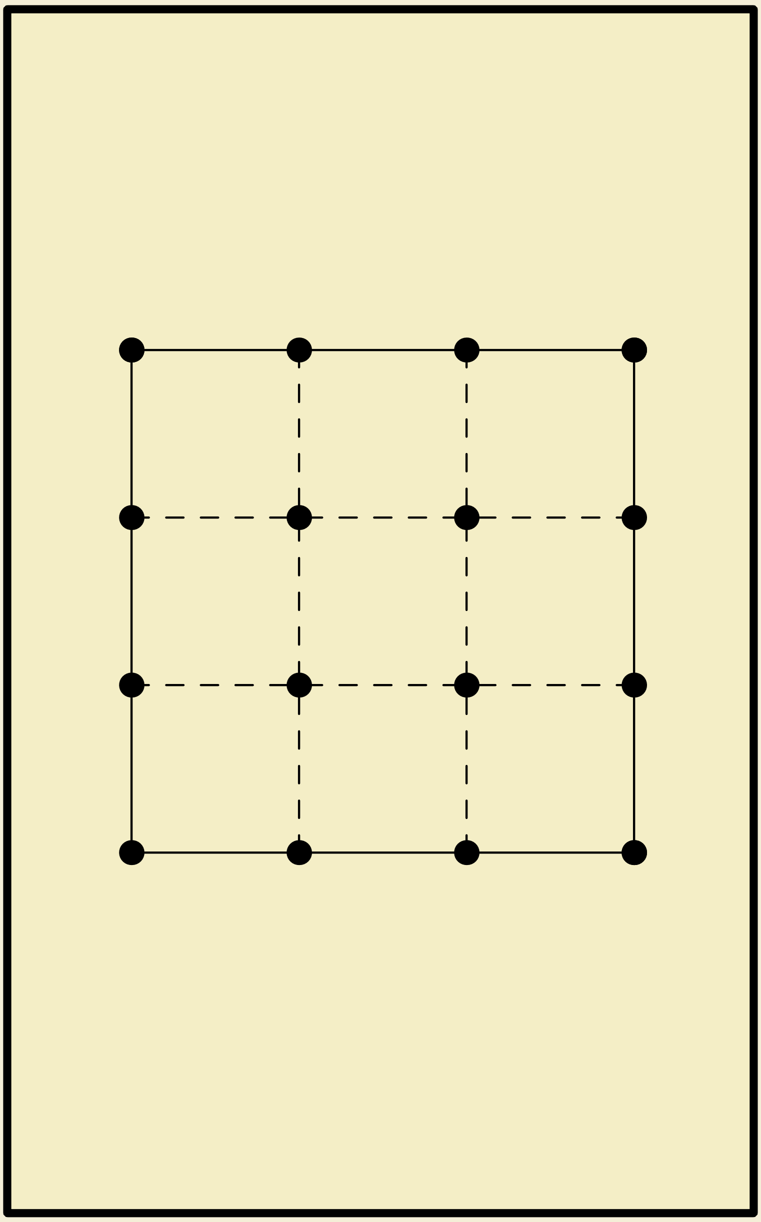
Kengūra 2015

Uždavinys ir sprendimai



Senjoras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2015

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašas **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Užduočių sprendimai **14**

Atsakymai **35**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje*.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 50000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2015 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas bei Matematikos ir informatikos institutas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2015 metų kovo 19 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Lukas Naruševičius,	5-oji gimnazija,	Panevėžio m.,	116.25
Andrius Juozokas,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	113.75
Gintautas Lasevičius,	Kaišiadorių Algirdo Brazausko gimnazija,	Kaišiadorių r.,	112.50
Deividas Morkūnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	112.25
Justina Milišauskaitė,	Tauragės „Versmės“ gimnazija,	Tauragės r.,	112.25
Vaiva Augustinaitė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	110.00
Valentas Brasas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	110.00
Andrius Ovsianas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	109.50
Kinga Kaminska,	Lazdynų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	108.75
Aistė Kudulytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	107.25
Gediminas Jacunskas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	106.25
Karolis Šmitas,	„Varpo“ gimnazija,	Kauno m.,	103.75
Elena Reivytytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	103.75
Rytis Stasiūnas,	Lieporių gimnazija,	Šiaulių m.,	103.50
Justina Novikovaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	102.50
Antanas Kalkauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	102.00
Matas Nasvytis,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	101.00
Jevgenij Chomutovskij,	Sofijos Kovalevskajos vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	101.00
Justina Tarasovaitė,	Žirmūnų gimnazija,	Vilniaus m.,	100.75
Mindaugas Čekanauskas,	Kretingos Pranciškonų gimnazija,	Kretingos r.,	100.25
Bernardas Baušys,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	100.00
Augustas Sereika,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	100.00
Marija Mumm,	„Aitvaro“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	99.50
Justas Gadliauskas,	Raudondvario gimnazija,	Kauno r.,	99.25
Michail Chrunov,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	98.75
Gytis Barandovas,	Mažeikių Merkelio Račkausko gimnazija,	Mažeikių r.,	98.50
Ugnė Latvėnaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	97.25
Tadas Bareikis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	97.00
Margarita Buchovskaja,	Aleksandro Puškino vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	96.25
Kostas Strielkūnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	96.25
Redminas Šegžda,	Batakių vidurinė mokykla,	Tauragės r.,	96.00
Vyturys Džiugas Jokubauskas,	Antano Smetonos gimnazija,	Kauno m.,	96.00
Lukas Gylys,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	95.00
Dalia Sabaliauskaitė,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	95.00
Denis Krupičiovič,	Šalčininkų „Santarvės“ vidurinė mokykla,	Šalčininkų r.,	94.75
Linas Zacharovas,	„Romuvos“ gimnazija,	Šiaulių m.,	94.50
Nikita Daniliuk,	Vasilijaus Kačialovo gimnazija,	Vilniaus m.,	94.00
Dovydas Šalučka,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	93.75
Sintija Raudonytė,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	93.75
Haroldas Kogstas,	Klaipėdos Vydūno gimnazija,	Klaipėdos m.,	93.75
Aleksas Prelgauskis,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	93.75
Matas Grišius,	Lieporių gimnazija,	Šiaulių m.,	93.50
Adriana Otilija Vilkaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	93.50
Rugilė Narbutaitė,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	93.25
Edgaras Tomkevičius,	Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos“ gimnazija,	Kauno m.,	92.50
Povilas Plukas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	92.50
Dominykas Antinis,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	92.50
Ieva Dapševičiūtė,	Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos“ gimnazija,	Kauno m.,	92.50
Vitas Kumpikevičius,	Prezidento Jono Žemaičio gimnazija,	Raseinių r.,	91.75
Linas Sasnauskas,	„Romuvos“ gimnazija,	Šiaulių m.,	91.50

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Pavel Mironov,	Lazdynų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	135.00
Mantas Pranskaitis,	Stasio Šalkauskio gimnazija,	Šiaulių m.,	135.00
Baltrus Šivickis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	132.50
Domantas Jadenkus,	Grigiškių „Šviesos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	131.25
Pol Maksim Bovarov,	„Juventos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	130.75
Greta Rodevič,	Eišiškių gimnazija,	Šalčininkų r.,	123.75
Justinas Sakas,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	123.75
Tadas Indrelė,	Mykolo Biržiškos gimnazija,	Vilniaus m.,	120.00
Lukas Cedronas,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	116.25
Jakov Braver,	Šolomo Aleichemo ORT gimnazija,	Vilniaus m.,	115.00
Gintautas Kamuntavičius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	115.00
Gytis Ramanauskas,	Radviliškio Vaižganto gimnazija,	Radviliškio r.,	115.00
Gytė Galkauskaitė,	Tauragės „Versmės“ gimnazija,	Tauragės r.,	112.50
Povilas Šlekys,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	112.50
Meilė Petrauskaitė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	112.25
Paulius Ašvydis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	110.00
Benas Kirša,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	110.00
Ignas Čeponis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	108.75
Vytautas Strimaitis,	Žvėryno gimnazija,	Vilniaus m.,	107.50
Dmitrij Sidorkin,	Ramygalos gimnazija,	Panevėžio r.,	107.50
Valentinas Janeiko,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	107.50
Lina Meškonytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	107.50
Alanas Plaščinskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	106.25
Nikodemas Tučkus,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	106.25
Mantas Dirma,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	105.00
Andrius Paulauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	105.00
Justas Buzaitis,	Antano Smetonos gimnazija,	Kauno m.,	105.00
Emilijus Stankus,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	104.75
Eivydas Račkauskas,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	104.75
Patricija Šapokaitė,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	104.50
Paulina Dvilinskaitė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	104.25
Mantas Petrikas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	103.25
Vilius Žukauskas,	Juliaus Janonio gimnazija,	Šiaulių m.,	102.50
Irmantas Mankevičius,	Tuskulėnų vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	102.50
Diana Kolesnikova,	Levo Karsavino vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	102.25
Milda Jundulaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	99.50
Robertas Konarskis,	Levo Karsavino vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	98.75
Arvydas Žibas,	Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija,	Kauno r.,	98.75
Simonas Pilkauskas,	„Minties“ gimnazija,	Vilniaus m.,	98.75
Ieva Šapovalovaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	98.50
Tadas Mankus,	„Varpo“ gimnazija,	Kauno m.,	98.50
Audrius Čižinauskas,	Raudondvario gimnazija,	Kauno r.,	97.50
Jurgita Gečaitė,	Vainuto gimnazija,	Šilutės r.,	97.50
Vaiva Narkutė,	Šilalės Simono Gaudėšiaus gimnazija,	Šilalės r.,	97.50
Karolis Markauskas,	Utenos Adolfo Šapokos gimnazija,	Utenos r.,	97.25
Artur Nakliuda,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	97.25
Miglė Kalinauskaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	96.50
Ignas Kvietkus,	Juliaus Janonio gimnazija,	Šiaulių m.,	96.25
Titas Štreimikis,	Šv. Mato gimnazija,	Kauno m.,	96.25
Vilius Karsokas,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	96.25
Evelina Drobužaitė,	Ukmergės r. Želvos gimnazija,	Ukmergės r.,	96.25

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐

	A	B	C	D	E
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐

	A	B	C	D	E
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐
17	☐	☐	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	☐	☐

	A	B	C	D	E
19	☐	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐
22	☐	☐	☐	☐	☐
23	☐	☐	☐	☐	☐
24	☐	☐	☐	☐	☐

	A	B	C	D	E
25	☐	☐	☐	☐	☐
26	☐	☐	☐	☐	☐
27	☐	☐	☐	☐	☐
28	☐	☐	☐	☐	☐
29	☐	☐	☐	☐	☐
30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2015 m. Senjoro užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Andrėja gimė 1997 metais, o jos sesuo Karolina gimė 2001 metais. Tikslus seserų amžių skirtumas neišvengiamai yra

A) mažesnis nei 4 metai **B)** ne mažesnis nei 4 metai **C)** lygiai 4 metai
D) didesnis nei 4 metai **E)** ne mažesnis nei 3 metai

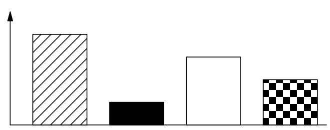
2. Ką gausime, suprastinę reiškinį $(a-b)^5+(b-a)^5$?

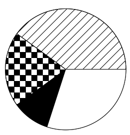
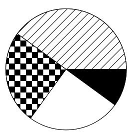
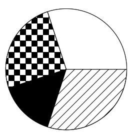
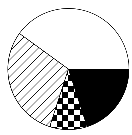
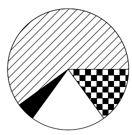
A) 0 **B)** $2\,(a-b)^5$ **C)** $2a^5-2b^5$ **D)** $2a^5+2b^5$
E) $2a^5+10a^4b+20a^3b^2+20a^2b^3+10ab^4+2b^5$

3. Kiek realiųjų sprendinių turi lygtis $2^{2x}=4^{x+1}$?

A) 0 **B)** Be galo daug **C)** 2 **D)** 1 **E)** 3

4. Diana ir Kasparas dalyvavo biologijos pamokoje-žygyje. Aptiktų medžių, priklausančių keturioms rūšims, kiekius Diana pavaizdavo stulpeline diagrama. O Kasparas sukūrė skritulinę diagramą, kad aiškiau parodytų skirtingų rūšių medžių santykį. Kaip atrodo Kasparo diagrama?

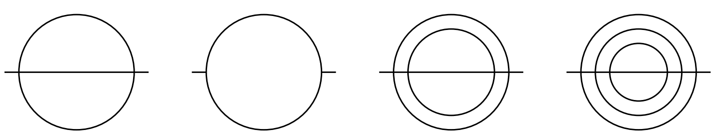


A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

5. Paulina sudėjo 31 natūralųjį skaičių nuo 2001 iki 2031 ir sumą padalijo iš 31. Kokį skaičių ji gavo?

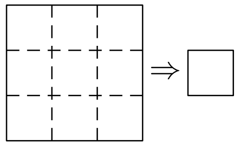
A) 2012 **B)** 2013 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2496

6. Kelios iš keturių pavaizduotų figūrų gali būti nubrėžtos, neatitraukiant pieštuko ir jokios linijos atkarpos nebrėžiant du kartus?



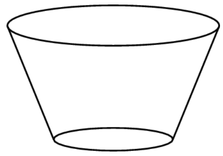
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

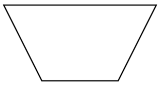
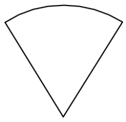
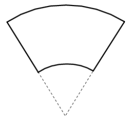
7. Audronė sulankstė kvadratinę servetėlę, atsitiktine tvarka lenkdama ją išilgai punktyru pažymėtų linijų, ir gavo popierinį kvadratėlį (žr. pav.). Tada ji nukirpo vieną kvadratėlio kampelį. Kiek skylių ji rado servetėlėje, išlanksčiusi ją?



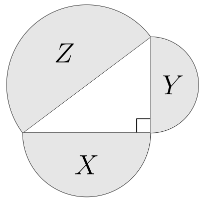
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9

8. Popierinė stiklinė yra nupjautinio kūgio formos (žr. pav.). Ją sudaro dugnas ir šoninis paviršius. Kokios formos bus perkirptas ir ištiesintas šoninis paviršius?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. Paveikslėlyje pavaizduoti trys pusskrituliai, kurių plotai yra X, Y ir Z, o skersmenys yra stačiojo trikampio kraštinės. Kuris sąryšis teisingas?



A) $X+Y<Z$ **B)** $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\sqrt{Z}$ **C)** $X+Y=Z$
D) $X^2+Y^2=Z^2$ **E)** $X^2+Y^2>Z^2$

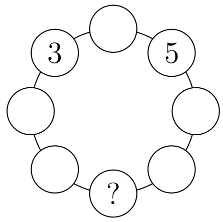
10. Kuriame skaičių sąraše išvardytos visos galimybės, kiek smailiųjų kampų gali turėti iškilasis keturkampis?
A) 0, 1, 2 **B)** 0, 1, 2, 3 **C)** 0, 1, 2, 3, 4 **D)** 0, 1, 3 **E)** 1, 2, 3

Klausimai po 4 taškus

11. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)}=$
A) $\sqrt{2015}$ **B)** 2015 **C)** 2016 **D)** 2017 **E)** 4030

12. Liliana stačiakampėje koordinačių sistemoje pavaizdavo funkcijų $y=2-x^2$ ir $y=x^2-1$ grafikus. Tada ji nutrynė Oy ašį, bet Ox ašį paliko. Į kiek dalių padalijo plokštumą du grafikai ir ašis?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

13. Į kiekvieną skrituliuką (žr. pav.) įrašyta po skaičių. Ignas pastebėjo, kad bet kuris skaičius lygus dviejų gretimų skaičių sumai. Koks skaičius įrašytas klaustuku pažymėtoje vietoje?

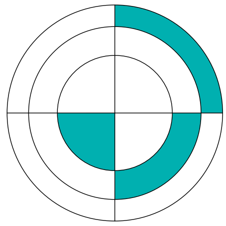


A) -5 **B)** -16 **C)** -8 **D)** -3 **E)** Ignas apsiriko

14. Penki skirtingi natūralieji skaičiai a, b, c, d, e tenkina lygybes $c:e=b$, $a+b=d$ ir $e-d=a$. Kuris skaičius didžiausias?
A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** e

15. Turint n teigiamų realiųjų skaičių, jų geometriniu vidurkiu vadinama n-tojo laipsnio šaknis iš tų skaičių sandaugos. Tam tikrų trijų teigiamų skaičių geometrinis vidurkis yra 3, o kitų trijų teigiamų skaičių geometrinis vidurkis yra 12. Koks yra visų šešių skaičių geometrinis vidurkis?
A) 4 **B)** 6 **C)** $\frac{15}{2}$ **D)** $\frac{15}{6}$ **E)** 36

16. Paveikslėlyje pavaizduoti trys koncentriški apskritimai ir du statmeni skersmenys. Mažiausiojo apskritimo spindulys yra 1, o nudažytos sritys yra lygiaplotės. Kokia yra trijų apskritimų spindulių sandauga?
A) $\sqrt{6}$ **B)** 3 **C)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D)** $2\sqrt{2}$ **E)** 6

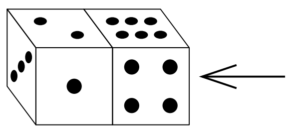


17. Prekiautojas automobiliais įsigijo du automobilius. Vieną iš jų jis pardavė už 40% didesnę pinigų sumą, nei pats sumokėjo, t. y. gavo 40% pelną. Antrasis automobilis atnešė prekiautojui 60% pelną, o abu automobiliai kartu sudėjus atnešė 54% pelną. Koks yra prekiautojo už pirmąjį ir antrąjį automobilius sumokėtų kainų santykis?
A) 10:13 **B)** 20:27 **C)** 3:7 **D)** 7:12 **E)** 2:3

18. Barbora turi paprastą lošimo kauliuką, kurio sienelėse yra po 1, 2, 3, 4, 5 ir 6 akutes. O jos draugo Žygimanto kauliukas ypatingas: jo sienelėse yra po 2, 2, 2, 5, 5 ir 5 akutes. Barbora ir Žygimantas parideno savo kauliukus. Kokia tikimybė, kad Žygimantui iškrito daugiau akučių nei Barborai?
A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{7}{18}$ **C)** $\frac{5}{12}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{11}{18}$

19. Inga į vamzdelį subėrė 2015 rutuliukų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 2015. Rutuliukai su ta pačia skaitmenų suma yra tos pačios spalvos, o rutuliukai su skirtingomis skaitmenų sumomis yra skirtingų spalvų. Kelių skirtingų spalvų rutuliukų yra vamzdelyje?
A) 10 **B)** 27 **C)** 28 **D)** 29 **E)** 2015

20. Standartinio lošimo kauliuko bet kuriose dviejose priešingose sienelėse kartu yra 7 akutės. Paveikslėlyje pavaizduoti du suglausti vienodi standartiniai kauliukai. Kiek akučių gali būti dešinėje nematomoje sienelėje, pažymėtoje klaustuku?



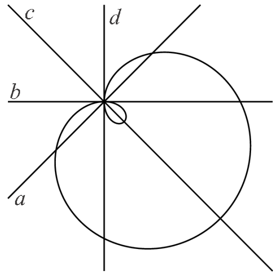
A) Tik 5 **B)** Tik 2 **C)** Tik 2 arba 5 **D)** Tik 1, 2, 3 arba 5 **E)** Tik 2, 3 arba 5

Klausimai po 5 taškus

21. Paveikslėlyje pavaizduota skaičių nuo 1 iki 10 daugybos lentelė. Kam lygi visų 100 sandaugų suma?
A) 1000 **B)** 2025 **C)** 2500 **D)** 3025 **E)** 5500

×	1	2	3	…	10
1	1	2	3	…	10
2	2	4	6	…	20
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
10	10	20	30	…	100

22. Paveikslėlyje pavaizduotą kreivę – Paskalio sraigę – apibrėžia lygtis



$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Kuri iš tiesių a, b, c, d sutampa su Oy ašimi?
A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** Nė viena

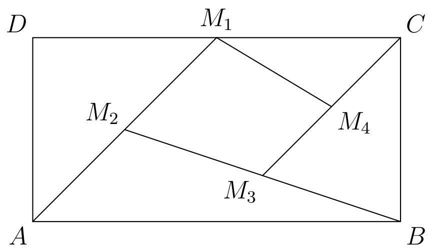
23. Iš eilės perskaitykite penkis teiginius **A**–**E**. Kuris teiginys yra pirmasis teisingas?
A) Teiginys **C** teisingas **B)** Teiginys **A** teisingas **C)** Teiginys **E** klaidingas
D) Teiginys **B** klaidingas **E)** $1 + 1 = 2$

24. Kiek yra taisyklingųjų daugiakampių, kurių kampai lygūs sveikajam skaičiui laipsnių?
A) 17 **B)** 18 **C)** 22 **D)** 25 **E)** 60

25. Keli triženkliai natūralieji skaičiai gali būti užrašyti kaip lygiai devynių skirtingų dvejeto laipsnių suma (2^0 taip pat yra dvejeto laipsnis)?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

26. Kiek yra skirtingų stačiųjų trikampių, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, o vieno statinio ilgis yra 20?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

27. Duotas stačiakampis $ABCD$ (žr. pav.). Taškas M_1 dalija pusiau atkarpą DC, M_2 dalija pusiau AM_1, M_3 dalija pusiau BM_2, o M_4 dalija pusiau CM_3. Kurią stačiakampio ploto dalį sudaro keturkampis $M_1M_2M_3M_4$?
A) $\frac{7}{16}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{7}{32}$ **D)** $\frac{9}{32}$ **E)** $\frac{1}{5}$



28. Mažoji Karolina nupiešė ant lentos kelis stačiakampius: vienus mėlyna kreida, kitus raudona. Lygiai 7 stačiakampiai yra kvadratai. Raudonų stačiakampių yra trimis daugiau nei mėlynų kvadratų. Raudonų kvadratų yra dviem daugiau nei mėlynų stačiakampių. Kiek mėlynų stačiakampių nupiešė Karolina?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

29. Skaičiuočių klube susirinko 96 nariai ir sustojo ratu. Jie ratu iš eilės ėmė garsiai skaičiuotis: 1, 2, 3 ir t. t. Žmogus, ištaręs lyginį skaičių, tuojau pasitraukia iš rato. Apėjus pilną ratą, žmonės skaičiavosi toliau: 97, 98, …, kol rate liko tik vienas žmogus. Koks buvo pirmas skaičius, kurį skaičiuotės metu ištarė paskutinis likęs žmogus?
A) 1 **B)** 17 **C)** 33 **D)** 65 **E)** 95

30. Žodyje KANGAROO raides reikia pakeisti skaitmenimis taip, kad gautas skaičius dalytųsi iš 11. Vienodos raidės keičiamos vienodais skaitmenimis, skirtingos raidės skirtingais skaitmenimis ir $K \neq 0$. Dovydas sugalvojo didžiausią tokį skaičių, o Deividas – mažiausią tokį skaičių. Vieną raidę jie pakeitė tuo pačiu skaitmeniu. Koks tai skaitmuo?
A) 0 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Senjoro užduočių sprendimai

1. (E) ne mažesnis nei 3 metai

! Laiką nuo Andrėjos iki Karolinos gimimo sudaro 5 tarpsniai: laikas nuo Andrėjos gimimo iki 1997 metų pabaigos, 1998 metai, 1999 metai, 2000 metai ir laikas nuo 2001 metų pradžios iki Karolinos gimimo. Jei laiką matuosime metais, tai atitinkama tarpsnių trukmė lygi $x, 1, 1, 1, y$. Čia x ir y yra bet kokie skaičiai nuo 0 iki 1. Beje, nežinomųjų naudoti nebūtina – pakanka įsivaizduoti šiuos tarpsnius laiko tiesėje.

Koks didžiausias galimas seserų amžių skirtumas? Jis bus didžiausias, jei $x = y = 1$, t. y. jei Andrėja gimė 1997 metų pradžioje, o Karolina 2001 metų pabaigoje. Tada amžių skirtumas lygus $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ metams. Tai parodo, kad atsakymai **A** ir **C** klaidingi.

Panašiai amžių skirtumas bus mažiausias, jei $x = y = 0$, t. y. jei Andrėja gimė 1997 metų pabaigoje, o Karolina 2001 metų pradžioje. Tada amžių skirtumas lygus $0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3$ metams. Tai parodo, kad atsakymai **B** ir **D** klaidingi, o atsakymas **E** teisingas.

2. (A) 0

! Norint išspręsti šį uždavinį, visai nebūtina mokėti (Niutono binomo) formulės reiškiniui $(a-b)^5$. Tereikia žinoti, kad visada $(-c)^5 = -c^5$. Pažymėję $c = a - b$ gauname

$$(a-b)^5 + (b-a)^5 = (a-b)^5 + (-(b-a))^5 = c^5 + (-c)^5 = c^5 - c^5 = 0.$$

Dar galime įsitikinti, kad kaip nors kitaip prastindami reiškinį niekaip negausime kitų atsakymų. Tam tereikia įrašyti $a = 1$, $b = 0$ į duotąjį reiškinį ir atsakymus. Joks iš likusių 4 atsakymų neįgyja duotojo reiškinio reikšmės 0, todėl negali sutapti ir kaip reiškinys.

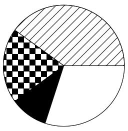
Beje, jei prastintume reiškinį $(a-b)^6 + (b-a)^6$, tai gautume $2(a-b)^6$. Atsakymą **E** galima užrašyti kaip $2(a+b)^5$.

3. (A) 0

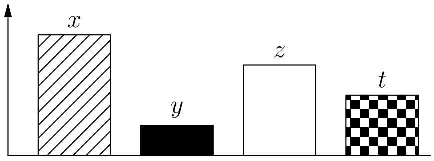
! Lygybės kairėje matome laipsniu keliamą skaičių 2, o dešinėje – skaičių 4, kuris pats yra dvejeto laipsnis. Lygybės puses labiau suvienodinsime, tuo pasinaudoję:

$$4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2\cdot(x+1)} = 2^{2x+2}, \quad 2^{2x} = 2^{2x+2}.$$

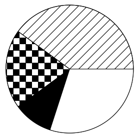
Dabar laipnsių rodikliai privalo sutapti: $2x = 2x + 2$ arba $0 = 2$. Taip būti negali, tad lygtis sprendinių neturi.

4. (A) 

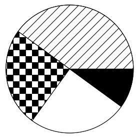
! Keturių rūšių medžių kiekius iš eilės pažymėkime x, y, z, t (žr. pav.). Stulpelinėje diagramoje šiems skaičiams proporcingi stulpelių aukščiai ir plotai, o skritulinėje diagramoje – išpjovų kampai ir plotai. Stulpelinėje diagramoje aiškiai matyti, kad $x > z > t > y$. Iš tiesų stulpelių aukščių santykis $x : z : t : y$ bent apytiksliai lygus $4 : 3 : 2 : 1$.



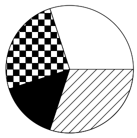
Į panašaus dydžio dalis ($\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}$ ir $\frac{1}{10}$ skritulio) padalyta atsakymo **A** diagrama. Tačiau toks diagramų sugretinimas iš akies gali būti netikslus, todėl natūralu tikrinti likusius atsakymus – gal jie taip pat atrodys teisingi?



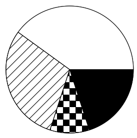
Galime atmesti atsakymą **B**. Jame $z \approx t$, bet stulpelinėje diagramoje z ir t skirtumas yra gana žymus: stulpelių aukščių santykis yra arčiau $3 : 2$, o ne $1 : 1$.



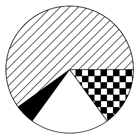
Galime atmesti atsakymą **C**. Jame $x \approx z$, bet stulpelinėje diagramoje x ir z skirtumas yra gana žymus: stulpelių aukščių santykis yra arčiau $4 : 3$, o ne $1 : 1$.



Turbūt lengviausia atmesti atsakymą **D**: jame $y > t$.



Galime atmesti ir atsakymą **E**. Čia pirmosios rūšies medžiai sudaro daugiau nei pusę visų medžių, t. y. $x > y + z + t$. Tačiau stulpelinėje diagramoje sudėję likusius tris stulpelius, gausime stulpelį, aukštesnį nei pirmasis. Todėl $x < y + z + t$.



5. (D) 2016

! Skaičių vidurkis lygus $x = (2001 + 2002 + \ldots + 2031)/31$. Belieka kaip nors nustatyti reiškinio reikšmę.

Skaitiklyje turime aritmetinės progresijos 31 nario sumą, taigi galime taikyti aritmetinės progresijos sumos formulę:

$$2001 + 2002 + \ldots + 2031 = \frac{2001 + 2031}{2} \cdot 31 = \frac{4032}{2} \cdot 31 = 2016 \cdot 31.$$

Būtų neišmintinga dauginti 2016 iš 31. Paprasčiau palikti sandaugą. Tada kaipmat gauname $x = (2016 \cdot 31)/31 = 2016$.

!! Kaip suprastinti reiškinį, nežinant aritmetinės progresijos sumos formulės? Pertvarkykime sumą:

$$2001 + 2002 + \ldots + 2031 = (2000 + 1) + (2000 + 2) + \ldots + (2000 + 31) =$$

$$= (2000 + 2000 + \ldots + 2000) + (1 + 2 + \ldots + 31) = 2000 \cdot 31 + (1 + 2 + \ldots + 31).$$

Sumos $1 + 2 + \ldots + 31$ tikslios reikšmės taip pat nebūtina skaičiuoti. Sugrupuokime pirmus 30 dėmenų į 15 porų: $(1, 30), (2, 29), (3, 28), \ldots, (15, 16)$. Kiekvienos poros skaičių suma lygi 31. Vadinasi,

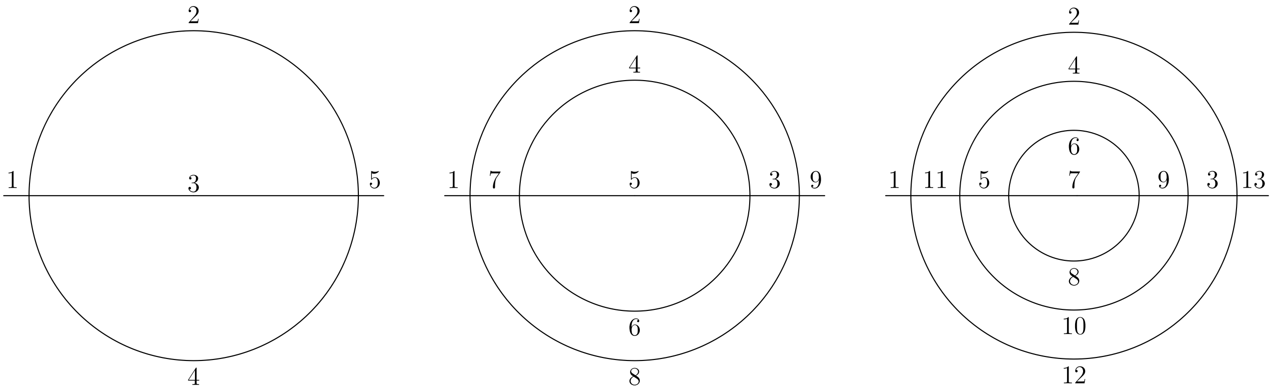
$$(1 + 2 + \ldots + 30) + 31 = ((1 + 30) + (2 + 29) + \ldots + (15 + 16)) + 31 =$$

$$= (31 + 31 + \ldots + 31) + 31 = 15 \cdot 31 + 31 = 16 \cdot 31.$$

Pagaliau randame vidurkį $x = (2000 \cdot 31 + 16 \cdot 31)/31 = 2000 + 16 = 2016$.

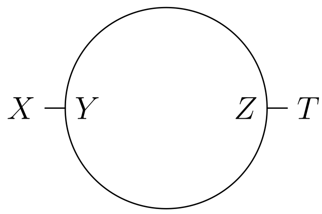
6. (D) 3

! Pirmąją, trečiąją ir ketvirtąją figūras galima nubrėžti nurodytu būdu. Galima pradėti nuo kairiojo figūros galo, o priėjus kelių linijų susikirtimą rinktis kryptį pagal tokią taisyklę: sukti į kairę, jei prieitas taškas yra kairėje nuo figūros centro, ir sukti į dešinę priešingu atveju. Figūras sudarančios atkarpos apeinamos paveikslėliuose nurodyta tvarka.



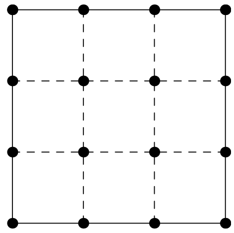
Antrosios figūros neįmanoma nubrėžti nurodytu būdu. Pradėję nuo bet kurio jos taško, pateksime į aklavietę. Figūra pakankamai nesudėtinga, todėl galima greitai patikrinti visas galimybes. Čia pateikiame matematinį samprotavimą, galintį padėti išspręsti panašius, bet sudėtingesnius uždavinius.

Jei kuris nurodytu būdu brėžiamos linijos taškas nėra nei pradžios, nei galo taškas, tai iš jo išeina lyginis skaičius linijos atkarpų. Taip yra, nes linija gali kirsti tašką kelis kartus, bet kiek kartų į jį sueina, tiek kartų iš jo ir išeina. Taigi nelyginis skaičius atkarpų gali išeiti iš daugiausiai dviejų figūros taškų – pradžios ir galo taškų. Tačiau antrojoje figūroje yra net 4 tokie taškai: iš X ir T išeina po vieną atkarpą, o iš Y ir Z – po tris (žr. pav.). Todėl jos nurodytu būdu nubrėžti neįmanoma.



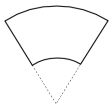
Turime iš viso 3 tinkamas figūras.

7. **B** 1

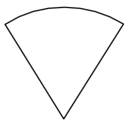
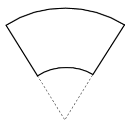


! Devynlangę servetėlę sulanksčius iki vieno kvadratėlio, visi devyni langeliai priglunda vienas prie kito. Nukirpus gautojo kvadratėlio vieną kampą, nukerpamas kiekvieno langelio lygiai vienas kampas, nes lygiai viena kiekvieno langelio viršūnė sutaps su nukerpama kvadratėlio viršūne.

Nukirptos servetėlės dalys gali būti tik aplink 16 pažymėtų taškų – langelių viršūnių (žr. pav.). Būtent aplink – kirpimo linija neina per pačius pažymėtus taškus (viršūnes), todėl su kiekvienu langelio kampu nukerpami tą pačią viršūnę turinčių kitų langelių kampai. Skyles galime gauti tik servetėlės viduje, t. y. aplink 4 vidinius taškus. Šiuos 4 taškus vienija tai, kad jie yra vidurinio langelio viršūnės. Tačiau skylė atsiras aplink lygiai vieną iš jų, nes lygiai vienas vidurinio langelio kampas nukerpamas (kuris – priklauso nuo servetėlės lankstymo būdo). Vadinasi, nepriklausomai nuo to, kaip sulankstyta servetėlė, skylė visada bus viena.

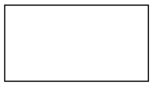
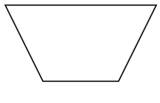
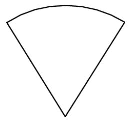
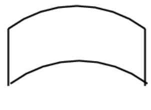
8. **E** 

? Kas vaikystėje yra mėginęs pagaminti popierinę kūgio formos kepurę, tam šis uždavinys turėtų būti labai lengvas. Kūgį (tiksliau – jo šoninį paviršių) gauname iš skritulio išpjovos (kaip atsakyme **C**; žr. pav.). Išpjovą ribojantys skritulio spinduliai suglaudžiami, o skritulio centras tampa kūgio viršūne.

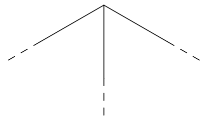
C)  **E)** 

Bet mums rūpi nupjautinis kūgis. Jį iš kūgio galima gauti nupjovus apatinę to kūgio dalį, kuri, žinoma, taip pat bus kūgis su ta pačia viršūne, tik mažesnis. Taigi nuo skritulio išpjovos turėtume nukirpti skritulio su tuo pačiu centru išpjovą, tik mažesnę. Atsakyme **E** matome likusią pradinės išpjovos dalį, o nukirpta dalis pavaizduota punktyru.

?? Atsakymą pasirinkti galima ir atmetimo būdu.

A)  **B)**  **C)**  **D)** 

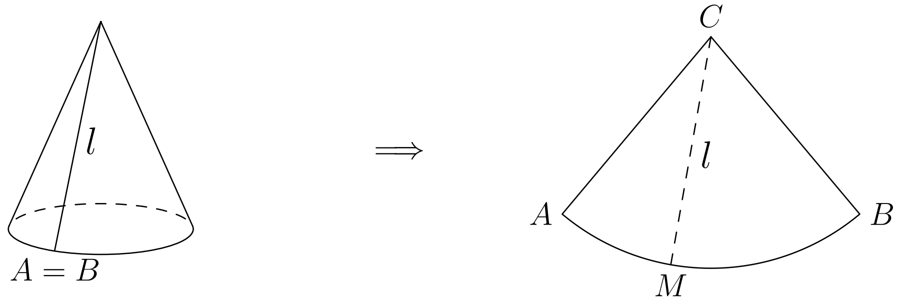
Kiekvieną iš figūrų **A**–**D** galima sulenkti ir suglausti jos lygius šoninius kraštus. Nupjautinio kūgio šoninis paviršius turi viršutinį kraštą ir apatinį kraštą, trumpesnį nei viršutinis. Lenkiant bet kurią plokščią figūrą bet kuri tos figūros linija (taip pat ir figūros kraštas) keičia formą, tampa erdvine, bet jos ilgis nepakinta. Taigi iš figūrų **A** ir **D** nupjautinio kūgio negausime – jų viršutinis ir apatinis kraštai yra to paties ilgio. Figūra **C** apatinio krašto apskritai neturi.



Liko atmesti atsakymą **B** (lygiašonė trapecija). Suglausdami šonines trapecijos kraštines, suglausime smailiuosius trapecijos kampus, kurių suma mažesnė nei $90° + 90° = 180°$. Intuityviai turėtų būti aišku, kad mažesnis nei ištiestinis kampas bus matyti kaip gautos erdvinės figūros krašto smailuma (žr. pav.), kurios nupjautinis kūgis neturi. Norint atmesti atsakymą, to pakanka.

Griežtai matematiškai šį pastebėjimą galima interpretuoti taip. Jau turimame kūgyje ir figūroje, gautoje sulenkus trapeciją, pažymėkime viršutinio krašto tašką, per kurį kerpama. Kūgyje iš abiejų pusių tuo pačiu atstumu nuo pažymėtojo taško dar pažymėkime viršutinio krašto taškus M_1, M_2. Taip pat ir sulenktoje trapecijoje pažymėkime taškus N_1, N_2, kurie turėtų sutapti su M_1, M_2, jei pačios figūros sutaptų. Taškus M_1 ir M_2 artinant kraštu prie kirpimo taško, dėl turimos smailumos atstumas tarp N_1 ir N_2 neišvengiamai mažės greičiau nei tarp M_1 ir M_2, taigi sulenkta trapecija ir kūgis negali sutapti. Technines detales praleidžiame.

! Ne iš patirties, bet matematiškai įsitikinkime, kad perkirpus kūgį (jo šoninį paviršių) išilgai kūgio sudaromosios, kurios ilgis yra l (žr. pav.), gausime skritulio, kurio spindulys yra l, išpjovą.



Jau minėjome, kad lankstant plokštumos figūras kinta linijų forma, bet ne ilgis. Tas pats galioja, kai ištiesiname erdvines figūras, įkerpame jas. Todėl trumpiausias atstumas tarp bet kurių sulenkiamos, tiesinamos, įkerpamos figūros taškų taip pat nekinta, nebent taškus jungianti trumpiausio ilgio linija kerta kirpimo liniją.

Perkirpę ir ištiesinę kūgį, gausime figūrą, kurią riboja trys linijos: dvi ilgio l linijos AC ir BC, atsiradusios kirpimo vietoje, ir kūgio pagrindo kraštas AB (erdvėje buvęs apskritimu). Trumpiausias atstumas nuo kūgio viršūnės C iki bet kurio kūgio pagrindo krašto taško M lygus l ir atkarpa CM nekerta kirpimo linijos (nebent sutampa su ja). Taigi ir išklojus kūgį kiekvienas kreivės AB (nebent išskyrus jos galus) taškas M bus nutolęs nuo C tuo pačiu atstumu l ir kūgio pagrindo kraštas plokštumoje virsta apskritimo lanku. Žinoma, lankui priklauso ir jo galai A, B.

Kad turėtume skritulio išpjovą, dar trūksta, kad linijos AC ir BC būtų tiesės atkarpos. Šios linijos jungia apskritimo, kurio spindulys yra l, centrą C su apskritimo lanko galais A, B. Linijų ilgiai yra l, t. y. lygūs trumpiausiam atstumui nuo C iki A ir B. Tad linijos turi būti tiesės atkarpos: trumpiausias atstumas tarp plokštumos taškų gaunamas, tik sujungus taškus tiesės atkarpa.

9. **C** $X + Y = Z$

? Pusskritulio plotą galima rasti, žinant skersmenį. Skersmenys yra stačiojo trikampio kraštinės, kurių ilgius pagal Pitagoro teoremą sieja sąryšis. Taigi šis sąryšis sieja ir nagrinėjamus plotus.

Pusskritulių, kurių plotai yra X, Y ir Z, skersmenis atitinkamai pažymėkime a, b ir c. Tada pusskritulių spinduliai lygūs $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$, skritulių plotai lygūs $\pi(\frac{a}{2})^2, \pi(\frac{b}{2})^2, \pi(\frac{c}{2})^2$ ir pusskritulių plotai lygūs $X = \frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{8}, Y = \frac{\pi b^2}{8}, Z = \frac{\pi c^2}{8}$. Taigi $a^2 = 8X/\pi, b^2 = 8Y/\pi, c^2 = 8Z/\pi$.

Pagal Pitagoro teoremą $a^2 + b^2 = c^2$. Tada $8X/\pi + 8Y/\pi = 8Z/\pi$. Padauginę lygybę iš π ir padaliję ją iš 8, gauname, kad $X + Y = Z$.

! Įsitikinkime, kad kiti atsakymuose nurodyti sąryšiai negali būti teisingi.

A) Kadangi $X + Y = Z$, tai $X + Y$ negali būti mažiau nei Z.

B) Jei $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$, tai $Z = (\sqrt{Z})^2 = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 = (\sqrt{X})^2 + 2\sqrt{X}\sqrt{Y} + (\sqrt{Y})^2 = X + 2\sqrt{XY} + Y > X + Y$.

D) ir **E)** Kadangi $X + Y = Z$, tai $Z^2 = (X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 > X^2 + Y^2$.

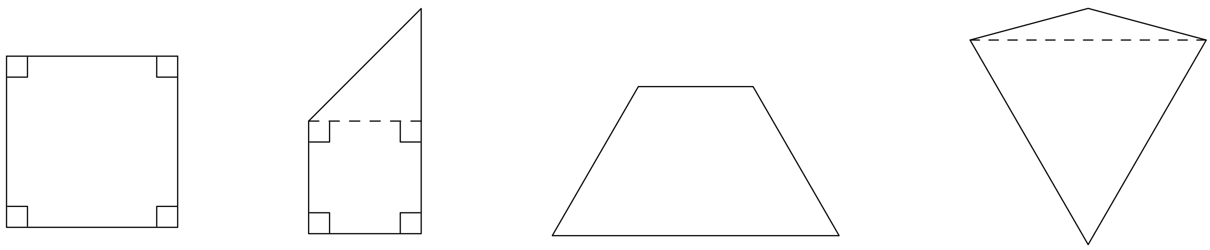
10. B 0, 1, 2, 3

! Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka išsiaiškinti, ar galima gauti 0, 2, 3 arba 4 smailiuosius kampus. Kad įsitikintume, jog reikiami keturkampiai egzistuoja, tiesiog konstruokime juos. Įrodant, kad keturkampiai su tam tikrais kampais neegzistuoja, pravers keturkampio kampų suma $(n - 2) \cdot 180° = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$. Atkreipkime dėmesį, kad keturkampiai turi būti iškilieji, t. y. jų visi 4 (vidiniai) kampai turi būti mažesni nei 180°.

Nagrinėkime paprasčiausią keturkampį – kvadratą. Jo visi kampai lygūs 90°. Taigi iškilasis keturkampis gali turėti 0 smailiųjų kampų.

Lygiašonė trapecija su kampais $60°, 60°, 120°, 120°$ turi du smailiuosius kampus.

Turbūt sunkiausia gauti keturkampį su 3 smailiaisiais kampais. Suglauskime lygiakraštį trikampį ir lygiašonį trikampį su kampais $150°, 15°, 15°$, kaip parodyta dešiniajame paveikslėlyje. Gauname iškiląjį keturkampį, kurio kampai lygūs $150°, 15° + 60° = 75°, 60°, 75°$. Taigi gavome 3 smailiuosius kampus.



0 1 2 3

O 4 smailiųjų kampų keturkampis negali turėti, nes priešingu atveju visi 4 kampai mažesni nei 90°, o jų suma, viena vertus, lygi 360°, bet, kita vertus, mažesnė nei $90° + 90° + 90° + 90° = 360°$.

Kad sprendimas būtų pilnas, iš karto pateikiame pavyzdį, kai keturkampis turi 1 smailųjį kampą. Suglaudę kvadratą ir lygiašonį statųjį trikampį, kaip parodyta paveikslėlyje, gauname stačiąją trapeciją su kampais $90°, 90°, 45°, 45° + 90° = 135°$.

11. C 2016

! Dėl patogumo pasižymėkime $a = 2015$. Pastebėkime, kad $a + a = 2a$, $a - a = 0$, $a \cdot a = a^2$ ir $a : a = 1$. Tada duotojo reiškinio reikšmė lygi

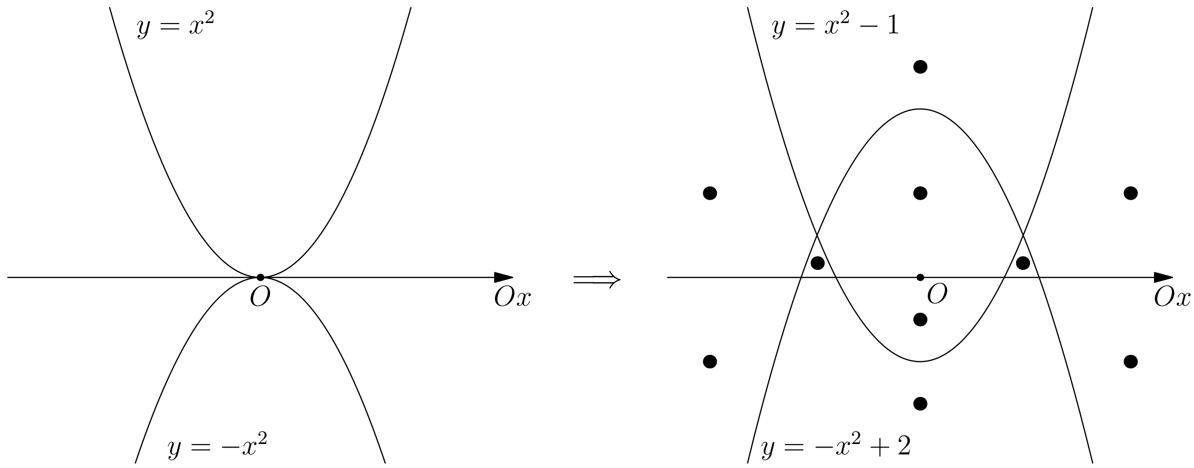
$$\sqrt{2a + 0 + a^2 + 1} = \sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a + 1)^2} = \sqrt{2016^2} = 2016.$$

Svarbiausia šiame uždavinyje yra nesuprastinti reiškinio per daug ir pastebėti pilnąjį kvadratą $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$.

12. (**D**) 10

? Funkcijų grafikai yra parabolės. Jų padėtį plokštumoje patogu įsivaizduoti (būtent įsivaizduoti, o ne analizuoti) taip. Pradžioje turime dvi tos pačios formos, simetriškas viena kitai Ox ašies atžvilgiu paraboles $y = x^2$ ir $y = -x^2$ – vieną virš ašies, kitą po ašimi. Jos liečia viena kitą ir Ox ašį taške O.

Kad gautume parabolę $y = 2 - x^2$, turime apatinę parabolę $y = -x^2$ pastumti į viršų per 2. Kad gautume parabolę $y = x^2 - 1$, turime viršutinę parabolę $y = x^2$ pastumti į apačią per 1. Pastumtos parabolės lieka viena kitai simetriškos, bet ima kirstis dviejuose taškuose ir horizontali simetrijos ašis eina per tuos sankirtos taškus. Kadangi apatinę parabolę į viršų pastūmėme labiau nei viršutinę į apačią, tai simetrijos ašis atsiduria virš Ox ašies. Pastumtos parabolės taip pat ima kirsti Ox ašį – kiekviena dviejuose taškuose. Šie kirtimosi taškai yra Ox ašyje, taigi po simetrijos ašimi. Gauname situaciją, pavaizduotą dešiniajame paveikslėlyje. Plokštuma padalyta į 10 sričių (kiekvieną iš jų pažymėjome tašku).



! Žinoma, uždavinį galima išspręsti tiksliau pavaizduojant paraboles ašies atžvilgiu. Tam verta rasti dviejų parabolių ir tiesės $y = 0$ (tokia yra Ox ašies lygtis) sankirtos taškus.

Išsprendę lygčių sistemą $\{y = 2 - x^2,\ y = x^2 - 1\}$, randame parabolių sankirtos taškus $(\pm\sqrt{1{,}5}; 0{,}5)$.

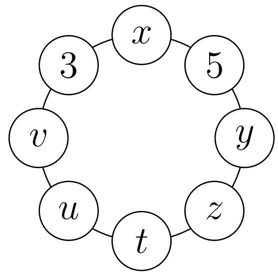
Išsprendę lygčių sistemą $\{y = 2 - x^2,\ y = 0\}$, randame parabolės ir Ox ašies sankirtos taškus $(\pm\sqrt{2}; 0)$.

Išsprendę lygčių sistemą $\{y = x^2 - 1,\ y = 0\}$, randame kitos parabolės ir Ox ašies sankirtos taškus $(\pm 1; 0)$.

Dar galime rasti Oy ašyje esančias parabolių viršūnes $(0; 2)$ ir $(0; -1)$.

Per rastus taškus nubrėžę paraboles, apčiuopsime tą pačią situaciją, kaip **?** dalyje.

13. (**E**) Ignas apsiriko



! Įrašytus skaičius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Reikia rasti t.

Jei Ignas neapsiriko, turėtume tokias skaičių reikšmes:

$$x = 3 + 5 = 8, \quad 5 = x + y = 8 + y, \quad y = -3, \quad -3 = y = 5 + z,$$

$$z = -8, \quad -8 = z = y + t = -3 + t, \quad t = -5.$$

Taigi galėtume pasirinkti atsakymą **A**. Bet tai būtų klaida – bent jau kol kas negalime atmesti atsakymo **E**, kuris verčia patikrinti, ar toks skaičių surašymas egzistuoja.

Toliau eikime ratu:

$$-5 = t = z + u = -8 + u, \quad u = 3, \quad 3 = u = t + v = -5 + v,$$

$$v = 8, \quad 8 = v = u + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 8.$$

Gavome prieštarą. Taigi Ignas apsiriko.

!! Prieštarą galima gauti ir greičiau.

Turi galioti šios dvi lygybės: $y = 5 + z, z = y + t$. Jas pasirinkome, nes jose yra net po du bendrus nežinomuosius y ir z. Sudėjus lygtis, šie nežinomieji išnyksta: $y + z = 5 + z + y + t = t + 5 + (y + z)$ ir $0 = t + 5$. Taigi $t = -5$.

Iš analogiškų lygybių $v = 3 + u, u = v + t$ randame $t = -3 \neq -5$.

14. (**C**) c

! Kad būtų paprasčiau, dalybą pakeiskime daugyba, o atimtį sudėtimi: $c = be$, $d = a + b$, $e = a + d$. Žinoma, natūraliųjų skaičių suma didesnė nei bet kuris iš dėmenų, todėl $d > a$, $d > b$, $e > a$ ir $e > d$. Natūraliųjų skaičių sandauga ne mažesnė nei bet kuris iš dauginamųjų (gali būti lygi dauginamajam, jei kitas dauginamasis lygus 1). Todėl $c \geqslant b$ ir $c \geqslant e$. Duota, kad 5 skaičiai yra skirtingi, todėl $c > b$ ir $c > e$.

Gautąsias nelygybes galima panaudoti klaidingiems atsakymams eliminuoti:

$e > a$ (ir $d > a$), tad skaičius a nėra didžiausias;

$c > b$ (ir $d > b$), tad skaičius b nėra didžiausias;

$e > d$, tad skaičius d nėra didžiausias;

$c > e$, tad skaičius e nėra didžiausias.

Vadinasi, didžiausias yra skaičius c.

Atkreipkime dėmesį, kad įrodymas lieka galioje, net jei pamiršime apie lygybę $d = a + b$ ir iš jos išplaukiančias nelygybes. Kad sprendimas būtų pilnas, pateikiame pavyzdį, įrodantį, jog sąlygą tenkinantys skaičiai egzistuoja: $a = 1$, $b = 2$, $c = 8$, $d = 3$, $e = 4$.

15. (B) 6

! Pirmus tris skaičius pažymėkime x_1, x_2, x_3, o kitus tris skaičius y_1, y_2, y_3. Tada pagal geometrinio vidurkio apibrėžimą $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = 3$ ir $\sqrt[3]{y_1y_2y_3} = 12$. Mums reikia rasti $\sqrt[6]{x_1x_2x_3y_1y_2y_3}$. Pošaknyje matome tas pačias sandaugas $x_1x_2x_3$ ir $y_1y_2y_3$. Raskime jas, bet palikime kėlimą laipsniu, kad vėliau galėtume suprastinti su 6-ojo laipsnio šaknimi:

$$x_1x_2x_3 = 3^3, \quad y_1y_2y_3 = 12^3, \quad \sqrt[6]{x_1x_2x_3y_1y_2y_3} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 12^3} =$$

$$= \sqrt[6]{(3 \cdot 12)^3} = \sqrt[6]{36^3} = (36^3)^{\frac{1}{6}} = 36^{3 \cdot \frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6.$$

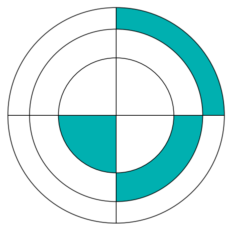
Galima skaičiuoti ir kiek kitaip. Bet kokiam teigiamam skaičiui a galioja $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$. Todėl

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3y_1y_2y_3} = \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \cdot \sqrt[3]{y_1y_2y_3} = 3 \cdot 12 = 36 = 6^2,$$

$$\sqrt[6]{x_1x_2x_3y_1y_2y_3} = \sqrt{\sqrt[3]{x_1x_2x_3y_1y_2y_3}} = \sqrt{6^2} = 6.$$

Pastebėkime, kad visų 6 skaičių vidurkis lygus dviejų duotų vidurkių 3 ir 12 vidurkiui: $\sqrt{3 \cdot 12} = 6$. Taip būtų ir su kitomis duotomis reikšmėmis. Iš tiesų 6-ojo laipsnio šaknis iš 6 skaičių sandaugos visada lygi kvadratinei šakniai iš kubinių šaknų, kurios ir yra duotieji vidurkiai, sandaugos. Tai pastebėjus, atsakymą galima gauti praktiškai vienu veiksmu.

16. (A) $\sqrt{6}$



! Koncentriškų apskritimų spindulius pažymėkime $r_1 = 1$, r_2, r_3. Čia $r_1 < r_2 < r_3$. Statmeni skersmenys dalija skritulius į ketvirčius. Dabar svarbiausia interpretuoti tris nudažytas sritis. Jos gali būti įvardytos taip: sritis kairėje yra mažojo skritulio ketvirtis; dešinioji apatinė sritis yra vidurinio skritulio ketvirtis, nuo kurio atskirtas mažojo skritulio ketvirtis; sritis viršuje yra didžiojo skritulio ketvirtis, nuo kurio atskirtas vidurinio skritulio ketvirtis. Taigi jei skritulių ketvirčių plotai lygūs $S_1 = \pi r_1^2/4$, $S_2 = \pi r_2^2/4$, $S_3 = \pi r_3^2/4$, tai nudažytų sričių plotai tada lygūs S_1, $S_2 - S_1$ ir $S_3 - S_2$. Jie lygūs tarpusavyje, o apskaičiuoti S_1 galime iš karto:

$$S_1 = \frac{\pi r_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$S_2 - S_1 = S_1, \qquad \frac{\pi r_2^2}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi r_2^2}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$r_2^2 = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{4} = 2, \qquad r_2 = \sqrt{2},$$

$$S_3 - S_2 = S_1, \qquad \frac{\pi r_3^2}{4} - \frac{\pi r_2^2}{4} = \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi r_3^2}{4} = \frac{\pi r_2^2}{4} + \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \quad r_3^2 = \frac{3\pi}{4} : \frac{\pi}{4} = 3, \quad r_3 = \sqrt{3}.$$

Taigi ieškoma spindulių sandauga lygi

$$r_1r_2r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}.$$

!! Uždavinį galima išspręsti be lygčių. Vėlgi mintyse interpretuokime nudažytas sritis per skritulių ketvirčius. Apjungę kairiąją sritį (mažojo skritulio ketvirtį) ir dešiniąją apatinę sritį (to paties ploto), gausime dvigubo ploto vidurinio skritulio ketvirtį. O jį sujungę dar ir su likusia sritimi (vėl to paties ploto), gausime jau trigubo ploto didžiojo skritulio ketvirtį. Taigi skritulių ketvirčių plotų santykis yra $1 : 2 : 3$. Skritulių plotai 4 kartus didesni ir jų santykis taip pat yra $1 : 2 : 3$. Kadangi skritulio plotas proporcingas skritulio spindulio kvadratui, tai atitinkamų spindulių santykis turi būti $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Belieka prisiminti, kad mažiausias spindulys yra 1, tad likę du spinduliai lygūs $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{3}$. Spindulių sandauga lygi $1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

17. Ⓒ 3:7

! Pradines automobilių kainas pažymėkime a ir b (eurų ar kitų piniginių vienetų). Reikia rasti $a : b$.

Uždavinio informaciją užrašykime lygtimi. Kaina, už kurią prekiautojas pardavė pirmąjį automobilį, 40% didesnė už automobilio pradinę kainą a. Todėl ji lygi $a \cdot (1 + \frac{40\%}{100\%}) = 1{,}4a$. Panašiai antrasis automobilis parduotas už kainą $1{,}6b$, o abu automobiliai, pradžioje kainavę $a + b$, parduoti už bendrą kainą $1{,}54(a + b)$. Taigi naująją abiejų automobilių kainą galime užrašyti dviem būdais:

$$1{,}4a + 1{,}6b = 1{,}54(a + b).$$

Kad rastume $a : b$, pertvarkykime lygtį, kad jos vienoje pusėje liktų tik a, o kitoje – tik b:

$$1{,}4a + 1{,}6b = 1{,}54a + 1{,}54b,$$

$$\begin{aligned} 1{,}6b - 1{,}54b &= 1{,}54a - 1{,}4a, \\ (1{,}6 - 1{,}54)b &= (1{,}54 - 1{,}4)a, \\ 0{,}06b &= 0{,}14a. \end{aligned}$$

Padauginkime lygtį iš 100:

$$6b = 14a, \quad a : b = 6 : 14 = 3 : 7.$$

18. Ⓒ $\frac{5}{12}$

! Barboros metimas turi 6 vienodai galimas baigtis: atvirsta 1, 2, 3, 4, 5, 6 akutės. Nepriklausomas Žygimanto metimas turi dvi vienodai galimas baigtis: atvirsta 2 arba 5 akutės. Taigi abu metimai kartu turi $6 \cdot 2 = 12$ vienodai galimų baigčių. Galime net jas išvardyti (pirmoji koordinatė žymi, kiek akučių iškrito Barborai, o antroji – kiek Žygimantui):

$$(1, 2),\ (2, 2),\ (3, 2),\ (4, 2),\ (5, 2),\ (6, 2),\ (1, 5),\ (2, 5),\ (3, 5),\ (4, 5),\ (5, 5),\ (6, 5).$$

Mums reikia rasti įvykio, kad antrasis (Žygimanto) skaičius didesnis nei pirmasis, tikimybę p. Kadangi visos baigtys vienodai galimos, tai galima taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą: $p = \frac{m}{n}$. Čia $n = 12$ yra baigčių skaičius, o m yra palankių baigčių skaičius. Išvardykime palankias baigtis (antrasis skaičius didesnis nei pirmasis):

$$(1,2),\ (1,5),\ (2,5),\ (3,5),\ (4,5).$$

Jų yra penkios, todėl $m = 5$ ir $p = \frac{5}{12}$.

!! Pastebėkime, kad jei Žygimanto kauliuko sienelėse būtų 2, 2, 2, 2, 5, 5 akutės, tai uždavinį turėtume spręsti kiek kitaip, nes Žygimanto metimo baigtys nebūtų vienodai galimos (dvi akutės iškrenta dažniau). Kad baigtys būtų vienodai galimos, jas turėtume parinkti šešias (kiekvienos iš 6 sienelių atvirtimas vienodai galimas). Šitaip, su kitokia baigčių aibe galima spręsti ir mūsų uždavinį. Sprendimas tampa sudėtingesnis, bet čia jį pateikiame kaip tą, kuris tiktų ir kitose, sudėtingesnėse situacijose, ir kaip iliustraciją, kad tikimybinis uždavinys gali turėti daugiau nei vieną matematinę interpretaciją.

Barboros metimas turi 6 vienodai galimas baigtis: atvirsta 1, 2, 3, 4, 5, 6 akutės. Nepriklausomas Žygimanto metimas turi 6 vienodai galimas baigtis: atvirsta 2, 2, 2, 5, 5, 5 akutės. Taigi abu metimai kartu turi $6 \cdot 6 = 36$ vienodai galimas baigtis. Jų per daug, kad jas vardytume, todėl skaičiuosime jas abstrakčiai.

Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą $p = \frac{m}{n}$. Čia $n = 36$. Skaičius m yra palankių baigčių skaičius: kiek yra baigčių, kur Žygimanto skaičius didesnis nei Barboros? Žygimantui atvirto 2 arba 5 akutės.

Tarkime, Žygimantui atvirto 2 akutės. Barborai jų atvirto mažiau – tik viena akutė. Žygimantui 2 akutės galėjo atvirsti 3 būdais (yra 3 sienelės su tiek akučių), o Barborai viena akutė – vieninteliu būdu. Taigi čia gauname $3 \cdot 1 = 3$ palankias baigtis.

Jei Žygimantui atvirto 5 akutės, o Barborai jų atvirto mažiau, tai jai atvirto 1, 2, 3 arba 4 akutės. Žygimantui 5 akutės galėjo atvirsti 3 būdais (yra 3 sienelės su tiek akučių), o Barboros kauliukas turi 4 tinkamas sieneles (kur yra 1, 2, 3 ir 4 akutės). Taigi čia gauname $3 \cdot 4 = 12$ palankių baigčių.

Iš viso gauname $m = 3 + 12 = 15$ palankių baigčių, ir $p = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

19. C 28

! Reikia rasti, kiek skirtingų reikšmių įgyja natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 2015 skaitmenų suma. Pirmiausia nustatykime, kokia yra didžiausia iš tų sumų. Didesnis skaičius nebūtinai turi didesnę skaitmenų sumą. Pvz., skaičiaus 1000 skaitmenų suma tėra 1, o skaičiaus 999 net 27.

Jei skaičius yra mažesnis nei 1000, tai jis turi daugiausiai 3 skaitmenis ir jų suma ne didesnė nei $9 + 9 + 9 = 27$. Toliau nagrinėkime keturženklius skaičius nuo 1000 iki 2015. Jų pirmas skaitmuo ne bet koks: 1 arba 2. Jei pirmas skaitmuo yra 1, tai likę trys skaitmenys gali būti bet kokie ir didžiausią sumą gausime, kai jie lygūs 9. T. y. kai turime skaičių 1999, gauname didžiausią sumą $1 + 9 + 9 + 9 = 28$. Jei pirmas skaitmuo yra 2, tai antras skaitmuo tegali būti 0, ir todėl skaitmenų suma tikrai ne didesnė nei $2 + 0 + 9 + 9 = 20 < 28$.

Taigi didžiausia suma yra 28. Lengva pastebėti, kad visos mažesnės sumos taip pat yra galimos: pradėkime nuo rastojo skaičiaus 1999 su didžiausia suma ir mažinkime ją, iš eilės vienetu mažindami skaitmenis:

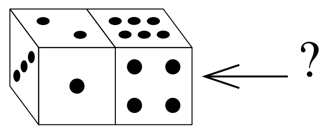
$$1999,\ 1998,\ 1997, \ldots, 1990,\ 1980,\ 1970, \ldots, 1900,\ 1800,\ 1700, \ldots, 1100,\ 1000.$$

Atitinkamos skaitmenų sumos lygios

$$28,\ 27,\ 26, \ldots, 19,\ 18,\ 17, \ldots, 10,\ 9,\ 8, \ldots, 2,\ 1.$$

Taigi gavome iš viso 28-ias skaitmenų sumas ir todėl rutuliukų 28 spalvas.

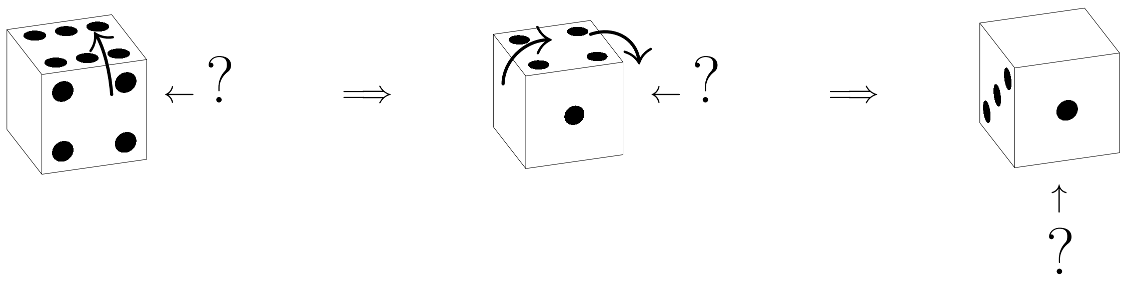
20. (A) Tik 5



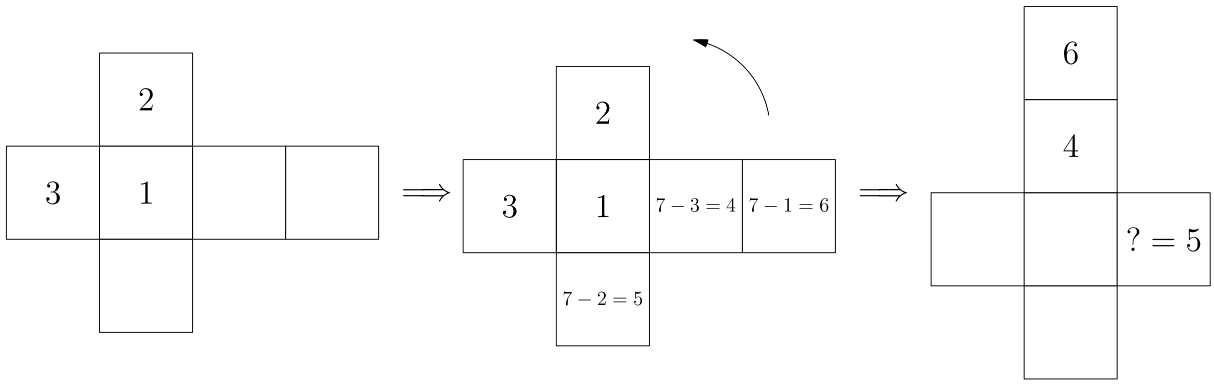
! Akivaizdu, kad klaustuku pažymėtoje sienelėje negali būti 4 arba 6 akutės: tiek jų yra priekinėje ir viršutinėje dešiniojo kauliuko sienelėse. Kadangi šis kauliukas standartinis, tai jo nematomoje sienelėje, priešingoje priekinei, yra $7 - 4 = 3$ akutės, o apatinėje sienelėje $7 - 6 = 1$ akutė. Taigi dešiniojoje sienelėje tegali būti tik 2 arba 5 akutės.

Kai kas galbūt suskubtų pasirinkti atsakymą **C**. Bet juk dar nepanaudojome visos uždavinio informacijos, tad atsakymai **A** ir **B** taip pat gali būti teisingi. Niekaip nepanaudojome kairiojo kauliuko. Turime jo vaizdą paveikslėlyje ir informaciją, kad kauliukai yra vienodi.

Kadangi kauliukai vienodi, tai dešinįjį kauliuką galima paversti ar pasukti taip, kad gautume pirmojo kauliuko vaizdą. Teks įjungti vaizduotę. Apatinė dešiniojo kauliuko sienelė su viena akute turi tapti priekine. Kauliuką paverskime kryptimi nuo savęs: kad šoninės sienelės nepakistų, o likusios, kurių akučių skaičių žinome, pasisuktų ratu per vieną (4 akutės atsiduria viršuje, 1 akutė priekyje 3 akutės apačioje; žr. pav.). Dabar nekeisdami priekinės sienelės paverskime kauliuką, kad kairėje sienelėje būtų 3 akutės. Tada dešinėje sienelėje atsiduria 4 akutės, o sienelė, pažymėta klaustuku, tampa apatine. Jau turime gauti vaizdą kaip kairiojo kauliuko, todėl viršutinėje sienelėje turi būti 2 akutės. Taigi sienelėje, pažymėtoje klaustuku, dabar apatinėje, yra $7 - 2 = 5$ akutės, o 2 akučių būti negali.



!! Kitaip uždavinį galima išspręsti nupiešus bendrą vienodų kauliukų išklotinę (žr. pav.; akutes pakeitėme skaičiais). Pradžioje išklotinėje pavaizduokime tik kairiojo kauliuko regimas sieneles, tada pasinaudokime tuo, kad kauliukas yra standartinis, bei pažymėkime likusias sieneles. Nustatykime, kuri sienelė yra dešinioji, jei 6 akutės yra viršuje, o 4 akutės yra priekyje, ir rasime klaustuku pažymėtą sienelę.



21. D 3025

! Sudėkime pirmosios eilutės skaičius: $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$. Tada atskirai sudėkime antrosios eilutės skaičius. Kadangi būtų neracionalu tai atskirai daryti su kiekviena eilute, mėginkime pastebėti dėsningumą, siejantį eilučių sumas. Kiekvienas iš skaičių antrojoje eilutėje yra vieno iš skaičių $1, 2, \ldots, 10$ ir skaičiaus 2 sandauga. Įrašykime šias sandaugas skaičių sumoje:

×	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
10	10	20	30	...	100

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 20 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 10 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 2 \cdot 55.$$

Kaip sandaugas apsimoka užrašyti ir trečiosios eilutės skaičius. Jos skaičių suma lygi

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 3 \cdot 10 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 3 \cdot 55.$$

Dėsningumą pastebėti nesunku: i-tosios eilutės skaičių suma lygi

$$i + 2i + 3i + \ldots + 10i = i \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = i \cdot 55.$$

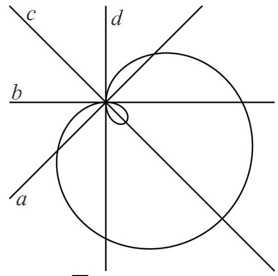
Taigi likusių eilučių sumos yra $4 \cdot 55$, $5 \cdot 55$, …, $10 \cdot 55$. Užuot iš karto apskaičiavę kiekvieną iš reikšmių, palikime dėsningumą matomą. Visų lentelės sandaugų suma lygi rastųjų sumų sumai

$$55 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + \ldots + 10 \cdot 55 = 55 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 55 \cdot 55.$$

Konkurso dalyviai šią paskutinę sandaugą be skaičiuoklio galėjo rasti daugindami stulpeliu. Bet norint pasirinkti atsakymą, tai nebūtina. Galima pastebėti, kad ši sandauga baigiasi skaitmeniu 5 ir kad ji didesnė nei $50 \cdot 50 = 2500$. Lieka vienintelis tinkamas atsakymas **D** $55 \cdot 55 = 3025$.

!! Uždavinį apie skaičius kartais galima išspręsti geometriškai. Duotąją lentelę įsivaizduokime kaip 10×10 stačiakampį, kurio langeliuose įrašytos sandaugos. Įsivaizduokime, kad lentelės stulpelių pločiai nėra vienodi ir iš kairės į dešinę lygūs $1, 2, 3, \ldots, 10$. Taip pat ir eilučių aukščiai iš eilės lygūs $1, 2, 3, \ldots, 10$. Lentelė yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus $1+2+3+\ldots+10 = 55$. Kiekvieno langelio plotas lygus jame įrašytam skaičiui – langelio ilgio ir pločio sandaugai. O visos lentelės plotas yra šių plotų suma, t. y. ieškoma visų sandaugų suma. Kitą vertus, jis lygus lentelės kraštinės kvadratui $55^2 = 3025$.

22. **(A)** a



? Raskime kreivės sankirtos su Oy ašimi taškus. Kreivės lygtį tenkina taškas $O(0;0)$, t. y. kreivė eina per koordinačių pradžią. Taškas $(x;y)$ priklauso Oy ašiai, kai $x = 0$. Įrašykime šia reikšmę į kreivės lygtį:

$$(0 + y^2 - 0)^2 = 2(0 + y^2), \quad y^4 = 2y^2,$$

$$y = 0 \text{ (šiuo atveju gauname } O(0;\,0)) \text{ arba } y^2 = 2, \quad y = \pm\sqrt{2}.$$

Taigi Oy ašis ir Paskalio sraigė kertasi trijuose taškuose $(0;0)$ ir $(0;\pm\sqrt{2})$. Koordinačių pradžia yra per vidurį tarp likusių dviejų taškų.

Tiesės b ir d kerta kreivę tik dviejuose taškuose. Tiesės a ir c kerta kreivę trijuose taškuose, bet tiesėje c vidurinis sankirtos taškas nėra vienodai nutolęs nuo kitų dviejų. Taigi lieka tiesė a. Jei ne atsakymas **E**, uždavinys būtų išspręstas. Visgi neradus jokių argumentų, liudijančių prieš tiesę a, galima rizikuoti ir pasirinkti atsakymą **A**.

! Įrodykime, kad jokia kita plokštumos tiesė negalėtų būti Oy ašimi. Tam nagrinėkime ir Ox ašį.

Jei į kreivės lygtį vietoj y įrašysime $-y$, lygybė nepasikeis, nes $(-y)^2 = y^2$. Taigi jei taškas $(x;y)$ tenkina lygtį, tai ir jam Ox ašies atžvilgiu simetriškas taškas $(x;-y)$ tenkina lygtį. Vadinasi, Paskalio sraigė yra simetriška Ox ašies atžvilgiu. Tai įrodo, kad Ox ašis sutampa su kreivės vienintele simetrijos ašimi – tiese c. Koordinačių ašys statmenos, bet tai dar neįrodo, kad Oy ašis yra tiesė a, nes yra ir kitų tiesių, statmenų c. Dar reikia įrodyti, kad ašių sankirtos taškas O sutampa su tiesių a ir c sankirta.

Raskime kreivės sankirtos su Ox ašimi taškus. Kreivės lygtį tenkina taškas $O(0;0)$. Taškas $(x;y)$ priklauso Ox ašiai, kai $y = 0$. Įrašykime šia reikšmę į kreivės lygtį:

$$(x^2 + 0 - 2x)^2 = 2(x^2 + 0), \quad (x^2 - 2x)^2 = 2x^2, \quad (x(x-2))^2 = x^2(x-2)^2 = 2x^2,$$

$$x = 0 \text{ (šiuo atveju gauname } O(0;\,0)) \text{ arba } (x-2)^2 = 2,$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{2}, \quad x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Taigi randame tris sankirtos taškus $(0;0)$ ir $(2 \pm \sqrt{2};0)$. Paveikslėlyje tai yra tiesės c ir kreivės trys sankirtos taškai. Aiškiai matyti, kad atstumai nuo vidurinio taško iki kitų dviejų nėra lygūs.

Surašykime taškų x koordinates didėjimo tvarka: 0, $2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$, $2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4$. Taigi vidurinis taškas yra $(2 - \sqrt{2};0)$, o iš likusių dviejų taškų taškas O yra tas, kuris yra arčiau vidurinio taško nei kitas taškas $(2+\sqrt{2};0)$. Paveikslėlyje tai ir yra tiesių a ir c sankirtos taškas.

Per tašką O einanti ir Ox ašiai (tiesei c) statmena tiesė a turi sutapti su Oy ašimi.

23. (D) Teiginys **B** klaidingas

! Teiginių teisingumą ar klaidingumą pradėkime nagrinėti ne nuo pirmojo teiginio, bet nuo aiškiausio teiginio. Akivaizdu, kad teiginys **E)** $1 + 1 = 2$ teisingas.

Tada pereikime prie teiginio, kuris kažką pasako apie jau išnagrinėtą teiginį. Teiginys **C** meluoja, kad teiginys **E** klaidingas, todėl pats yra klaidingas.

Apie teiginį **C** kalbama teiginyje **A**. Šis teiginys meluoja, kad teiginys **C** teisingas, todėl pats yra klaidingas.

Apie teiginį **A** kalbama teiginyje **B**. Šis teiginys meluoja, kad teiginys **A** teisingas, todėl pats yra klaidingas.

Apie teiginį **B** kalbama teiginyje **D**. Šis teiginys teisingai teigia, kad teiginys **B** klaidingas, todėl pats yra teisingas.

Trumpiau būtų galima užrašyti: **E**, todėl ne **C**, todėl ne **A**, todėl ne **B**, todėl **D**.

Iš dviejų teisingų teiginių **D** ir **E** pirmasis yra **D**.

24. (C) 22

! n-kampio kampų suma lygi $(n-2) \cdot 180°$, o taisyklingojo n-kampio kampai lygūs. Todėl kiekvienas iš jų lygus $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Laipsnių skaičius turi būti sveikasis. Užrašykime jį kiek kitaip:

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180 = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180 = 180 - \frac{360}{n}.$$

Skaičius bus sveikasis tada ir tik tada, kai skaičius $\frac{360}{n}$ yra sveikasis, t. y. kai 360 dalijasi iš n.

Taigi geometrinis uždavinys tampa uždaviniu apie natūraliuosius skaičiaus 360 daliklius. Skaičiaus 360 dalikliai yra 1, 2, 3, …, 180, 360. Mums rūpi jų kiekis, todėl nebūtina visų vardyti (nors ir tai nėra per sudėtinga užduotis). Išskaidykime skaičių pirminiais daugikliais: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Šio skaičiaus daliklis d pats negali turėti kitų pirminių daliklių be 2, 3 ir 5. Todėl $d = 2^a 3^b 5^c$. Čia rodiklis a gali būti lygus 0, 1, 2 arba 3 (turime 4 galimybes), bet negali būti didesnis, nes 360 dalijasi tik iš 2^3. Taip pat $b = 0$, 1 arba 2 (čia yra 3 galimybės) ir $c = 0$ arba 1 (čia 2 galimybės). Iš viso turime $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ galimybes ir kiekvienu atveju gauname vis po kitokį skaičiaus 360 daliklį.

Taigi n gali įgyti 24 reikšmes. Bet tokio atsakymo nėra. Kodėl? Taisyklingojo daugiakampio negausime, kai $n = 1$ arba 2, – daugiakampis turi bent 3 viršūnes! Visais kitais atvejais taisyklingasis n-kampis egzistuoja, o jo kampų dydis yra, kaip jau įrodėme, $180° - \frac{360°}{n}$. Jei n dalija 360, laipsnių skaičius bus sveikasis. Taigi iš 24 skaičių turime atmesti tik 2 ir gauname atsakymą $24 - 2 = 22$. Galime ir išvardyti 22 skaičiaus n reikšmes:

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,$$

$$20 = \frac{360}{18},\ 24 = \frac{360}{15},\ 30 = \frac{360}{12},\ 36 = \frac{360}{10},\ 40 = \frac{360}{9},\ 45 = \frac{360}{8},$$

$$60 = \frac{360}{6},\ 72 = \frac{360}{5},\ 90 = \frac{360}{4},\ 120 = \frac{360}{3},\ 180 = \frac{360}{2},\ 360 = \frac{360}{1}.$$

25. (E) 5

! Iš eilės vardykime dvejeto laipsnius: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Kitas dvejeto laipsnis 1024 jau per didelis, keturženklis, jį panaudoję negalime gauti triženklio skaičiaus. Taigi turime 10 skaičių, iš kurių reikia taip pasirinkti devynis (tiesiog vieną skaičių praleisti), kad jų suma būtų triženklis skaičius. Sužinoti, kokia yra viena ar kita suma, paprasčiau ne vieną prie kito dedant 9 iš 10 skaičių, bet iš karto sudėjus visus 10 skaičių, o tada iš sumos nereikalingą skaičių atėmus.

Visų skaičių suma lygi $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = 1023$. Tingint skaičiuoti tokią sumą, galima pasinaudoti formule (geometrinės progresijos sumai) $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$, kai $n = 9$. Formulę, galiojančią bet kuriam natūraliajam n, galima įrodyti tokiu būdu: jei $s = 1+2+2^2+\ldots+2^n$, tai $2s = 2+2^2+2^3+\ldots+2^{n+1} = (1+2+2^2+\ldots+2^n)-1+2^{n+1} = s+2^{n+1}-1$ ir $s = 2s-s = 2^{n+1}-1$.

Jei iš 1023 atimsime 1, 2, 4, 8 arba 16, gausime keturženklį skaičių. Likę 5 skaičiai tinka: $1023-32 = 991$, $1023-64 = 959$, $1023-128 = 895$, $1023-256 = 767$ ir $1023-512 = 511$. Taigi kaip 9 skirtingų dvejeto laipsnių suma gali būti užrašyti 5 triženkliai skaičiai. Pažymėsime, kad jų apskaičiuoti nebūtina – tereikia pastebėti, kad jie mažesni nei 1000, bet didesni nei 100.

26. (D) 4

! Pažymėkime stačiojo trikampio kraštinių ilgius $a = 20$, b, c. Čia b ir c yra natūralieji skaičiai ir $a^2+b^2 = 400+b^2 = c^2$. Bet kurie tokie trys natūralieji skaičiai, tenkinantys Pitagoro teoremą, apibrėš statųjį trikampį. Taigi uždavinyje klausiama, kiek natūraliųjų sprendinių (b,c) turi lygtis $400+b^2 = c^2$.

Perrašykime lygtį kitaip:

$$400 = c^2 - b^2, \quad 400 = (c-b)(c+b).$$

Matome, kad kiekvieną sprendinį atitinka skaičiaus 400 išskaidymas į du dauginamuosius $d_1 = c-b$ ir $d_2 = c+b$. Šie dauginamieji negali būti bet kokie. Išgaukime kuo daugiau informacijos.

Skaičiai, žinoma, sveikieji. Kadangi $d_2 = c+b > 0$, tai ir $d_1 = \frac{400}{c+b} > 0$. Taigi šie skaičiai yra natūralieji skaičiaus 400 dalikliai.

Ieškodami galimų reikšmių greitai pastebėtume, kad abu dalikliai privalo būti lyginiai. Iš tiesų jų suma $2c$ lyginė, tad jie abu lyginiai arba abu nelyginiai. Bet jei jie būtų nelyginiai, tai ir jų sandauga 400 turėtų būti nelyginė.

Be to, $c+b > c-b$. Jei $d_1 \geqslant 20$, tai $d_2 > 20$ ir $400 = d_1d_2 > 20 \cdot 20 = 400$. Taigi d_1 yra teigiamas lyginis skaičiaus 400 daliklis, mažesnis nei 20.

Belieka perrinkti visas galimybes.

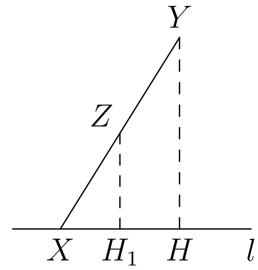
Skaičiaus 400 lyginiai dalikliai iki 20 yra šie: 2, 4, 8, 10, 16. Jei $d_1 = 16$, tai skaičius $d_2 = 25$ yra nelyginis. Kitais 4 atvejais randame po sprendinį.

Jei $d_1 = 2$, tai $d_2 = \frac{400}{2} = 200$. Sprendžiame lygčių $c-b = 2$ ir $c+b = 200$ sistemą ir randame $(b,c) = (99,101)$.

Likę 3 atvejai nagrinėjami analogiškai. Kai $d_1 = 4$, tai $(b,c) = (48,52)$. Kai $d_1 = 8$, tai $(b,c) = (21,29)$. Kai $d_1 = 10$, tai $(b,c) = (15,25)$.

Gavome 4 natūraliuosius lygties sprendinius, kuriuos atitinka 4 statieji trikampiai.

27. Ⓒ $\frac{7}{32}$



! Remsimės tokiu pastebėjimu. Jei taškas X priklauso tiesei l, tai o taškas Z dalija pusiau atkarpą XY, tai taško Z atstumas iki tiesės l yra lygus pusei taško Y atstumo iki l (žr. pav.). Tai išplaukia iš panašiųjų trikampių XYH ir XZH_1 kraštinių proporcingumo. Remiantis šiuo pastebėjimu, pavyzdžiui, atstumas nuo M_2 iki AB lygus pusei atstumo nuo M_1 iki AB.

Nesimetriško keturkampio $M_1M_2M_3M_4$ plotą S galima rasti, žinant stačiakampio $ABCD$ plotą S_0 ir lengviau randamus trikampių ADM_1, ABM_2, BCM_3, CM_1M_4 plotus, kuriuos atitinkamai pažymėkime S_1, S_2, S_3, S_4. Tada $S = S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_4$. Mums reikia rasti $S : S_0$.

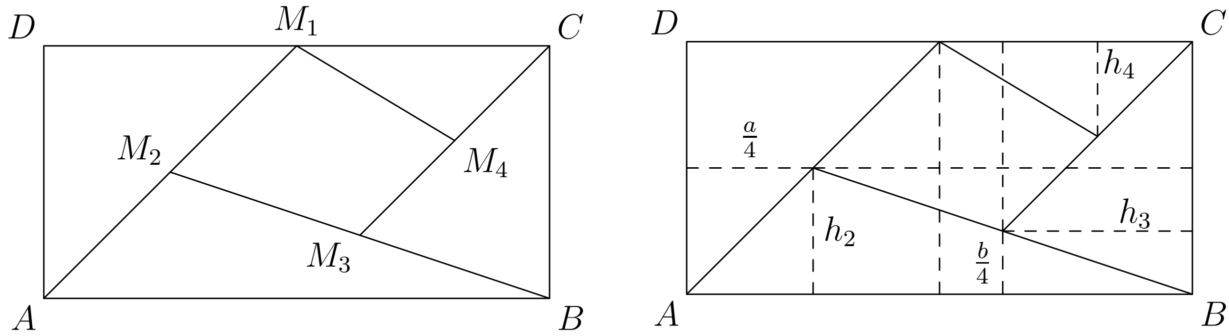
Neturime stačiakampio matmenų. Pažymėkime juos $a = AB$ ir $b = BC$. Bandykime jais išreikšti visus plotus. Žinoma, $S_0 = ab$.

Lengva rasti stačiojo trikampio ADM_1 plotą

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot DM_1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{DC}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}.$$

Raskime S_2. Atstumą nuo taško M_2 iki AB pažymėkime h_2 (žr. dešinįjį pav.). Kadangi taškas M_2 yra per vidurį tarp taškų A ir M_1, tai jo atstumas iki AB lygus pusei atstumo nuo taško M_1 iki AB, t. y. $h_2 = \frac{b}{2}$. Radome trikampio ABM_2 aukštinės, nuleistos į AB, ilgį. Taigi

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}.$$



Panašiai atstumas nuo M_2 iki AD lygus pusei atstumo nuo M_1 iki AD, t. y. $\frac{a}{2} : 2 = \frac{a}{4}$. Atstumas nuo M_2 iki priešingos kraštinės BC tada lygus $a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$. Atstumas nuo M_3 iki BC (trikampio BCM_3 aukštinė) h_3 lygus pusei atstumo nuo M_2 iki BC: $h_3 = \frac{3a}{4} : 2 = \frac{3a}{8}$. Taigi

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3ab}{16}.$$

Atstumas nuo M_3 iki AB lygus pusei atstumo nuo M_2 iki AB, t. y. $\frac{b}{2} : 2 = \frac{b}{4}$. Atstumas nuo M_3 iki priešingos kraštinės CD tada lygus $b - \frac{b}{4} = \frac{3b}{4}$. Atstumas nuo M_4 iki CD (trikampio CM_1M_4 aukštinė) h_4 lygus pusei atstumo nuo M_3 iki CD: $h_4 = \frac{3b}{4} : 2 = \frac{3b}{8}$. Taigi

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot CM_1 \cdot h_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3b}{8} = \frac{3ab}{32}.$$

Vadinasi,

$$S = ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{3ab}{16} - \frac{3ab}{32} = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} - \frac{3}{32}\right) ab = \frac{7}{32} ab,$$

todėl $S : S_0 = \frac{7}{32}$.

!! Plotus žymėkime kaip ir **!** dalyje.

Dabar remsimės tokiu pastebėjimu. Bet kurį trikampį jo pusiaukraštinė dalija į du lygiapločius trikampius: su bendra aukštine ir lygiais pagrindais, į kuriuos ta aukštinė nuleista.

Trikampis ADC yra pusė stačiakampio $ABCD$. Pusiaukraštinė AM_1 dalija šį trikampį į du lygiapločius trikampius. Taigi vieno iš jų – ADM_1 plotas lygus pusei ADC ploto ir $\frac{1}{4}$ stačiakampio ploto: $S_1 = \frac{1}{4} S_0$.

Simetriško trikampio BCM_1 plotas taip pat yra $\frac{1}{4} S_0$, o trikampio AM_1B plotas yra $S_0 - 2 \cdot \frac{1}{4} S_0 = \frac{1}{2} S_0$. AM_1B pusiaukraštinė BM_2 atskiria trikampį ABM_2, kurio plotas yra $S_2 = \frac{1}{2} S_0 : 2 = \frac{1}{4} S_0$.

Panašiai trikampio DM_1M_2 plotas lygus pusei ADM_1 ploto ir tuo pat metu pusei CDM_2 ploto. Todėl trikampio CDM_2 plotas lygus ADM_1 plotui $\frac{1}{4} S_0$. Trikampio CM_1M_2 plotas lygus pusei CDM_2 ploto, t. y. $\frac{1}{8} S_0$. Tada trikampio BCM_2 plotas lygus $S_0 - 2 \cdot \frac{1}{4} S_0 - \frac{1}{8} S_0 = \frac{3}{8} S_0$. Trikampio BCM_3 plotas lygus pusei BCM_2 ploto: $S_3 = \frac{3}{8} S_0 : 2 = \frac{3}{16} S_0$.

Panašiai trikampio $M_1M_2M_3$ plotas lygus pusei BM_1M_2 ploto, o pastarasis – pusei ABM_1 ploto. Todėl $M_1M_2M_3$ plotas lygus $\frac{1}{2} S_0 : 4 = \frac{1}{8} S_0$. Trikampio CM_1M_3 plotas lygus $S_0 - 2 \cdot \frac{1}{4} S_0 - \frac{1}{8} S_0 - \frac{3}{16} S_0 = \frac{3}{16} S_0$. Trikampio CM_1M_4 plotas lygus pusei CM_1M_3 ploto: $S_4 = \frac{3}{16} S_0 : 2 = \frac{3}{32} S_0$.

Pagaliau $M_1M_2M_3M_4$ plotas lygus $S = S_0 - 2 \cdot \frac{1}{4} S_0 - \frac{3}{16} S_0 - \frac{3}{32} S_0 = \frac{7}{32} S_0$. Taigi $S : S_0 = \frac{7}{32}$.

28. (B) 3

! Nupiešti stačiakampiai skirstomi pagal du požymius: kvadratas arba nekvadratas, raudonas arba mėlynas. Taigi turime keturias stačiakampių grupes: raudoni ir mėlyni kvadratai, raudoni ir mėlyni nekvadratai. Stačiakampių, priklausančių atitinkamoms grupėms, skaičių pažymėkime r_1 ir m_1, r_2 ir m_2. Reikia rasti bendrą mėlynų stačiakampių skaičių $m_1 + m_2$.

Uždavinio informaciją užrašykime lygtimis. Raudonų ir mėlynų kvadratų kartu yra 7, $r_1 + m_1 = 7$. Parašykime dar dvi lygybes:

$$r_1 + r_2 = 3 + m_1, \quad r_1 = 2 + (m_1 + m_2).$$

Sugretinkime jas. Atitinkami teiginiai panašūs: abiejuose kalbama, kad raudonų figūrų yra daugiau nei mėlynų. Tad atėmus iš vienos lygybės kitą, šis tas turėtų susiprastinti:

$$r_1 + r_2 - r_1 = 3 + m_1 - (2 + m_1 + m_2), \quad r_2 = 1 - m_2, \quad r_2 + m_2 = 1.$$

Kadangi abu skaičiai r_2 ir m_2 yra neneigiami, tai jie gali būti lygūs tik 0 arba 1. Jei $m_2 = 0$, tai $r_1 = 2 + m_1$ ir $r_1 + m_1 = 7$. Šių tiesinių lygčių sistemos sprendinys nėra sveikasis (tai lemia skirtingas skaičių 2 ir 7 lyginumas).

Taigi $m_2 = 1$. Tada $r_1 = 3 + m_1$ ir $r_1 + m_1 = 7$. Šių lygčių sistema jau turi sprendinį $r_1 = 5$, $m_1 = 2$ (ir $r_2 = 1 - m_2 = 0$). Mėlynų stačiakampių iš viso yra $m_1 + m_2 = 2 + 1 = 3$.

Pastebėsime, kad uždavinio situacija išties galima: kai turime 3 mėlynus stačiakampius, iš jų 2 kvadratus, bei 5 raudonus stačiakampius, kurie visi yra kvadratai.

29. (D) 65

! Apėjus pilną ratą, žmonių rate sumažėjo perpus, t. y. liko 48 žmonės, kurie toliau skaičiavosi nuo $96 + 1$ iki $96 + 48$. Po dar vieno etapo liko 24, toliau 12, 6 ir pagaliau tik 3 žmonės. Kai liko 6 žmonės ir skaičiavosi toliau, jų ištarti skaičiai buvo $96+48+24+12+1 = 181$, 182, 183, 184, 185, 186. Likę 3 žmonės ištarė skaičius 187, 188, 189, ir tas, kuris ištarė 188, pasitraukė. Iš likusių žmonių pirmasis ištarė skaičių 190 ir pasitraukė. Liko tik tas, kuris prieš tai ištarė skaičių 189. Reikia nustatyti, kokį skaičių tas žmogus ištarė pradžioje.

Vėl pradėkime nuo pradžios. Pirmojo skaičiuotės etapo rezultatai iš karto pasako, kad ieškomas skaičius negali būti lyginis. Ką pasako antrojo etapo, kai ištarti dar 48 skaičiai, rezultatai? Skaičiavosi žmonės, pradžioje ištarę skaičius 1, 3, 5, ..., 95, ir naują lyginį skaičių ištarė bei pasitraukė kas antras. Gretimų sekos skaičių skirtumai yra lygūs 2, o išbraukę kas antrą skaičių gausime seką 1, 5, 9, ..., 93, vis tiek pasidedančią skaičiumi 1, bet gretimų skaičių skirtumai lygūs 4 (tai yra skaičiai, kurie užrašomi pavidalu $4k + 1$, kur skaičius k sveikasis, ir besidalijantys iš 4 su liekana 1).

Panašiai trečiojo etapo rezultatai vėl leidžia išbraukti kas antrą skaičių ir gauti seką 1, 9, 17, ..., (skirtumai tarp skaičių lygūs 8), o po ketvirtojo etapo rate lieka 6 žmonės, pradžioje ištarę skaičius 1, 17, 33, 49, 65, 81 (skirtumai tarp skaičių lygūs 16). Pagaliau po penktojo etapo lieka skaičiai 1, 33 ir 65. Juos ištarę žmonės atitinkamai ištaria skaičius 187, 188 ir 189. Skaičius 189 atitinka skaičių 65. Tad 65 ir yra atsakymas.

!! Spręskime uždavinį abstrakčiau. Tarkime, kad žmogus X, stovintis rate, kažkuriuo metu ištarė skaičių k ir nepasitraukė. Kokį skaičių jis ištars kitą kartą? Skaičius k yra nelyginis. Prieš tai jau ištarta $k - 1$ skaičių ir kas antras žmogus pasitraukė. Taigi rate yra likę $96 - (k - 1)/2$ žmonių. Visi jie dar ištars bent po vieną skaičių ir paskutinis iš jų bus žmogus X. Skaičiai tariami iš eilės, tad jis ištars skaičių $l = k + 96 - (k - 1)/2 = 96 + (k + 1)/2$.

Gautoji formulė leidžia rasti ištartų skaičių seką bet kuriam žmogui. Formulę galima ir apversti. Jei žmogus ištarė skaičių l, tai prieš tai jis ištarė skaičių k, kurį galima išreikšti per l:

$$k = 2l - 193.$$

Kaip ir **!** dalyje, nustatę, kad paskutinis žmogus ištarė skaičių 189, galime iš eilės rasti skaičius, kuriuos jis ištarė prieš tai: $2 \cdot 189 - 193 = 185$, $2 \cdot 185 - 193 = 177$, $2 \cdot 177 - 193 = 161$, $2 \cdot 161 - 193 = 129$, $2 \cdot 129 - 193 = 65$. Taip randame atsakymą 65.

Pabaigai pastebėsime, kad apibendrinant gautąsias formules galima įrodyti tokį teiginį. Jei ratu sustoja n žmonių (nebūtinai 96) ir paskutinis likęs žmogus pradžioje ištaria skaičių k, tai skaičius k yra toks skaičius nuo 1 iki n, kad $2n + 1 - k$ dalijasi iš didžiausio galimo dvejeto laipsnio. Iš šio teiginio išplaukia gana paprastas skaičiaus k gavimo algoritmas: reikia užrašyti skaičių n dvejetainiu pavidalu, o tada nubraukti pirmąjį skaitmenį 1 ir parašyti jį skaičiaus gale. Taip gaunamas skaičiaus k dvejetainis pavidalas. Pvz., jei $n = 96 = 1100000_{(2)}$, tai $k = 1000001_{(2)} = 65$. Matematikoje labiau pasikausčiusiam skaitytojui siūlome visa tai įrodyti!

30. D 5

! Skaičiumi virtusį žodį $n = KANGAROO$ galima užrašyti taip:

$$n = K \cdot 10^7 + A \cdot 10^6 + N \cdot 10^5 + G \cdot 10^4 + A \cdot 10^3 + R \cdot 10^2 + O \cdot 10 + O.$$

Šį reiškinį galima suprastinti – mums terūpi, kad jis dalytųsi iš 11. Pastebėkime, kad $10^7 = 9999999 + 1 = 9999990 + 10 = 11 \cdot 909090 + 11 - 1 = a_7 - 1$, kur a_7 dalijasi iš 11. Panašiai $10^6 = 999999 + 1 = 11 \cdot 90909 + 1 = a_6 + 1$, kur a_6 dalijasi iš 11. Toliau $10^5 = a_5 - 1$, $10^4 = a_4 + 1$ ir t. t.

Įrašę šias išraiškas į turimą lygybę gauname, kad

$$n = a + K \cdot (-1) + A + N \cdot (-1) + G + A \cdot (-1) + R + O(-1) + O,$$

kur a dalijasi iš 11. Taigi viskas priklauso tik nuo to, ar iš 11 dalijasi skaičius

$$-K + A - N + G - A + R - O + O = -K - N + G + R.$$

(Beje, nustatėme dalumo iš 11 požymį. Jei mums rūpėtų dalumas iš 9, tai nagrinėtume skaitmenų sumą $K + A + N + G + A + R + O + O$, o dalydami iš 11 nagrinėjame panašią sumą, tik joje pliusai kaitaliojasi su minusais. Pvz., skaičius 2015247521239062 dalijasi iš 11, nes $-2 + 0 - 1 + 5 - 2 + 4 - 7 + 5 - 2 + 1 - 2 + 3 - 9 + 0 - 6 + 2 = -11$ dalijasi iš 11.)

Raskime Dovydo ir Deivido skaičius.

Kad skaičius $KANGAROO$ būtų kuo didesnis, iš karto bandykime didžiausią galimą pirmąjį skaitmenį $K = 9$ ir tada didžiausią iš dar nepanaudotų skaitmenų kaip antrąjį skaitmenį $A = 8$. Iš eilės imkime $N = 7$.

Toliau natūralu būtų bandyti $G = 6$, bet čia jau nebeskubėkime, žiūrėkime, kokios reikšmės yra galimos. Skaičius $-K - N + G + R = G + R - 16$ turi dalytis iš 11. Įvertinkime sumą $G + R$ didžiausiais ir mažiausiais dar nepanaudotais skaitmenimis: $1 = 0 + 1 \leqslant G + R \leqslant 5 + 6 = 11$, todėl $-15 \leqslant G + R - 16 \leqslant -5$. Vienintelis skaičius, dalus iš 11, tarp -5 ir -15 yra -11. Taigi $G + R - 16 = -11$ ir $G + R = 5$. Skaičius n bus tuo didesnis, kuo didesnis bus kairiausias iš dar neapibrėžtų skaitmenų G. Taigi imkime $G = 5$ ir $R = 0$. Likęs skaitmuo O gali būti bet koks, tad vėl priskirkime jam didžiausią iš likusių reikšmių $O = 6$.

Gavome skaičių $n = 98758066$.

Kad skaičius n būtų kuo mažesnis, imkime mažiausią galimą pirmojo skaitmens reikšmę $K = 1$, o tada iš eilės mažiausias likusias reikšmes $A = 0$ ir $N = 2$.

Su G parinkimu vėl neskubėkime. Turime užsitikrinti, kad $-K-N+G+R=G+R-3$ dalytųsi iš 11. Šiuo atveju gauname nelygybes $7=3+4\leqslant G+R\leqslant 8+9=17$ ir $4\leqslant$ $\leqslant G+R-3\leqslant 14$. Tarp 4 ir 14 iš 11 dalijasi tik skaičius 11, todėl $G+R-3=11$, $G+R=14$. Imame mažiausią galimą G reikšmę $G=5$ ($G=3$ arba 4 netinka, nes tada $R>9$). Gauname $R=9$. Pagaliau imkime mažiausią iš likusių reikšmių $O=3$.

Gavome skaičių $n=10250933$.

Du rastieji skaičiai turi vieną sutampantį skaitmenį. Tai ketvirtasis skaitmuo $G=5$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	E
2	A
3	A
4	A
5	D
6	D
7	B
8	E
9	C
10	B
11	C
12	D
13	E
14	C
15	B
16	A
17	C
18	C
19	C
20	A
21	D
22	A
23	D
24	C
25	E
26	D
27	C
28	B
29	D
30	D