmena padidėja. Kadangi gali būti tik vienas teisingas atsakymas, renkamės **E**.

! Nesunku patikrinti, kad atsakymai **A**, **B**, **C** ir **D** netinka: $\frac{19}{8} = 2\frac{3}{8} > 2$; $\frac{20}{9} = 2\frac{2}{9} > 2$; $\frac{21}{10} = 2\frac{1}{10} > 2$; $\frac{22}{11} = 2$. O atsakymas **E** tinka: $\frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$.

!! Patikrinti, ar trupmena mažesnė už 1, labai paprasta – užtenka palyginti skaitiklį su vardikliu. Jei skaitiklis didesnis už vardiklį, tai ir trupmena didesnė už 1, jei skaitiklis mažesnis už vardiklį, tai trupmena mažesnė už 1. Sumažinkime visas trupmenas pusiau, t. y. padauginkime vardiklį iš 2, ir pažiūrėkime, ar trupmena mažesnė už 1: $\frac{19}{16} > 1$; $\frac{20}{18} > 1$; $\frac{21}{20} > 1$; $\frac{22}{22} = 1$; $\frac{23}{24} < 1$. Paskutinė trupmena yra mažesnė už vienetą, todėl pradinė trupmena $\frac{23}{11}$ bus mažesnė už 2. Renkamės atsakymą **E**.

7. **D** 5

? Arbūzas yra lengvesnis už melioną, o kartu jie sveria 8 kg, todėl arbūzas sveria mažiau nei 4 kg, o melionas daugiau nei 4 kg. Pažiūrėję į atsakymus greitai nustatome, kad arbūzas sveria 3 kg, o melionas 5 kg.

! Uždavinį galima išspręsti sudarius paprastą lygčių sistemą. Tarkime, kad arbūzas sveria x kg, o melionas y kg. Tada $x + y = 8$ ir $y - x = 2$. Sudėję abi lygtis, gauname $2y = 10$, arba $y = 5$.

8. (C) 5

? Septyni duoda liekaną 7 dalijant iš 9, o $2 \cdot 7 = 14$ duoda liekaną 5 dalijant iš 9. Taigi spėjame, kad teisingas atsakymas yra **C**.

! Tarkime skaičius n duoda liekaną 7 dalijant iš 9. Šį skaičių galima užrašyti taip: $n = 9k + 7$. Padauginę abi lygybės puses iš 2 gausime $2n = 18k + 14 = 18k + 9 + 5 = 9(2k + 1) + 5$. Taigi $2n$ duos liekaną 5 dalijant iš 9.

9. (A) 10

! Tarkime, kad augalas turi x šakelių su žiedais ir y šakelių be žiedų. Tuomet jis turi $2x + 5y$ lapelius. Mes žinome, kad yra 6 šakelės su žiedais ir 32 lapeliai. Taigi $x = 6$ ir $2 \cdot 6 + 5y = 32$. Iš pastarosios lygties randame, kad $y = 4$. Iš viso šakelių yra $x + y = 10$.

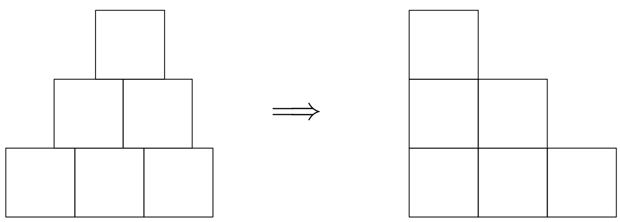
!! Aišku, kad augalas turi 6 „žydinčias“ šakeles. Kiekviena jų turi 2 lapelius, taigi žydinčios šakelės turi $6 \cdot 2 = 12$ lapelių. Kiti $32 - 12 = 20$ lapelių priklauso „penkialapėms“ šakelėms, taigi jų yra $20 : 5 = 4$. Iš viso yra $6 + 4$ šakelių.

10. (A) 4 cm

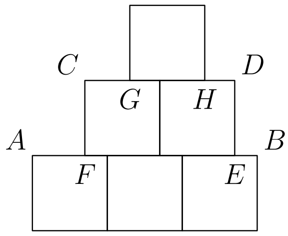
! Tarkime, kad juosteles ne klijuojame, o tik uždedame vieną ant kitos. Iš sąlygos žinome, kad sudėję 2 juosteles taip, kad persidengimo ilgis būtų 10 cm, gauname 50 cm ilgio juostelę. Dabar vieną juostelę laikykime prispaudę, o kitą traukime tol, kol gausime 56 cm ilgio juostelę. Kiek mes patraukėme? 6 cm. Taigi ir persidengimas sumažėjo 6 cm ir dabar yra lygus 10 cm − 6 cm = 4 cm.

11. (D) 12 cm

? Intuityviai aišku, kad pristūmus visus kvadratėlius prie krašto (žr. pav.) gausime tokio paties perimetro figūrą. Šios pakeistos figūros perimetras lygus 12 cm.



! Įrodykime, kad stumdant kvadratėlius taip, kaip darėme dalyje **?**, figūros perimetras nesikeičia. Iš tiesų, stumdant „antro aukšto“ kvadratėlių bloką $CDEF$, atkarpų AF ir BE ilgių suma nesikeičia, nes $AF+BE = AB-EF = 3-2 = 1$. Panašiai samprotaudami įrodome, kad $CG + HD = CD - GH = 2 - 1 = 1$.



Likusį perimetrą apskaičiuojame suskaičiavę kvadratėlių kraštines, kurių yra 10.

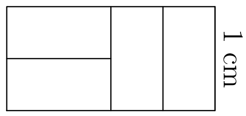
12. (E) 20

! Skaičiuokime mėnesio ir dienos skaitmenų sumą atskirai. Mėnesiai numeruojami nuo 1 iki 12. Kuris iš šių skaičių turi didžiausią skaitmenų sumą? Čia reikia neapsirikti – didžiausio skaičiaus skaitmenų suma nebūtinai didžiausia. Pavyzdžiui, nors 10 yra didesnis skaičius už 9, bet jo skaitmenų suma yra mažesnė. Mėnesių skaičius gali arba neturėti dešimčių skaitmens (tada galime laikyti, kad dešimčių skaitmuo yra 0: išties, jis nekeičia skaitmenų sumos), arba dešimčių skaičius gali būti lygus 1. Jeigu dešimčių skaitmuo yra 0, tai didžiausias galimas vienetų skaitmuo yra 9, o jei dešimčių skaitmuo yra 1, tai didžiausias vienetų skaitmuo tegali būti 2. Telieka palyginti du skaičius: 09 ir 12. Iš jų didesnę skaitmenų sumą (taigi ir didžiausią skaitmenų sumą iš visų mėnesių numerių) turi 09.

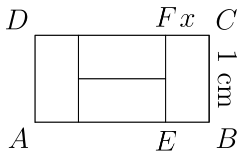
Panašiu būdu surasime, kokia mėnesio diena turi didžiausią skaitmenų sumą. Didžiausias dienų skaičius mėnesyje gali būti 31. Taigi, dešimčių skaitmuo kinta nuo 0 iki 3. Kai dešimčių skaitmuo yra 0, 1 arba 2, tai didžiausias vienetų skaitmuo gali būti 9. Tada didžiausią skaitmenų sumą turės ta diena, kurios dešimčių skaitmuo yra didžiausias, t. y. 29 diena. O jei dienos dešimčių skaitmuo yra 3, tai vienetų skaitmuo tegali būti 0 arba 1. Matome, kad taip gausime mažesnę skaitmenų sumą. Taigi, tarp 1 ir 31 didžiausią skaitmenų sumą turi skaičius 29. Kadangi devintas mėnuo – rugsėjis – turi 30 dienų, tai jis turės ir 29-ą dieną (skirtingai nei vasaris, nekeliamaisiais metais turintis tik 28 dienas). Taigi didžiausią skaitmenų sumą Marija gavo rugsėjo 29 d. Ji lygi $9 + 2 + 9 = 20$.

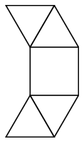
13. (C) 2 cm

? Nors visiškai pasitikėti paveikslėliu negalima, matome, kad kairįjį stačiakampį „perkėlę“ į dešinę pusę gautume naują stačiakampį, tartum sulipdytą iš dviejų kvadratėlių. Vadinasi, didžiojo stačiakampio ilgis turėtų būti dvigubai didesnis už plotį, taigi lygus 2 cm.

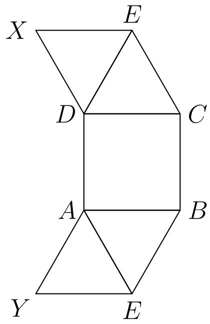


! Įrodykime, kad mūsų spėjimas sprendime **?** tikrai teisingas. Trumpesniosios stačiakampio $BCFE$ kraštinės FC ilgį pažymėkime raide x. Atkarpos EF ilgis yra lygus 1 cm, nes $EF = BC$. Iš kitos pusės, $EF = 2x$ cm, nes EF ilgis lygus dviejų trumpesniųjų kraštinių ilgių sumai. Iš lygties $2x = 1$ randame, kad $x = \frac{1}{2}$. Tuomet $AB = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$ cm.



14. (C) 

! Įrodykime, kad atsakyme **C** pavaizduota išklotinė nėra piramidės išklotinė. Tarkime priešingai – ši išklotinė yra piramidės. Iš išklotinės nesunku suprasti, kad šios piramidės pagrindas yra kvadratas, o sienos – lygiakraščiai trikampiai. Piramidės pagrindą pažymėkime raidėmis A, B, C ir D, o viršūnę raide E. Iš išklotinės vėl sulanksčius piramidę, taškas X turi sutapti su vienu iš taškų A, B, C, D arba E. Jis negali sutapti nei su D, nei su E (visi šie taškai yra vienoje sienoje). Taip pat negali sutapti su C, nes tuo atveju sienos XDE ir DEC sutaptų. Taip pat jis negali sutapti su viršūne B, nes tokiu atveju atkarpa XD sutaptų su atkarpa DB, bet $XD = DC < DB$. Taigi X būtinai sutaps su A. Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad Y būtinai sutaps su D. Bet tokiu atveju sienos XED ir YAE sutampa, o taip būti negali, nes piramidė turi 5 skirtingas sienas.



Kad atsakymuose **A**, **B**, **D** ir **E** iš tiesų pavaizduotos piramidės išklotinės galima įsitikinti jas išsikirpus ir sulanksčius.

15. (D) 29

! Imkime pirmuosius aštuonis namus. Sugrupuokime juos iš eilės po 2. Tokių porų bus keturios. Žinome, kad bet kuriuose dviejuose gretimuose namuose gyvena ne daugiau nei 6 žmonės, taigi 8 namuose gyvena ne daugiau nei $6 \cdot 4 = 24$ žmonės. Devintame name negali gyventi daugiau nei 5 žmonės, nes gretimame aštuntame name gyvena bent 1 žmogus. Vadinasi, kad 9 namuose gyvena ne daugiau nei $24 + 5 = 29$ žmonės. Belieka parodyti, kad toks namų apgyvendinimas tikrai įmanomas. Iš tiesų, tarkime, kad pirmame name gyvena 5 žmonės, antrame – 1, tračiame – 5, ketvirtame – 1 ir t. t. Namų su 5 gyventojais yra 5, namų su 1 gyventoju yra 4. Iš viso gatvėje gyvena $5 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 29$ žmonės.

16. (C) 4030

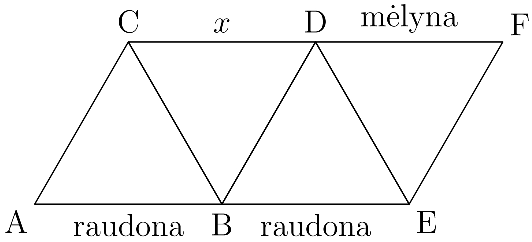
! Tarkime, kad Saulės gimimo metai lygūs skaičiui x. Tai reiškia, kad šįmet jai sukanka $2015-x$ metų. Kadangi Saulės gimtadienis jau buvo sausio mėnesį, tai sudėję jos amžių ir gimimo metus gausime $(2015-x)+x = 2015$. Taip pat samprotaudami ir apie Saulės mamos amžių gauname, kad atsakymas yra $2015 + 2015 = 4030$.

17. (B) 26

! Stačiakampio kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai, taigi jie yra 12 dalikliai. Turime tris įmanomas stačiakampio kraštinių ilgių poras, kur pirmas skaičius nurodo trumpesniosios kraštinės ilgį, o antras – ilgesniosios: (1, 12), (2, 6), (3, 4). Iš čia jau nesunku rasti visus įmanomus stačiakampio perimetrus: 26, 16, 14. Renkamės atsakymą **B**.

18. Ⓒ Tik raudona

? Kadangi trikampių kraštinės spalvinamos skirtingomis spalvomis, tai trikampio ABC kraštinė BC ir trikampio BDE kraštinė BD tikrai nėra raudonos. Vadinasi, trikampio BCD kraštinė CD turi būti raudona.



! Parodysime, kad Matas tikrai gali pabaigti spalvinti trikampius taip, kad visos kiekvieno trikampio kraštinės būtų skirtingų spalvų. Kraštinė DE negali būti nei raudona, nei mėlyna, todėl yra žalia. Kraštinei EF lieka raudona spalva. O toliau jau paprasta: BD – mėlyna, BC – vėl būtinai žalia, tada CD lieka raudona ir AC – mėlyna.

19. Ⓔ 13

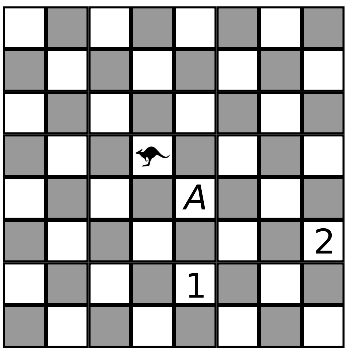
? Netikėta, kad pasirinkti teisingą atsakymą visiškai paprasta. Aišku, kad 12 vaisių neužtektų (pavyzdžiui, ištraukus 5 geltonus obuolius ir 7 žalias kriaušes). Vadinasi, jai tikrai reikia traukti daugiau nei 12 vaisių. Bet toks atsakymas vienintelis.

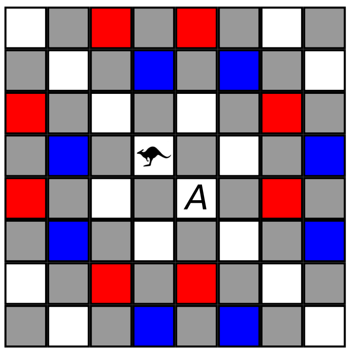
Renkamės atsakymą **E**.

! Dabar spręskime uždavinį, tarsi atsakymų nė nebūtų. Maiše yra 4 rūšių vaisiai. Austėja tikrai turės tos pačios spalvos obuolį ir kriaušę, jei vaisių bus ištraukusi bent 3 skirtingų rūšių. Net ištraukusi visus dviejų rūšių vaisius, ji dar gali neturėti dviejų skirtingų vienos spalvos vaisių (pavyzdžiui, ištraukusi 5 geltonus obuolius ir 7 žalias kriaušes). Vadinasi, 12 vaisių traukti per mažai. Įrodysime, kad 13 vaisių visada užteks. Iš tikrųjų, dviejų rūšių vaisių daugiausiai yra 12, taigi tarp ištrauktų bus vaisių bent 3 rūšių. Kaip jau minėjome, tarp jų būtinai bus tos pačios spalvos obuolys ir kriaušė.

20. Ⓑ 3

! Akivaizdu, kad vienu ėjimu kengūra į langelį A patekti negali. Kita vertus, kengūra gali pasiekti langelį A trimis ėjimais (kairiajame paveikslėlyje parodyti pirmi du). Lieka įrodyti, kad kengūra negali langelio A pasiekti dviem ėjimais.





Dešiniajame paveikslėlyje raudonai pažymėti langeliai, į kuriuos kengūra gali nušokti pirmu ėjimu. Mėlynai pažymėti tie langeliai, iš kurių kengūra gali pasiekti langelį A. Matome, kad kengūra pirmu ėjimu negali patekti į mėlyną langelį, taigi 2 ėjimų neužtenka.

21. (E) 6

! Sudėjus du vienaženklius skaičius ir vieną dviženklį skaičių, daugiausiai galima gauti $9+9+99 = 117$. Taigi Z būtinai lygus 1. Sudėję du vienaženklius skaičius, daugiausiai galime gauti $9+9 = 18$, todėl $Y \geqslant 8$ (kitaip $X+X+YY \leqslant 9+9+77 < 100$). Lieka išnagrinėti du atvejus.

- $Y = 8$. Tada $ZZZ - YY = 111 - 88 = 23 = 2X$, bet ši lygtis sveikųjų sprendinių neturi.
- $Y = 9$. Tada $ZZZ - YY = 111 - 99 = 12 = 2X$, taigi $X = 6$.

!! Užbaigti uždavinį galima ir kitaip. Žinome, kad $Z = 1$, $Y \geqslant 8$. Bet Z nelyginis, todėl $X + X + Y$ nelyginis. Vadinasi, Y nelyginis, todėl lygus 9. Taigi $2X = 111 - 99 = 12$, $X = 6$.

22. (C) 34

? Giedrius galiausiai išleidžia visas savo santaupas, taigi galime spėti, kad visų knygų kainos buvo „sveiki“ eurai. Jei ši prielaida teisinga, tada pradžioje Giedrius turėjo lyginį skaičių eurų x (lyginis skaičius reikalingas, kad galėtume sveikai padalyti Giedriaus santaupas pusiau ir pridėję dar vieną eurą gauti pirmos knygos kainą). Be to, $\frac{x}{2}-1$ taip pat turi būti lyginis skaičius (kad gautume sveiką antros knygos kainą). Vienintelis skaičius atsakymuose, tenkinantis šias sąlygas, yra 34.

! Patogiausia pradėti skaičiuoti iš kito galo. Pusė trečios knygos kainos yra 3 eurai, taigi trečia knyga kainavo 6 eurus. Prie šios sumos pridėję du eurus gausime pusę to, kiek Giedriui liko nusipirkus pirmą knygą: $(6 + 2) \cdot 2 = 16$ eurų. Toliau tęsdami pridėsime vieną eurą ir vėl padauginsime iš dviejų ir taip gausime visų Giedriaus turėtų santaupų skaičių. Vadinasi, pačioje pradžioje Giedrius turėjo $(16 + 1) \cdot 2 = 34$ eurus.

!! Įsivaizduoti veiksmus iš kito galo gali būti kebloka. Pamėginkime sudaryti lygtį. Tarkime, iš pradžių Giedrius turėjo x eurų. Tada pirmoji knyga kainavo $\frac{x}{2} + 1$ eurą, ir Giedriui liko $\frac{x}{2} - 1$ eurų. Po antrosios knygos jam liko $\frac{\frac{x}{2}-1}{2} - 2$ eurų, o nusipirkęs trečią knygą jis išleido visus savo pinigus, t. y. $(\frac{\frac{x}{2}-1}{2} - 2)/2 - 3 = 0$. Tada $(\frac{\frac{x}{2}-1}{2} - 2)/2 = 3$, ir $\frac{\frac{x}{2}-1}{2} - 2 = 6$. Tęsiame toliau: $\frac{x}{2} - 1 = (6 + 2) \cdot 2 = 16$, ir $x = (16 + 1) \cdot 2 = 34$.

23. (C) 16

! Pažiūrėkime, kokių dviejų natūraliųjų skaičių sandauga lygi 80: $1\cdot 80$, $2\cdot 40$, $4\cdot 20$, $5\cdot 16$ ir $8\cdot 10$. Pirmi du skaidiniai mums netinka, nes dauginamųjų suma būtų didesnė už 39. Likusių trijų skaidinių dauginamųjų sumos yra lygios atitinkamai 24, 21, 18. Čia jau nesunku pamatyti, kad $18 + 21 = 39$, o kitaip sumos 39 nesudarysi. Vadinasi, pradiniai keturi skaičiai yra 8, 10, 5, 16, o didžiausias iš jų yra 16.

24. (C) 67

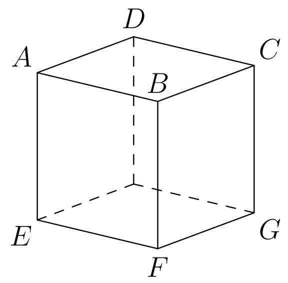
! Tarkime, kad skaičių 100 padauginę iš 2 arba iš 3, gausime skaičių n, o prie n pridėję 1 arba 2 gausime skaičių m. Skaičius 100 dalijasi iš 4, todėl ir n dalijasi iš 4, bet kai prie n pridėsime 1 arba 2 (iš kurių nei vienas nesidalija iš 4) jau gausime skaičių, kuris iš 4 nesidalija. Taigi m iš 4 tikrai nesidalija. Todėl m yra 3 kartotinis. Remiantis panašiais samprotavimais, kadangi iš m atėmę 1 arba 2 (kurie nesidalija ir iš 3) vėl gautume n, tai matome, kad n nėra 3 kartotinis. Vadinasi, n buvo gautas skaičių 100 dauginant iš dviejų. Dabar jau galime atstatyti visą veiksmų seką: pirmiausia 100 dauginame iš 2, gauname 200. Tada turime pridėti tiek, kad gautume 3 kartotinį, todėl pridedame 1, gauname 201. Galiausiai dalijame iš 3 ir gauname 67.

25. (B) 61

! Kuo didesnis bus skaitmuo d, tuo didesnis bus dviženklis skaičius $\overline{bd}$, tad imkime $d = 9$. Kita vertus, kuo mažesnį imsime a, tuo mažesnis bus skaičius $\overline{ac}$, tad imkime $a = 1$. Skaičių c mes norime parinkti kuo mažesnį, bet jis turi būti didesnis už b, todėl galime tikėtis, kad skirtumas $\overline{bd} - \overline{ac}$ bus mažiausias, kai $c = b + 1$. Kadangi $\overline{bd} - \overline{ac} = 10b + d - 10a - c =$ $= 10b + 9 - 10 - (b + 1) = 9b - 2$, tai skirtumas bus didžiausias, kai b bus didžiausias galimas skaitmuo. Kadangi $b < c < d$, tai didžiausias galimas c yra lygus 8, o tada didžiausias galimas b yra lygus 7. Taigi $\overline{bd} - \overline{ac} = 79 - 18 = 61$.

26. (C) 22

! Priešingoms kubo viršūnėms C ir E priskirtų skaičių suma 38 yra lygi ant visų kubo sienų užrašytų skaičių sumai. Viršūnės D ir F irgi yra priešingos, todėl joms priskirtų skaičių suma taip pat lygi 38. Taigi viršūnei F Viltė priskyrė skaičių $38 - 16 = 12$.



27. (B) 8

! Tarkime, kad viename vagone yra x kupė. Algis važiuoja 7-tame vagone, todėl $6x < 50 \leqslant 7x$. Kairioji nelygybė reiškia, kad $x \leqslant 8$, o dešinioji – kad $x \geqslant 8$. Vadinasi, $x = 8$.

28. (D) 10

! Sunumeruokime langelius nuo 1 iki 7, kaip parodyta paveikslėlyje.

1	2	3	4	5	6	7

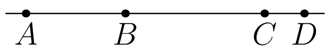
Pažiūrėkime, kur galime patalpinti viduriniąją kengūrą. Jos negalime dėti nei į 1, nei į 2 langelius, nes tada nebeliks vietos kairiajai kengūrai. Taip pat jos negalima talpinti nei į 6, nei į 7 langelius, nes nebebus kur dėti dešiniosios kengūros. Lieka trys galimi atvejai:

- vidurinė kengūra yra 3 langelyje. Tada kairioji kengūra būtinai 1 langelyje, o dešiniąją galime talpinti į bet kurį iš paskutinių trijų langelių – 3 būdai.
- vidurinė kengūra yra 4 langelyje. Tada kairiąją galime dėti į 1 arba 2 langelius (2 būdai), o dešinąją, nepriklausomai nuo kairiosios, į 6 arba 7 langelius (irgi 2 būdai). Kadangi kiekvienam iš dviejų kairiosios kengūros padėjimo būdų yra du dešiniosios kengūros padėjimo būdai, tai iš viso yra $2 \cdot 2 = 4$ būdai sudėlioti kraštines kengūras, – dar 4 būdai.
- vidurinė kengūra yra 5 langelyje. Šis atvejis simetriškas pirmajam. Kairiajai kengūrai galime pasirinkti vieną iš pirmų 3 langelių, o dešiniajai lieka 7 langelis, – vėl 3 būdai.

Taigi kengūras apgyvendinti galime $3 + 4 + 3 = 10$ būdų.

29. E 9

? Pažymėkime taškus raidėmis A, B, C ir D.



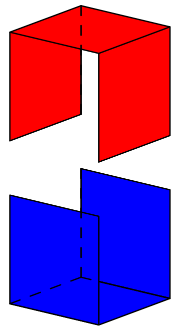
Atstumas tarp taškų A ir D yra didžiausias, t. y. lygus 14. Spėjame, kad AC ir BD ilgiai irgi turėtų būti „dideli“ skaičiai, tad tarkime, kad AC ilgis lygus 12, o BD – 11. Iš čia jau išplaukia, kad CD ilgis lygus 2, o AB ilgis lygus 3. Taigi atstumas tarp taškų B ir C lygus k. Be to, žinome, kad $3 + k + 2 = 14$, todėl $k = 9$.

! O galbūt gali atsitikti taip, kad, pavyzdžiui, taškai B, C ir D bus taip susispietę vienas prie kito, kad atstumas AB bus didesnis už BD? Pabandykime uždavinį išspręsti griežtai.

Pastebėkime, kad $AB + BC + CD = AD = 14$. Taigi kažkurių trijų atkarpų ilgių suma turi būti lygi 14. Nė vienas iš tų trijų skaičių negali būti 12, nes net pridėję prie 12 dvi trumpiausias atkarpas – 2 ir 3 – gausime didesnį skaičių: $12 + 2 + 3 = 17 > 14$. Taip pat atsitinka ir su 11, $11 + 2 + 3 = 16$. Lieka vienintelis variantas: $2 + 3 + k = 14$. Iš čia $k = 9$.

Čia galėtume ir sustoti, bet akylas skaitytojas paklaustų: o gal išdėstyti taškus tiesėje taip, kaip prašoma sąlygoje, apskritai neįmanoma? Čia praverčia sprendimas **?**, iš kurio matome, kad toks taškų išdėstymas įmanomas.

30. (D) 24



! Kubo sienas vadinsime *kaimyninėmis*, jei jos turi bendrą briauną. Jei sienos nėra kaimyninės, jos yra priešingos kubo sienos. Iš pradžių įrodysime, kad tarp raudonai nudažytų sienų yra dvi viena kitai priešingos sienos. Visas kubo sienas suskirstykime į tris priešingų sienų poras. Galimi du atvejai:

- iš kiekvienos poros raudonai nuspalvinta po vieną sieną;
- raudonai yra nuspalvintos 2 vienos poros sienos ir 1 kitos poros siena.

Kadangi kubo siena yra kaimyninė visoms, išskyrus priešingą sieną, tai pirmuoju atveju visos trys raudonai nuspalvintos sienos yra tarpusavyje kaimyninės. Tai reiškia, kad jos turi bendrą viršūnę. Bet tuomet toje viršūnėje esantis kubelis turės tris raudonai nuspalvintas sieneles, o taip būti negali. Vadinasi, raudonai nuspalvintos yra dvi priešingos sienos, o trečioji yra kaimyninė joms abiems. Šios trys sienos tarpusavy sudaro formą, panašią į suoliuką (arba kampuotą U raidę). Tuomet mėlynai nuspalvintos likusios sienos irgi sudarys tokią formą (žr. pav.).

Lieka suskaičiuoti kubelius, turinčius ir raudonai, ir mėlynai nuspalvintas sienas. Bent dvi nuspalvintas sienas turi didžiojo kubo viršūnėse ir briaunose esantys kubeliai. Visi viršūnėse esantys kubeliai, kurių yra 8, turės abiejų spalvų sienas. Kubas turi 12 briaunų. Kiekvienoje briaunoje, neskaitant viršūnėse esančių kubelių, dar yra po du kubelius, kurių dvi sienos yra nuspalvintos (juos vadinsime vidiniais briaunų kubeliais). Taigi vidinių briaunų kubelių iš viso yra $2 \cdot 12 = 24$, ir mums bus lengviau suskaičiuoti tuos, kurių abi spalvintos sienelės yra vienspalvės. Didžiojo kubo briaunų, kurios būtų tarp dviejų raudonų sienų, yra dvi, tiek pat yra ir briaunų tarp mėlynų sienų, taigi iš viso „vienspalvių“ briaunų yra $2 + 2 = 4$. Kiekviena tokia briauna turi 2 vidinius kubelius, taigi iš viso vidinių briaunų kubelių, turinčių abi raudonas arba abi mėlynas nuspalvintas sieneles, yra $4 \cdot 2 = 8$, o likusieji $24 - 8$ vidiniai briaunų kubeliai turės ir raudoną, ir mėlyną sieną. Pridėję 8 viršūninius kubelius, gausime atsakymą: $8 + (24 - 8) = 24$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	B
2	C
3	A
4	A
5	B
6	E
7	D
8	C
9	A
10	A
11	D
12	E
13	C
14	C
15	D
16	C
17	B
18	C
19	E
20	B
21	E
22	C
23	C
24	C
25	B
26	C
27	B
28	D
29	E
30	D