KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. Žr. uždavinio B6 sprendimą.

K2. Ⓐ 20

? Spėlioti čia visiškai neverta.

! Vėl mus norima apgauti ir įteigti atsakymą $3 \cdot 20 = 60$, t. y. atsakymą D. Iš tikrųjų padidinus (ar sumažinus) nuotrauką viskas pakinta proporcingai. Taigi balta spalva užims, kaip ir užėmusi, 20% ploto.
Teisingas atsakymas A.

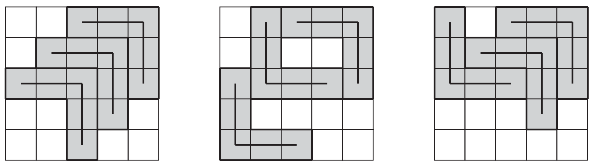
K3. Ⓓ 2 h 02 min

? Užmetus akį, aišku, kad praeis šiek tiek daugiau nei 2 valandos, todėl lieka tik atsakymai C ir D. Bet spėti vis tiek neverta.

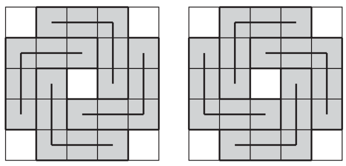
! Paprasčiausiai atėmę, gauname 13 val. 13 min. – 11 val. 11min. = 2 val. 2 min. Taigi teisingas atsakymas D.

K4. Ⓒ 4

? Pabandžius keletą dėjimo variantų, pavyzdžiui, tokių kaip čia pavaizduoti, nesunku patikėti, kad telpa tik 3 kampai:

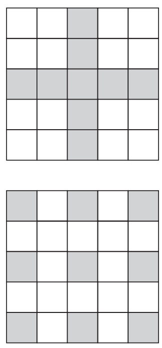


Taigi tarsi reikėtų rinktis atsakymą B.

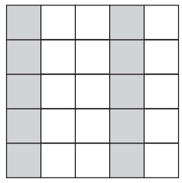


Vis dėlto buvo konkurso dalyvių, kuriems iš karto pavyko sutalpinti 4 kampus, ir jie gavo vieną ar kitą iš pavaizduotų konfigūracijų (jos yra simetriškos, taigi iš esmės sutampa). Visiškai aišku, kad netinka atsakymas E, nes 6 kampai užimtų 30 langelių, o kvadrate jų tik 25. Beveik aišku, kad netiks ir atsakymas D. Todėl jie pasirinko atsakymą C.

! Iki griežto sprendimo trūksta įrodymo, kad 5 kampai netelpa.
Pateiksime net keletą šio teiginio įrodymų – visi jie pakankamai pamokomi.



Pirmas būdas. Kad ir kaip padėsime kampą, jis užims mažiausiai du užtušuotus langelius iš trečios eilutės ir trečio stulpelio kvadratėlių sudaryto „kryžiaus“ viršutiniame paveikslėlyje, o tų langelių tėra 9. Vadinasi, penkių kampų padėti neįmanoma.
Antras būdas. Tarkime, kad pavyko padėti 5 kampus. Tada visi kvadrato langeliai bus užimti, todėl bus užimti ir visi kampiniai langeliai. Bet vienas kampas gali uždengti tik vieną kampinį kvadratėlį, todėl bus 4 kampai, kurie dengia po kampinį kvadratėlį. Bet jeigu kampas dengia kampinį langelį, tai jis dengia 3 iš 9 užtušuotų langelių apatiniame paveikslėlyje. Vadinasi, 4 kampai uždengs 12 užtušuotų langelių, o jų tėra tik 9, – prieštara.

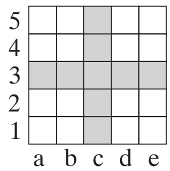


Trečias būdas. Užtušuokime kvadrato pirmo ir ketvirto stulpelio kvadratėlius – iš viso 10 kvadratėlių. Nesunku įsitikinti, kad nors ir kaip padėsime kampą kvadrate, jis dengs arba 1 užtušuotą langelį, arba 3.
Tarkime, kad mums pavyko padėti 5 kampus. Tada visi kvadrato langeliai bus uždengti, taigi bus uždengti ir 10 užtušuotų langelių. Juos uždengė 5 kampai, kurių kiekvienas uždengė nelyginį langelių skaičių (1 arba 3). Bet nelyginio skaičiaus nelyginių dėmenų suma negali būti lyginė, – prieštara.
Teisingas atsakymas C.

Beje, šis vadinamasis spalvinimo būdas – labai veiksmingas metodas įrodant įvairių konstrukcijų negalimumą (žr. taip pat knygelę „Kengūra – 1999“, psl. 54).

!! Įrodysime, kad 4 kampus galima padėti tik vieninteliu būdu (t. y. gauti aukščiau pavaizduotą konfigūraciją ar jos veidrodinį atspindį). Kitaip sakant, įrodysime (nors uždavinyje to visai neprašoma), kad tie dalyviai, kurie atspėjo reikiamą konfigūraciją padėti 4 kampams, jokios kitos konfigūracijos atspėti ir negalėjo.

Sakykime, kad padėjome 4 kampus. Kad ir kaip dedame kampą, jis užima 1 arba 3 trečios horizontalės langelius. Bet jei jis užimtų 3 langelius, tai kitiems trims kampams jų liktų tik 2, – prieštara. Vadinasi, kiekvienas kampas užima lygiai 1 trečios horizontalės langelį. Lygiai taip pat kiekvienas kampas užima lygiai 1 trečios vertikalės langelį. Be to, nė vienas neužima centrinio langelio, – priešingu atveju to langelio vertikalus arba horizontalus kaimynas užimtų dar vieną trečios horizontalės ar vertikalės langelį. Taigi įrodėme, kad kiekvienas iš 4 kampų turi lygiai po vieną trečios vertikalės ir trečios horizontalės langelį.



Taip pat aišku, kad nė vieno kampo viršūnė nėra trečioje horizontalėje (vertikalėje). Iš tikrųjų, jei taip būtų, tai kampe tos viršūnės horizontalusis kaimynas taip pat priklausytų trečiai horizontalei. Vadinasi, bet kurio kampo viršūnė yra vienoje iš neužtušuotų kvadratinių zonų.
Dviejų kampų viršūnės negali būti vienoje zonoje. Iš tikrųjų, kadangi kampų „kraštinės“ nukreiptos į tą pačią pusę, tai jos negali būti vienoje vertikalėje ar horizontalėje (pvz., a1 ir b1 ar b1 ir b2; kaip šachmatuose, vertikales sužymėjome raidėmis a, b, c, d, e, horizontales skaičiais 1, 2, 3, 4, 5). Jos negali būti a2 ir b1, nes tada langelis b2 būtų joms bendras. Vadinasi, tai galėtų būti tik a1 ir b2. Bet tada viršūnių nebebus nei kairėje viršutinėje, nei dešinėje apatinėje zonoje. Todėl viršūnės bus d4 ir e5, bet kampas d4 tada nebetelpa (langelis b4 būtų bendras jam ir kampui b2).

Viršūnė negali būti langelyje b2: jeigu viršūnė langelyje b2, tai kairėje viršutinėje zonoje ji negali būti a4 ar b5 (bendras būtų langelis b4). Vadinasi, tada viršūnė a5, analogiškai e1, ir nebelieka vietos ketvirtam kampui (viršūnėms e4 ar e5 trukdo užimtas langelis c5, o viršūnei d4 – pavyzdžiui, langelis b4).

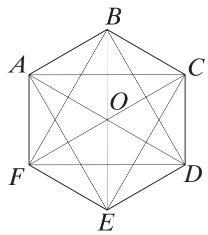
Vadinasi, viršūnės gali būti tik langeliuose a1, b1, b2 ir atitinkamuose kitų zonų langeliuose. Kadangi vienu metu negali būti viršūnės a1 ir a5 (kampai turėtų bendrą langelį a3, tai bent viena viršūnė yra ne kampe. Dėl simetrijos galime laikyti, jog tai viršūnė b1. Tada kampui b1 priklauso langelis d1. Tai reiškia, kad dešinėje apatinėje zonoje viršūnė negali būti e1. Vadinasi, tai viršūnė e2. Kampas e2 užima langelį e4, todėl dešinėje viršutinėje zonoje viršūnė bus d5. Kampas d5 užima langelį b5, todėl kairėje viršutinėje zonoje viršūnė bus a4.

Gavome 49 psl. kairiąją konfigūraciją. Jeigu būtume pradėję nuo langeliui b1 įstrižainės atžvilgiu simetriško langelio a2, būtume gavę 49 psl. dešiniąją konfigūraciją.

Įrodymas baigtas – į kvadratą 5×5 įtalpinti 4 kampus įmanoma tiktai taip, kaip tat parodyta minėtose konfigūracijose.

K5. (D) 13

? Be brėžinio čia ką nors pasakyti sunku.



! Nusibraižome brėžinį. Leisdamiesi, pavyzdžiui, žemyn ir skaičiuodami susikirtimo taškus ant horizontaliųjų įstrižainių ir joms lygiagrečių horizontaliųjų tiesių, einančių per vidinius įstrižainių susikirtimo taškus, gauname $3+2+3+2+3=13$ susikirtimo taškų. Žinoma, skaičiuoti galima ir kitaip – svarbu susidaryti tam tikrą sistemą, kaip nepraleisti susikirtimo taškų ir kaip neįskaityti to paties taško 2 kartus.
Teisingas atsakymas D.

!! Mums duota, kad šešiakampio $ABCDEF$ visos kraštinės ir visi kampai lygūs. Pasižiūrėkime, kaip galima būtų įrodyti, kad ilgosios įstrižainės AD, BE ir CF kertasi viename taške O (tik tada mes skaičiavome teisingai).

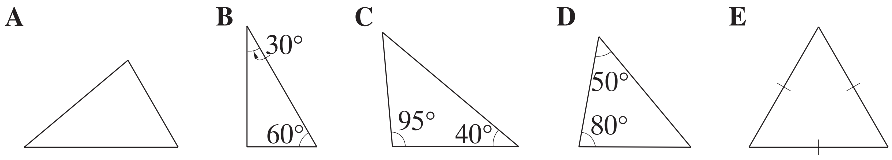
Šešiakampio kampų suma lygi $180° \cdot (6-2) = 720°$, todėl kiekvienas kampas lygus $720° : 6 = 120°$. Trikampis BCD lygiašonis, todėl jo kampai prie pagrindo lygūs po $30°$. Vadinasi, $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 120° - 30° = 90°$. Analogiškai visi keturkampio $ABDE$ kampai statūs, taigi tai stačiakampis.

Sakykime, kad tik dabar vedame įstrižaines AD ir BE. Jos kirsdamosi dalija viena kitą pusiau, taigi O – įstrižainės AD vidurio taškas. Dabar nagrinėkime stačiakampį $ACDF$. Jo įstrižainė CF taip pat dalija AD pusiau, taigi eina per O.

Vadinasi, iš tikrųjų bet kurios dvi ilgosios įstrižainės turi tik vieną susikirtimo tašką – O.

Beje, dabar nesunku įstrižainių susikirtimo taškus suskaičiuoti ir taip. Imkime $\triangle OAB$. Jo viduje yra tik vienas įstrižainių susikirtimo taškas, o kraštinėse OA ir OB – dar po vieną. Vadinasi, visų 6 trikampių viduje yra 6 taškai. Kiekviename iš 6 spindulių $OA, OB, \ldots$ yra dar po vieną tašką – iš viso 12 taškų. Pridėję dar tašką O, iš viso gauname 13 taškų.

K6. Ⓓ



? Iš karto matome, kad A ir B nėra lygiašoniai, o E yra lygiakraštis. Taigi reikia rinktis iš atsakymų C ir D, bet vargu ar čia verta spėti.

! Atsakymas A netinka – trikampis nepanašus į lygiašonį; be to, kampas prie viršūnės artimas stačiajam, o kampai prie pagrindo neabejotinai smailieji.
Trikampio B trečias kampas lygus $180° - 30° - 60° = 90°$, taigi trikampis nėra lygiašonis.
Trikampio C trečias kampas lygus $180° - 95° - 40° = 45°$, taigi jis nėra lygiašonis.
Trikampio D trečias kampas lygus $50°$, taigi jis tikrai yra lygiašonis.
Trikampis E yra lygiakraštis; tai spėjame iš akies, be to, kraštinės pažymėtos tuo pačiu ženkliuku.
Taigi teisingas tik atsakymas D.

K7. Ⓑ 3

? Ir vėl spėti neverta.

! Įsivaizduokime, kad juostelę pridėjome prie ašies, jos pradžią sutapdinę su 0, o galą su 100 (kitaip sakant, ašies vienetinė atkarpa yra 1 cm). Tada padalijus juostelę į 4 lygias dalis, brūkšnelių koordinatės bus 25, 50, 75. Padalijus ją į 3 dalis, brūkšnelių koordinatės bus $33\frac{1}{3}$, $66\frac{2}{3}$. Vadinasi, brūkšneliai išsirikiuos taip: 25, $33\frac{1}{3}$, 50, $66\frac{2}{3}$, 75. Sukarpius juostelę, gabaliukų ilgiai bus

$$25 - 0 = 25, \quad 33\frac{1}{3} - 25 = 8\frac{1}{3}, \quad 50 - 33\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3},$$
$$66\frac{2}{3} - 50 = 16\frac{2}{3}, \quad 75 - 66\frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}, \quad 100 - 75 = 25.$$

Taigi gabaliukai bus 3 skirtingų ilgių, ir teisingas atsakymas B.

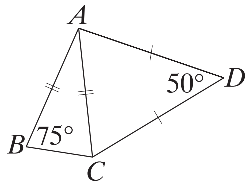
!! Kadangi brūkšneliai eina vienodai ir nuo pradžios, ir nuo galo, tai viskas bus simetriška taško 50 atžvilgiu. Todėl užtenka nagrinėti pirmus tris gabaliukus.

K8. Ⓐ 11

? Kadangi atsakymai „surikiuoti“, tai verta tikrinti nuo vidurio – atsakymo C. Tada $15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 = 40 + 40 + 40 + 27 = 147$, ir gavome per daug.
Tikriname mažesnius skaičius, atsakymą B: $13+15+17+19+21+23+25$. Čia sudėti nebereikia – kadangi kiekvienas dėmuo sumažėjo dvejetu, tai suma bus mažesnė 14, taigi gausime 133.
Liko patikrinti atsakymą A. Kadangi suma vėl sumažės 14, tai suma kaip tik bus lygi 119.
Renkamės atsakymą A.

! Aišku, kad visų 7 skaičių vidurkis lygus viduriniam skaičiui. Bet vidurkis yra lygus $119 : 7 = 17$, todėl vidurinis skaičius yra 17. Mažiausias skaičius už jį šešiais mažesnis, ir gauname 11.
Teisingas atsakymas A.

K9. Ⓐ 95°



? Iš brėžinio matome, kad kampas BAD labai mažai skiriasi nuo stačiojo.
Renkamės atsakymą A.

! Kadangi $\triangle DAC$ lygiašonis, tai $\angle DAC = \frac{1}{2}(180° - 50°) = 65°$. Kadangi $\triangle ABC$ lygiašonis, tai $\angle BAC = 180° - 75° - 75° = 30°$. Taigi $\angle BAD = 30° + 65° = 95°$.
Teisingas atsakymas A.

K10. Ⓓ 90 min

? Atsakymai išrikiuoti, tad pradėkime spėti nuo vidurinio atsakymo C. Per 60 minučių prižiūrėtojas išmaudys 1,5 dramblio, o sūnus 0,5 dramblio, taigi kartu jie išmaudys 2 dramblius, o ne visus 3, kaip reikia.
Tikrinkime atsakymą E. Per 100 minučių prižiūrėtojas išmaudys 2,5 dramblio, o sūnus – daugiau kaip vieną dramblį, taigi jiems reikės laiko mažiau.
Taigi renkamės atsakymą D.

! Liko įsitikinti, kad atsakymas D tikrai tinka. Prižiūrėtojas per 90 min. išmaudo $2\frac{1}{4}$ dramblio. Sūnus per pusę valandos išmaudo $\frac{1}{4}$ dramblio, todėl per 3 pusvalandžius išmaudys $\frac{3}{4}$ dramblio. Kartu per 90 min. jie išmaudys $2\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 3$ dramblius.
Teisingas atsakymas D.

!! Galima uždavinį spręsti tradiciškai: kadangi prižiūrėtojas dramblį maudo $\frac{2}{3}$ h, tai per 1 h jis išmaudys $\frac{3}{2}$ dramblio; sūnus per 1 h išmaudo $\frac{1}{2}$ dramblio. Abu kartu per 1 h jie išmaudo $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ dramblius. Todėl 3 dramblius jie išmaudys per $\frac{3}{2}$ h, t. y. per 90 min.
Bet žymiai įdomiau apsieiti be „pusdramblių“. Kol sūnus per 2 valandas išmaudo dramblį, prižiūrėtojas išmaudo 3 dramblius. Vadinasi, kartu per 120 min. jie išmaudo 4 dramblius. Vadinasi, 1 dramblį jie maudo 30 min., o 3 dramblius – 90 min.

K11. Žr. uždavinio M23 sprendimą.

K12. A $AROOAROO$

? Spėdami galime imti konkrečius skaitmenis. Pavyzdžiui, imkime $K = 1$, $A = 2$, $N = 3$, $G = 4$, $R = 5$, $O = 6$. Tada

$$\begin{aligned}
&10\,000 \cdot AROO - 10\,000 \cdot KANG + KANGAROO = \\
&\quad = 10\,000 \cdot 2\,566 - 10\,000 \cdot 1\,234 + 12\,341\,566 = \\
&\quad = 25\,660\,000 - 1\,234\,000 + 12\,342\,566 = \\
&\quad = 25\,660\,000 + 2\,566 = 25\,662\,566.
\end{aligned}$$

Taigi 4 skaitmenys turi kartotis, o prasidėti skaičius turi raide A.
Toks yra tik atsakymas A.

! Nesunku spręsti ir bendru pavidalu:

$$\begin{aligned}
&L = 10\,000 \cdot AROO - 10\,000 \cdot KANG + KANGAROO = \\
&\quad = AROO0000 - KANG0000 + KANG0000 + AROO = \\
&\quad = AROO0000 + AROO = AROOAROO.
\end{aligned}$$

Vadinasi, teisingas tik atsakymas A.

!! Sprendimą galima užrašyti kiek trumpiau:

$$\begin{aligned}
&L = 10^4 \cdot AROO - 10^4 \cdot KANG + 10^4 \cdot KANG + AROO = \\
&\quad = AROO0000 + AROO = AROOAROO.
\end{aligned}$$

!!! Sąlygoje nurodyta, kad vienodos raidės atitinka vienodus skaitmenis, o skirtingos raidės – skirtingus skaitmenis. Jeigu apie tai nieko nepasakoma, paprastai uždavinį taip ir suprantame. Ir vistik pasižiūrėkime, kas galėtų atsitikti, formuluojant sąlygą kitaip.
Sakykime, kad reikalaujama, jog vienodos raidės atitiktų vienodus skaitmenis, bet nereikalaujama, kad skirtingos raidės atitiktų skirtingus skaitmenis. Tada jeigu vietoj kiekvienos raidžių imsime, pavyzdžiui, skaitmenį 5, tai visi penki atsakymai tiks.
Dabar sakykime, jog reikalaujama, kad skirtingas raides atitiktų skirtingi skaitmenys, bet nereikalaujama, kad vienodas raides atitiktų vienodi skaitmenys. Imkime $k = 1$, $K = 2$ (t. y. vienoje vietoje K imkime 1, o kitoje – 2). Tada
$10\,000 \cdot AROO - 10\,000 \cdot kANG + KANGAROO = AROOAROO + 10^7(K - k)$.
Jeigu, pavyzdžiui, dabar imsime $A = 9$, $N = 6$, $G = 5$, $R = 8$, $O = 7$, tai gausime

$$98\,779\,877 + 10^7(2 - 1) = 108\,779\,877,$$

t. y. devynženklį skaičių, ir netinka nė vienas atsakymas.

Pastaba. Žodis $KANGAROO$ angliškai reiškia „kengūra“.

K13. D Q ir T

? Spėti čia sunku – reikia perrinkti atsakymus. Tikriname atsakymą A – ar galėjo atsitikti, kad T ir S bučiavosi? Jei T ir S bučiavosi, tai T bučiavosi su P ir su T, o daugiau su niekuo. P bučiavosi vienintelį kartą – su T. Kadangi R bučiavosi dukart, tai tat galėjo būti tik Q ir S. Dabar visos sąlygos įvykdytos: P bučiavosi vienintelį kartą su T, Q bučiavosi vienintelį kartą su R, R bučiavosi tik su Q ir S, S bučiavosi tik su T ir su R, T bučiavosi tik su P ir su S.
Vadinasi, atsakymas A netinka – galėjo taip atsitikti, kad T ir S bučiavosi.

Jau matome, kad taip spėlioti sunku – reikia susidaryti schemą. Pasidarykime 1 lentelę.
Joje pažymėta, kiek kartų kuri ponia bučiavosi. Kadangi ponios pačios su savimi bučiuotis negalėjo, tai įstrižainėje rašome minusus. Sąlygoje dar duota, kad P bučiavosi su T (taigi ir T bučiavosi su P), todėl eilutėje P ties T rašome + ir eilutėje T stulpelyje P rašome +. Tikrinkime šioje schemoje atsakymą A – tarkime, kad T ir S bučiavosi, ir žiūrėkime, kas iš to išeis.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−				+
1	Q		−			
2	R			−		
2	S				−	
2	T	+				−

1 lentelė

Padėję + pozicijose ST ir TS, gauname 2 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−				+
1	Q		−			
2	R			−		
2	S				−	+
2	T	+			+	−

2 lentelė

Kadangi eilutėje P gali būti tik vienas pliusas, tai kitus surašome minusus. Lygiai taip pat stulpelyje P gali būti vienas pliusas, todėl kiti minusai. Panašiai eilutėje T jau yra 2 pliusai, tad kitus surašome minusus, tas pat stulpelyje T. Gauname 3 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−			−
2	R	−		−		−
2	S	−			−	+
2	T	+	−	−	+	−

3 lentelė

Pagal sąlygą eilutėje R ir stulpelyje R turi būti 2 pliusai, ir jiems kaip tik likusios 2 vietos (4 lentelė). Matome, kad parašius likusiuose langeliuose abu minusus, uždavinio sąlyga bus patenkinta.
Įsitikinome, kad taip žymiai lengviau samprotauti ir užrašinėti samprotavimus.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−	+		−
2	R	−	+	−	+	−
2	S	−		+	−	+
2	T	+	−	−	+	−

4 lentelė

Tikrinkime atsakymą B – ar galėjo bučiuotis ponios T ir R. Gauname 5 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−			
2	R	−		−		+
2	S	−			−	
2	T	+		+		−

5 lentelė

Užpildę minusais eilutę ir stulpelį T, gauname 6 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−			−
2	R	−		−		+
2	S	−			−	−
2	T	+	−	+	−	−

6 lentelė

Matome, kad eilutėje ir stulpelyje S reikia rašyti abu pliusus. Gauname 7 lentelę. Vadinasi, įrašę minusus į likusius du langelius, gauname teisingą lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−		+	−
2	R	−		−	+	+
2	S	−	+	+	−	−
2	T	+	−	+	−	−

7 lentelė

Tikriname atsakymą C – ar galėjo bučiuotis ponios Q ir R? Tarkime, kad galėjo (8 lentelė).

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−	+	−	−
2	R	−	+	−		
2	S	−	−		−	
2	T	+	−			−

8 lentelė

Užpildę minusais eilutę ir stulpelį Q, matome, kad eilutėje ir stulpelyje S reikia rašyti abu pliusus (9 lentelė). Įrašę likusius minusus, vėl gausime teisingą lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−	+	−	−
2	R	−	+	−	+	
2	S	−	−	+	−	+
2	T	+	−		+	−

9 lentelė

Tikriname atsakymą D. Sakykime, kad ponios Q ir T bučiavosi (10 lentelė).

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−			+
2	R	−		−		
2	S	−			−	
2	T	+	+			−

10 lentelė

Tada Q (eilutę ir stulpelį) ir T reikia baigti pildyti minusais (11 lentelė). Matome, kad eilutėje S nebeliko vietos dviem pliusams. Vadinasi, ponios Q ir T bučiuotis negalėjo.
Renkamės atsakymą D.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−	−	−	+
2	R	−	−	−		−
2	S	−	−		−	−
2	T	+	+	−	−	−

11 lentelė

! Iki pilnos perrankos liko atsakymas E. Tarkime, kad ponios Q ir S bučiavosi (12 lentelė).

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−	−	+	−
2	R	−	−	−		
2	S	−	+		−	
2	T	+	−			−

13 lentelė

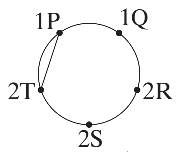
Užpildome minusais eilutę ir stulpelį Q (13 lentelė). Matome, kad eilutėje ir stulpelyje R reikia rašyti du pliusus. Likusiuose langeliuose parašę minusus gauname teisingą lentelę.

Vadinasi, ponios Q ir S taip pat galėjo bučiuotis.
Taigi tikrai nesibučiavo tik ponios Q ir T. Kitos ponios galėjo ir bučiuotis.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas D.

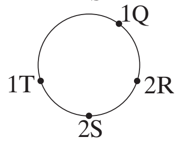
		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	−	−	−	−	+
1	Q	−	−		+	
2	R	−		−		
2	S	−	+		−	
2	T	+				−

12 lentelė

!! Pirmas sprendimo būdas vis dėlto labai nevaizdus.
Užrašykime sąlygą schemiškai taip:



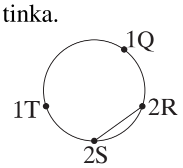
Kadangi ponia P daugiau bučiuotis negali, o T gali bučiuotis tik vieną kartą, tai schemą galima perrašyti paprasčiau:



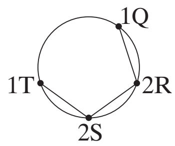
Dabar reikia taškus Q, R, S, T sujungti atkarpomis taip, kad iš Q eitų 1 atkarpa, iš R – 2, iš S – 2 ir iš T – 1 atkarpa.

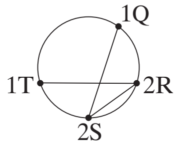
Iš karto aišku, kad jei sujungsime T su Q, tai jų daugiau liesti nebebus galima, ir liks tik taškai R ir S. Sujungę juos, daugiau atkarpų išvesti negalėsime. Taigi atsakymas D tikrai tinka.

Įsitikinti, kad visi kiti atsakymai (ir net nepaminėtasis – R ir S) įmanomi, labai lengva. Sujunkime R su S:



Turime du tolimesnio jungimo būdus. Kairys paveikslas įrodo, kad atsakymai A ir C neteisingi, o dešinys – kad B ir E neteisingi.





K14. C 54°

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, pradėkime nuo atsakymo C. Išpjovos kampas 54° sudaro $\frac{54}{360} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ pilnutinio kampo, t. y. 15%. Kadangi išpjovos kampas ir plotas proporcingi, tai ir išpjovos plotas sudarys 15% skritulio ploto.
Renkamės atsakymą C.

! Atspėjus atsakymą, aišku, kad kiti atsakymai netinka: jei išpjovos kampas bus didesnis, tai ir jos plotas bus didesnis, o jei kampas mažesnis, tai ir plotas mažesnis.

!! Geriausia skaičiuoti. Jeigu plotas sudaro 15% viso skritulio ploto, tai ir jos kampas sudaro 15% pilnutinio kampo, t. y. $0{,}15 \cdot 360 = 1{,}5 \cdot 36 = 3 \cdot 18 = 54$ laipsnius.
Teisingas atsakymas C.

K15. B 5

? Vėl atsakymai išrikiuoti, vėl tikriname atsakymą C.
10 dukatų verti 80 grašių; 10 grašių verti 25 talerių, todėl 800 grašių verti 200 talerių.
Matome, kad mums reikia dvigubai mažiau, taigi reikia imti 5 dukatus.
Renkamės atsakymą B.

! Sąlygos teiginius galima užrašyti papraščiau: 8 grašiai verti 1 dukato, 10 grašių verti 25 talerių. Todėl $100 = 25 \cdot 4$ talerių atstoja $10 \cdot 4 = 40$ grašių, o $40 = 8 \cdot 5$ grašių atstoja $1 \cdot 5 = 5$ dukatus.

!! Jeigu nebijome trupmenų, turime: 1 taleris atstoja $\frac{100}{250} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ grašio; vienas grašis atstoja $\frac{100}{800} = \frac{1}{8}$ dukato. Todėl 100 talerių atstoja $100 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} = 100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 5$ dukatus.
Teisingas atsakymas B.

K16. D 300

? Galima spėti, kad viršutinis sluoksnis buvo 7×11 gabaliukų, šoninis (jau nuvalgius viršutinį) 5×11, o dar nenuvalgius – 6×11 gabaliukų. Taigi nenuvalgytas stačiakampis gretasienis buvo $6 \times 7 \times 11$. Kai buvo nuvalgyta po 1 sluoksnį, jis turėjo $5 \times 6 \times 10 = 300$ gabaliukų cukraus.
Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad dėžutėje telpa a sluoksnių einant iš apačios į viršų, b sluoksnių iš kairės į dešinę ir c sluoksnių iš priekio į užpakalį. Tada dėžutėje buvo $a \times b \times c$ gabaliukų cukraus. Kai Marytė suvalgė viršutinį sluoksnį, dėžutėje liko stačiakampis gretasienis iš $(a-1) \times b \times c$ gabaliukų. Kai ji suvalgė šoninį sluoksnį, cukraus gretasienį sudarė $(a-1) \times (b-1) \times c$ gabaliukų. Kai ji suvalgė priekinį jo sluoksnį, gretasienį sudarė $(a-1) \times (b-1) \times (c-1)$ gabaliukų.
Sąlygoje duota, kad viršutinis sluoksnis buvo $b \times c = 77$ gabaliukai, o jį suvalgius šoninis sluoksnis tapo $(a-1) \times c = 55$ gabaliukai. Išspręsti šias lygtis nesunku, nes a, b ir c – natūralieji skaičiai. Matome, kad c yra skaičių $77 = 7 \cdot 11$ ir $55 = 5 \cdot 11$ bendras daliklis. Vadinasi, c gali būti tik 1 arba 11.
Sakykime, kad $c = 1$, tada $b = 77$, o $a - 1 = 55$, t. y. $a = 56$. Tai reikštų, kad dėžutėje buvo $56 \times 77 \times 1$ gabaliukų cukraus. Viršutinis sluoksnis būtų 77×1. Jį suvalgę gautume $55 \times 77 \times 1$ gabaliukų gretasienį. Suvalgius šoninį sluoksnį iš 55×1 gabaliukų, liktų gretasienis iš $55 \times 76 \times 1$ gabaliukų. Pagaliau suvalgius priekinį sluoksnį (tik vienas jis iš pat pradžių ir buvo, tik didesnis) 55×76, liktų gretasienis $55 \times 76 \times 0$, t. y. 0 gabaliukų. Šiaip jau šis atsakymas tiktų, bet jo nėra galimų atsakymų sąraše.
Sakykime, kad $c = 11$, tada $b = 7$, $a = 6$. Kaip jau matėme, tai reiškia, kad liko $(a-1) \times (b-1) \times (c-1) = 5 \times 6 \times 10 = 300$ gabaliukų.

Vadinasi, uždavinys nėra visai korektiškas – įmanomi atsakymai 0 ir 300. Bet jeigu sutiksime, kad uždavinį reikia spręsti „kengūriškai“, tai viskas gerai: iš pateiktų atsakymų tinka tik D.

K17. C 8

? Balų vidurkį 5,625 padauginę iš 2, gautume 11,25 – jau tik du ženklai po kablelio. Dar padauginę iš 2, turime 22,5. Dar padauginę iš 2, gauname 45. Spėjame, kad 8 ir yra mažiausias teisėjų skaičius. Renkamės atsakymą C.

?? Jei teisėjų būtų 2, tai dalyvių balų suma 11,25 nebūtų sveika. Jei teisėjų būtų 6, tai balų suma irgi nebūtų sveika – 33,75. Jei teisėjų būtų 8, tai balų suma 45. Kiti atsakymai nurodo didesnį teisėjų skaičių, ir net jei balų suma išeitų sveika, vis tiek rinktumės atsakymą 45.

! „Kengūrišką“ sprendimą jau turime. Įdomu išspręsti uždavinį nesiremiant atsakymais. Sakykime, kad teisėjų buvo n, o balų suma S ($n \in \boldsymbol{N}$, $S \in \boldsymbol{N}$). Kadangi vidurkis lygus $\frac{S}{n}$, tai turime lygybę $\frac{S}{n} = 5{,}625$. Ją pertvarkome: $8S = 45n$. Reikia rasti mažiausią n, kuris tenkina šią lygybę. Bet n dalijasi iš 8 (nes 45 neturi bendrų daliklių su 8), o mažiausias iš skaičiaus 8 kartotinių yra 8. Tikriname, ar $a = 8$ tinka. Gauname, kad $S = 45$.
Dabar reikia įsitikinti, kad tokia teisėjų balų suma galėjo būti. Bet tai visai paprasta: kadangi 45 dalijant iš 8 su liekana dalmenį gauname 5, o liekaną 5, tai trims teisėjams priskiriame po 5 balus, o likusiems penkiems – po 6.
Teisingas atsakymas C.

!! Jau įrodėme, kad teisėjų skaičius turi dalytis iš 8. Todėl „kengūriškame“ uždavinyje galima buvo klausti: *Kiek teisėjų galėjo būti*? Jeigu tokį klausimą užduotume nenurodę atsakymų, tai atsakymas būtų toks: galėjo būti $8k$, $k \in \boldsymbol{N}$, teisėjų.

!!! Ir vis dėlto iškyla dar viena problema (jų visuomet iškyla vadinamuosiuose „realaus turinio“ uždaviniuose). Čia ta problema tokia – nenurodyta, nei kiek teisėjų buvo (ar galėtų būti) varžybose, nei po kiek daugiausiai balų jie gali skirti (ačiū dievui, nurodyta, kad balų skaičius sveikas). Kai tai nurodoma, atsakymas gali būti visai kitas. Pavyzdžiui, jeigu būtų pasakyta, kad teisėjų ne daugiau kaip dvidešimt, o kiekvienas gali skirti nuo 0 iki 5 balų, tai uždavinio atsakymas būtų 16 (nes esant aštuoniems teisėjams didžiausia balų suma galėtų būti tik 40).

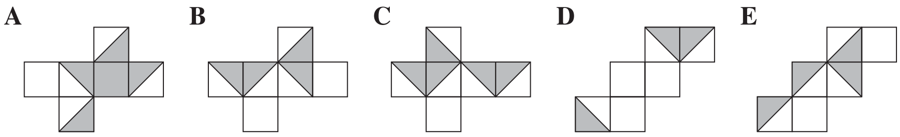
K18. C Nakties temperatūra negali būti 27°

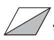
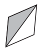
? Tikrinkime atsakymus iš eilės. Klauskime save: ar būtinai A, t. y. ar būtinai nakties temperatūra žemesnė už 25°? Sakykime, pavyzdžiui, kad nakties temperatūra lygi 25°. Kadangi naktį saulė nešviečia, tai mūsų teiginys (1) sąlygai neprieštarauja. Kadangi temperatūra mažesnė už 26°, tai teiginys neprieštarauja ir (2) sąlygai.
Vadinasi, A nebūtinai.
Ar būtinai B? Vėl paėmę dienos temperatūrą 25°, negauname jokios prieštaros.
Ar būtinai C? Sakykime – nebūtinai, ji gali būti 27°. Bet tada pagal (2) sąlygą šviečia saulė, o naktį to būti negali.
Taigi būtinai C. Renkamės atsakymą C.

! Liko įsitikinti, kad nebūtinai D ir nebūtinai E. Jeigu nebūtinai D, tai temperatūra gali būti ir 24°. Tai niekam neprieštarauja.
Įrodysime, kad nebūtinai E: gali būti temperatūra 25°, o saulė nešviesti. Tai jau matėme, kai nakties temperatūra buvo lygi 25°.
Taigi įsitikinome, kad vienintelis įmanomas atsakymas yra C.

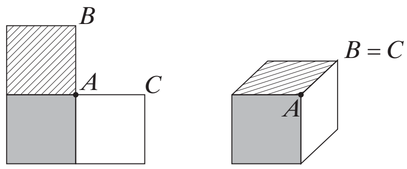
!! Jeigu nakties temperatūra 27°, tai pagal (2) sąlygą šviečia saulė. Bet to naktį nebūna, – prieštara. Vadinasi, nakties temperatūra negali būti 27°, t. y. būtinai C.

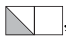
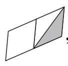
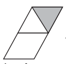
K19. Ⓓ



? Aišku, kad jei kurios nors dvi sritys išklotinėje turi bendrą briauną, tai jos turės bendrą tą briauną ir lankstant.
Tikriname atsakymus iš eilės. Figūroje A darykime sieną  priekine. Kai viršutinį kvadratą užlenksime, jis taps viršutine siena , o siena  užlenkta taps kairiąja , taigi jos stovės blogai (kitaip sakant, nuo viršutinio pagrindo kairės briaunos į dešinę bus balta sritis, o į apačią – juoda). Taigi figūra A netinka.
Figūrų B ir E dešinysis baltas kvadratas turi bendrą briauną su juoda sritimi, taigi B ir E netinka.
Figūroje C viršutinį kvadratą darykime viršutiniu pagrindu. Jo dešinė sritis bus balta ir turės bendrą briauną su juoda (viršutine) dešinės sienos sritimi.
Taigi liko figūra D, ir renkamės atsakymą D.

! Padarysime tokią pastabą. Jeigu išklotinėje trys kvadratai stovi „kampu“ (žr. paveikslėlius), tai kube jie susieis viršūnėje, jų statmenos kraštinės AB ir AC sutaps ir bus kubo briauna. Vadinasi, išklotinėje prie tokių kraštinių turi būti tos pačios spalvos sritys. Žvilgterėję į išklotines, iš karto matome, kad taip nėra išklotinėse A, B, C ir E, todėl jos iš karto atkrenta.



Iki pilno sprendimo liko įsitikinti, kad figūra D tikrai tinka. Darykime dešinįjį baltą kvadratą priekine siena . Tada viršutinė siena bus , dešinioji pereis per horizontalią padėtį  ir nulenkta taps . Kairys baltas kvadratas taps šonine siena . Apatinis baltas kvadratas užlenktas taps apatine siena. Pagaliau kairys kvadratas kartu su apatiniu baltu užiminės tokias padėtis: , , . Dabar užlenkus juodą-baltą kvadratą, jis taps užpakaline siena . Viršutinė užpakalinė briauna bus tarp dviejų juodų sričių, dešinioji užpakalinė briauna – taip pat.
Teisingas atsakymas D.

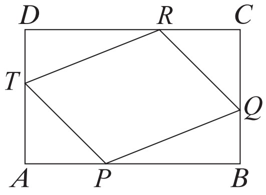
K20. Ⓓ Penkis kartus

? Lengva atspėti, kad Stasiui dabar 6 metai: prieš 3 metus jam buvo 3 metai, po 3 metų jam bus 9 metai, taigi tris kartus daugiau. Todėl po ketverių metų jis turės 10 metų, o prieš ketverius – turėjo 2 metus, t. y. penkis kartus mažiau.
Renkamės atsakymą D.

! Beveik aišku, kad Stasiui dabar gali būti tik 6 metai. Vis dėlto paprasčiausia sudaryti lygtį ir ją išspręsti. Jeigu Stasiui dabar x metų, po trejų metų jam bus $x + 3$ metų, o prieš trejus jam buvo $x - 3$ metų. Todėl $x + 3 = 3(x - 3)$, $2x = 12$, $x = 6$.
Teisingas atsakymas D.

!! Pagalvokime, kiek metų Stasiui buvo prieš 3 metus. Žinoma, kad nuo to momento po 6 metų Stasiui bus tris kartus daugiau metų, todėl 6 metų tarpas lygus dvigubam Stasio metų skaičiui. Vadinasi, prieš 3 metus Stasiui buvo 3 metai, o dabar – 6 metai.

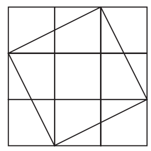
K21. Ⓓ $\frac{5}{9}S_{ABCD}$



? Iš akies matome, kad lygiagretainio plotas didesnis už pusę stačiakampio ploto, taigi atkrenta atsakymai A ir C. Jaučiame, kad $\frac{2}{3}$ per daug, ir reikėtų rinktis iš atsakymų B ir D – iš $\frac{3}{5}$ ir $\frac{5}{9}$. Kadangi stačiakampio kraštinė padalyta į 3 lygias dalis, tai vardiklyje turėtų būti trejetai. Renkamės atsakymą $\frac{5}{9}$, t. y. D.

?? Kadangi spėjame, jog atsakymas nepriklauso nuo stačiakampio matmenų, galima imti kvadratą, pavyzdžiui, 3×3. Vidinio kvadrato (pagaliau net neįdomu, ar tai kvadratas) plotą galima tiksliai surasti remiantis vadinamąja Piko formule: jeigu daugiakampio viršūnės yra gardelės mazguose, tai jo plotas lygus vidinių mazgų skaičiui be vieneto plius pusė krašto mazgų (žr. V. Prasolov, Zadači po planimetrii, II d., Moskva, 1986, p. 165).

Vadinasi, mūsų vidinės figūros plotas lygus $4 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 5$. Kadangi pradinio kvadrato plotas lygus 9, tai renkamės atsakymą D.



??? Dar paprasčiau vidinio kvadrato plotą apskaičiuoti taip. Vienas atmetamas trikampis sudaro pusę stačiakampio 1×2, todėl jo plotas lygus 1. Atmetame 4 trikampius, todėl vidinio kvadrato plotas yra 5, arba $\frac{5}{9}$ didžiojo kvadrato ploto.

! Jau matėme, kad lengviau apskaičiuoti atmetamų trikampių plotą. Pažymėkime stačiakampio kraštines a ir b, tada jo plotas lygus ab. Kiekvieno iš 4 stačiųjų trikampių kraštinės lygios $\frac{2}{3}a$ ir $\frac{1}{3}b$, todėl plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{3}b = \frac{1}{9}ab$, o visų keturių plotas lygus $\frac{4}{3}ab$. Todėl lygiagretainio plotas lygus $ab - \frac{4}{9}ab = \frac{5}{9}ab$.
Teisingas atsakymas D.

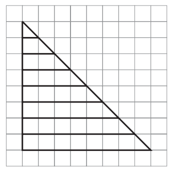
!! Niekas nepasikeistų, jei pradinis keturkampis būtų lygiagretainis – atmetamo trikampio plotas lygus $1/9$ lygiagretainio ploto – tai išplaukia iš trikampio ploto formulės $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Beje, ir ta formulė nereikalinga. Pavyzdžiui, trikampio ABD plotas lygus $\frac{1}{2}$ lygiagretainio $ABCD$ ploto, trikampio APD plotas lygus $\frac{1}{3}$ trikampio ABD ploto (nes aukštinė bendra), trikampio APT plotas lygus $\frac{2}{3}$ trikampio APD ploto (nes iš viršūnės P nuleista aukštinė bendra). Taigi $S_{\triangle APT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{9} S_{ABCD}$.

K22. Ⓓ Žali

? Spėjame, kad niekas nepriklauso nuo tvarkos, kuria žirneliai valgomi. Todėl iš pradžių, imdami po 3, „suvalgykime“ baltus žirnelius ($387 : 3 = 129$), po to geltonus, raudonus ir rudus žirnelius. Liks tik žali žirneliai. Kai per 135 kartus suvalgysime 405 žalius žirnelius, liks 2 žali žirneliai.
Renkamės atsakymą D.

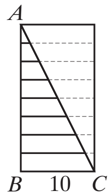
! Kadangi kiekvieną kartą suvalgomi 3 vienodos spalvos žirneliai, tai kiekvienos spalvos žirnelių skaičiaus dalybos iš 3 liekana nekinta (kartais sakoma – yra invariantas). Todėl žirnelių skaičių dalybos iš 3 liekanos visą laiką bus 0, 0, 0, 2, 0. Vadinasi, kai liko 2 žirneliai, jie buvo žali.
Teisingas atsakymas D.

K23. D 35



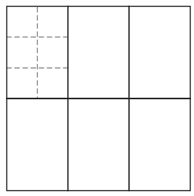
? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo trikampio pavidalo, tai languotame popieriuje braižykime statųjį lygiašonį trikampį, kurio statiniai – 8 langeliai (4 langeliai = 5 ilgio vienetai).
Tada septynių atkarpų ilgiai yra 7, 6, 5, 4, 3, 2 langeliai ir 1 langelis – iš viso $7+6+5+4+3+2+1=28$ langeliai, t. y. 35 ilgio vienetai.
Renkamės atsakymą D.

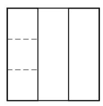
! Galima apskaičiuoti kiekvienos atkarpos ilgį – pavyzdžiui, trumpiausią atkarpą x randame iš proporcijos $x : 10 = 1 : 8$, $x = 10/8 = 5/4$. Tada kitos atkarpos lygios $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, o jų visų suma lygi $x + 2x + \cdots + 7x = 28x = 28 \cdot \frac{5}{4} = 35$.
Teisingas atsakymas D.



!! Papildome brėžinį iki stačiakampio.
Tada visi atitinkami trikampiai lygūs, todėl lygios ir atitinkamos atkarpos. Bet dviguba atkarpų suma lygi $7 \cdot 10$, todėl ieškomoji suma lygi 35. Beje, niekas nesikeistų, jeigu $\triangle ABC$ nebūtų statusis.

K24. C 36





? Galima bandyti viską daryti iš 1 cm aukščio sluoksnių – tada reikia iš stačiakampių 2×3 sudaryti kvadratą. Sudaryti iš jų kvadratą 6×6 paprasta (žr. kairį paveikslėlį).
Tam prireikė 6 kaladėlių. Vadinasi, 6 sluoksniams prireiks $6\times6 = 36$ kaladėlių.
Renkamės atsakymą C.

?? Galima pabandyti dėti sluoksnius 2 cm aukščio. Tada iš stačiakampių 1×3 reikia sudaryti kvadratą. Visiškai paprasta sudėti kvadratą 3×3 (žr. dešinį paveikslėlį).
Deja, iš 2 cm aukščio sluoksnių neįmanoma sukrauti 3 cm aukščio bokšto. Vėl, matyt, teks sudarinėti 6 cm kraštinės kubą: iš 4 kvadratų 3×3 sudarome kvadratą 6×6, o tada dedame 3 tokius sluoksnius.
Ne geriau ir imti 3 cm aukščio sluoksnį. Tada reikia sudaryti kvadratą iš 1×2 stačiakampių 1×2. Iš dviejų stačiakampių gauname kvadratą 2×2. Bet ir vėl, matyt, teks imti kubo kraštinę 6. Tada viename sluoksnyje bus 18 kaladėlių, o 2 sluoksniuose – 36 kaladėlės.

! Iki griežto įrodymo dar toli: visiškai nebūtinai kubą turime daryti iš sluoksnių – o gal galima sudėti jį ir kitaip. Pagaliau net ir dedant sluoksniais reikia įrodyti, kad, pavyzdžiui, sudėti kvadratą iš stačiakampių 2×3 reikia 6 stačiakampių. Paprasčiausia galvoti taip. Sakykime, kad mums pavyko sudėti kubą iš a kaladėlių. Vienos kaladėlės tūris 6, vadinasi, kubo tūris lygus $6a$. Kita vertus, kubo kraštinė bus sveikasis skaičius b, o tada kubo tūris lygus b^3. Turime lygybę $b^3 = 6a$. Mums reikia rasti mažiausią skaičių a, tenkinantį šią lygybę. Įsivaizduokime, kad skaičių $6a$ ir skaičių b išskaidėme pirminiais dauginamaisiais. Parašytoji lygybė reiškia, kad į sandaugą $6a$ kiekvienas pirminis turi įeiti bent 3 kartus. Kadangi 6 turi daugiklį 2, tai į a būtinai įeina 2^2, o kadangi turi daugiklį 3, tai į a būtinai įeina 3^2. Vadinasi, a yra $2^2 \cdot 3^2 = 36$ kartotinis, iš kurių mažiausias yra 36. Lieka patikrinti, ar iš 36 kubelių tikrai galima sudaryti kubą, bet tai padaryti, kaip jau matėme, nesunku.
Teisingas atsakymas C.

K25. C 21

? Čia jau visiškai nieko negalime spėti.

! Skaičiuojame. Vienetas turi tik vieną daliklį – 1, bet šis daliklis nėra tikrinis. Skaičius 2 turi 2 daliklius, bet abu jie nėra tikriniai. Skaičius 3 taip pat turi du daliklius – vienetą ir patį save (tą patį galime pasakyti apie bet kurį pirminį skaičių).
Skaičius 4 turi 3 daliklius: 1, 2 ir 4. Iš jų tik 2 yra tikrinis. Bet net jei jį vadintume „sandauga“, tai $2 \neq 4$.
Skaičius 5 – pirminis.
Skaičius 6 turi du tikrinius daliklius, 2 ir 3, taigi jis tinka: $2 \cdot 3 = 6$ (pirmas ieškomos sekos narys).
Skaičius 7 – pirminis.
Skaičius 8 turi 2 tikrinius daliklius – 2 ir 4, o $2 \cdot 4 = 8$, – tinka (8 – antras sekos narys).
Skaičius 9 turi vienintelį tikrinį daliklį – 3.
Skaičius 10 turi du tikrinius daliklius – 2 ir 5, kurių sandauga lygi 10 (trečias sekos narys).
Skaičius 11 – pirminis.
Skaičius 12 turi tikrinius daliklius 2, 3, 4, 6, bet $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \neq 12$.
Skaičius 13 – pirminis.
Skaičius 14 turi 2 tikrinius daliklius – 2 ir 7, o $2 \cdot 7 = 14$ (skaičius 14 – ketvirtas sekos narys).
Skaičius 15 turi 2 tikrinius daliklius – 3 ir 5, o $3 \cdot 5 = 15$ (skaičius 15 – penktas sekos narys).
Skaičius 16 turi 3 tikrinius daliklius – 2, 4 ir 8, bet $2 \cdot 4 \cdot 8 \neq 16$.
Skaičius 17 – pirminis.
Skaičius 18 turi 4 tikrinius daliklius – 2, 3, 6, 9, bet $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \neq 18$.
Skaičius 19 – pirminis.
Skaičius 20 turi 4 tikrinius daliklius – 2, 4, 5, 10, bet $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \neq 20$.
Skaičius 21 turi 2 tikrinius daliklius – 3 ir 7, o $3 \cdot 7 = 21$ (šeštas sekos narys).
Teisingas atsakymas C.

!! Skaičius 1 turi tik daliklį 1, kuris nėra tikrinis.
Išskaidykime skaičių $n > 1$ pirminių daugiklių sandauga. Jei jis yra pirminis p_1, tai jis turi tik daliklius 1 ir p_1, taigi neturi tikrinių daliklių.
Jeigu skaičiaus n skaidinyje yra vienintelis pirminis daugiklis, įeinantis du kartus, $n = p_1^2$, tai n turi tik vieną tikrinį daliklį p_1, ir $n = p_1^2 \neq p_1$.
Jei skaičiaus n skaidinyje tėra vienas pirminis, įeinantis $k \geqslant 2$ kartų, $n = p_1^k$, tai jo tikriniai dalikliai yra $p_1, p_1^2, p_1^3, \ldots, p^{k-1}$. Kadangi jau $p_1 \cdot p_1^{k-1} = p_1^k = n$, tai p_1^2 turi sutapti su p^{k-1}, t. y. $k - 1 = 2$, $k = 3$. Vadinasi, jei $n = p_1^3$, tai n yra mūsų sekos skaičius.
Sakykime, į skaičių n įeina bent du pirminiai daugikliai, $n = p_1 p_2 k$. Tada jeigu $k > 1$, tai $p_1 k$ ir $p_2 k$ yra tikriniai dalikliai, bet $p_1 k \cdot p_2 k > n$. Jeigu $k = 1$, tai p_1 ir p_2 yra vieninteliai tikriniai daugikliai, $p_1 p_2 = n$, taigi į mūsų seką įeina tik dviejų skirtingų pirminių skaičių (pirmuoju laipsniu) sandaugos.
Taigi mus domina tik pirminių skaičių kubai

$$2^3,\ 3^3,\ 5^3,\ \ldots$$

ir dviejų pirminių skaičių sandaugos

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 11,\ 2 \cdot 13, \ldots, \\ 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 7,\ 3 \cdot 11, \ldots, \\ 5 \cdot 7,\ 5 \cdot 11, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Iš jų sudarome didėjančią seką:

$$\begin{array}{llll} 6 = 2 \cdot 3, & 8 = 2^3, & 10 = 2 \cdot 5, & 14 = 2 \cdot 7, \\ 15 = 3 \cdot 5, & 21 = 3 \cdot 7, & 22 = 2 \cdot 11, & 26 = 2 \cdot 13, \\ 27 = 3^3, & 33 = 3 \cdot 11, \ \ldots . & & \end{array}$$

Taigi šeštas sekos narys yra 21.

K26. Ⓐ 12

?

Galime tikrinti atsakymus. Kadangi jie neišrikiuoti, pradedame nuo A.

Taigi jeigu stačiakampio pradinis ilgis buvo 12 cm, tai jo plotas buvo $12 \cdot 9$. Po pirmo susitraukimo jo plotas buvo $6 \cdot 6$ (tai jau kvadratas, bet tuo pačiu ir stačiakampis). Po antro susitraukimo stačiakampio plotas $3 \cdot 4$ (dabar vargu ar galima 3 vadinti ilgiu, o 4 – pločiu, taigi sakysime, kad jo ilgis 4, o plotis – 3). Po trečio susitraukimo stačiakampio plotas tapo $2 \cdot 2 = 4$. Tai kaip tik ir teigiama sąlygoje.

Renkamės atsakymą A.

! Beveik aišku, kad nesvarbu, kurios kraštinės palikti pusę, o kurios – du trečdalius. Iš tikrųjų, jeigu stačiakampio kraštinės buvo a ir b, tai po pirmo susitraukimo jo plotas tapo $\frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}ab$, t. y. sumažėjo 3 kartus. Vadinasi, po 3 susitraukimų plotas sumažės 27 kartus, o kadangi jis tapo lygus 4 cm, tai iš pradžių jis buvo lygus $4 \cdot 27 = 108\,(\mathrm{cm}^2)$. Vadinasi, kita stačiakampio kraštinė buvo lygi $108 : 9 = 12\,(\mathrm{cm})$.
Kaip ir visus žodinius uždavinius, privalu tikrinti. Taigi tikriname, ar galėjo pradinis stačiakampis būti 12×9. Tada po pirmo susitraukimo jis tapo 6×6, taigi bet kurią kraštinę galime laikyti ilgiu, kitą – pločiu. Po antro susitraukimo ilgesnioji kraštinė sumažėjo pusiau ir pasidarė lygi 3, o trumpesnioji kraštinė sumažėjo trečdaliu ir tapo lygi 4. Vadinasi, stačiakampio ilgis tapo 4, o plotis 3. Po trečio susitraukimo ilgesnioji kraštinė pasidarė 2, o trumpesnioji – irgi 2. Taigi stačiakampio (t. y. kvadrato) plotas tapo lygus 4.
Vadinasi, visi sąlygos reikalavimai išpildyti.
Teisingas atsakymas A.

K27. Ⓒ 21

? Sakykime, kad pamestosios lazdelės ilgis – natūralusis skaičius ir iš visų 6 lazdelių galima sudėti lygiakraštį trikampį. Kadangi perimetras lygus trigubai kraštinei, tai jis turi dalytis iš 3.
Tikrinkime atsakymus. Jeigu teisingas būtų atsakymas A, tai iš visų lazdelių 19, 25, 29, 33, 37, 41 būtų galima sudėti lygiakraštį trikampį. Bet lazdelių ilgių suma lygi $60+54+70$ ir nesidalija iš 3.
Jei būtų teisingas atsakymas B, tai suma padidėtų 1, bet 71 taip pat nesidalija iš 3.
Jei būtų teisingas atsakymas D ar E, tai suma padidėtų dar 2 ar 3, bet 73 ir 74 nesidalija iš 3.
Renkamės atsakymą C.

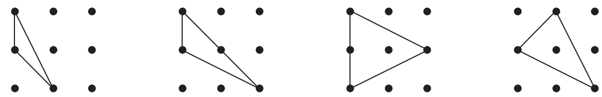
! Liko įrodyti, kad iš lazdelių 21, 25, 29, 33, 37, 41 galima sudėlioti lygiakraštį trikampį. Bet tai akivaizdu: užtenka imti kraštines $21+41$, $25+37$, $29+33$.
Teisingas atsakymas C.

!! Išspręskime uždavinį, jeigu neduoti jokie atsakymai.
Pažymėkime pamestosios lazdelės ilgį x. (Sąlygoje nepasakyta, kad x – sveikasis skaičius, bet tai beveik akivaizdu: x bus tik vienoje kraštinėje, kitose bus tik sveikieji skaičiai, vadinasi, kraštinės ilgis – sveikasis skaičius. Pagaliau x yra perimetro ir kitų penkių lazdelių ilgių sumos skirtumas, – taip pat sveikasis skaičius. Tiesa, šiuo faktu sprendime net nesiremiama.) Pagal sąlygą iš šešių skaičių 25, 29, 33, 37, 41 ir x galima sudaryti tris lygias sumas.
Į vieną sumą negali įeiti daugiau kaip du dėmenys. Iš tikrųjų, jeigu į sumą įeitų bent 3 dėmenys, tai ji būtų ne mažesnė už $x+25+29 > 54$. Bet tada iš likusių dviejų sumų vienoje bus vienas dėmuo, didesnis už 54, vadinasi, tai dėmuo x, ir $x > 54$. Bet tada 3 dėmenų suma būtų $\geqslant 25+29+33 = 87$, o toje iš kitų dviejų sumų, kurioje nėra x, bus daugiausiai $37+41 = 78$, – prieštara.
Vadinasi, į kiekvieną sumą įeina po du dėmenis. Išmetus sumą, į kurią įeina x, gausime dvi lygias sumas, sudarytas iš 4 skaičių, paimtų iš penketuko 25, 29, 33, 37, 41. Pasižiūrėkime, kaip tai įmanoma padaryti.
Jeigu į ketvertuką neįeina 25, tai 29 gali būti poroje tik su 41 – kitaip antra suma didesnė, tada $29+41 = 70$, $33+37$, ir $x+25 = 70$, $x = 45$.
Jei į ketvertuką įeina 25, tai 25 negali būti poroje nei su 29, nei su 33, – kitaip antra pora didesnė. Jei 25 bus poroje su 37, gausime $25+37 = 62 = 29+33$, ir $x+41 = 62$, $x = 21$. Jei 25 bus poroje su 41, tai $25+41 = 66 = 29+37$, ir $x+33 = 66$, $x = 33$ (sąlyga nedraudžia, kad dvi lazdelės būtų vieno ilgio).
Gavome tris sprendinius – pamestosios lazdelės ilgis galėjo būti 21, 33 arba 45.

K28. Ⓓ 4

?

Paspėliojus lengva rasti 4 skirtingus trikampius:

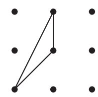


$(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ $(1, \sqrt{5}, \sqrt{8})$ $(2, \sqrt{5}, \sqrt{5})$ $(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5})$

Renkamės atsakymą D.

! Svarbiausia susigalvoti nagrinėjimo sistemą ir nepraleisti nė vieno nestačiojo trikampio. Trikampio visos 3 viršūnės negali būti kvadrato 2×2 kampuose – kitaip jis būtų statusis. Todėl užtenka išnagrinėti 2 atvejus: 1) bent viena viršūnė yra kvadrato centre; 2) nėra viršūnės kvadrato centre, bet bent viena viršūnė yra kraštinės viduryje. Įsiveskime tokią koordinačių sistemą, kad kairiojo apatinio taško koordinatės būtų (0; 0), o centrinio – (1; 1), ir išnagrinėkime abu atvejus.

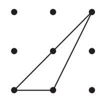
1) Viršūnė yra taške (1; 1). Sakykime, kad yra viršūnė kvadrato kampe – galime laikyti, kad tai taškas (0; 0). Dėl simetrijos galime trečios viršūnės ieškoti tik virš įstrižainės (0; 0)—(2; 2). Bet (0; 1) ir (0; 2) duoda stačiuosius trikampius, taigi tinka tik trečia viršūnė (1; 2).



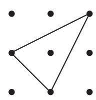
Jeigu trikampio viršūnės kvadrato kampe nėra, tai kitos dvi viršūnės bus kvadrato kraštinių vidurio taškai, ir gausime statųjį trikampį.

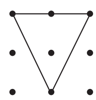
2) Viršūnė yra kraštinės viduryje, sakykime, taške (1; 0). Dėl simetrijos antros viršūnės galima ieškoti tiesėje $x = 1$ arba jos kairėje.

Jeigu antra viršūnė yra taške (0; 0), tai trečia viršūnė negali būti nei pirmoje, nei antroje vertikalėje. Jei tai taškas (2; 1), tai tokį trikampį jau turime, jeigu tai taškas (2; 2), tai gauname naują trikampį.



Jeigu antra viršūnė yra taške (0; 1), tai trečia viršūnė negali būti (0; 0) (trikampis statusis); jei tai taškas (0; 2), tai tokį trikampį turime; jei trečia viršūnė (1; 2), tai trikampis statusis; jei tai taškas (2; 0) – tokį trikampį turime; jei (2; 1) – trikampis statusis; jei tai taškas (3; 3) – gauname naują trikampį.





Jeigu antra viršūnė yra taške (0; 2), tai trečia viršūnė negali būti (0; 0) (trikampis statusis); jei tai (0; 1) – tokį trikampį jau turėjome; jei (1; 2) – trikampis statusis; jei (2; 0) – trikampį jau turėjome; jei (2; 1) – trikampį jau turėjome; jei (2; 2) – gavome naują trikampį.

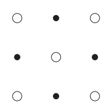
Pagaliau jeigu antra viršūnė yra taške (1; 2), tai bet kuri trečia viršūnė duoda statųjį trikampį.

Taigi iš viso turime 4 skirtingus trikampius, ir teisingas atsakymas D.

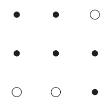
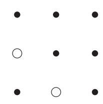
!! Pagal Pitagoro teoremą nesunku apskaičiuoti gautųjų trikampių kraštines:

$$(1, \sqrt{2}, \sqrt{5}), \ (1, \sqrt{5}, \sqrt{8}), \ (\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}), \ (2, \sqrt{5}, \sqrt{5})$$

Be to, nurodysime subtilesnę perranką. Galime teigti, kad bet kuris nestatusis trikampis turi bent vieną viršūnę kraštinės viduryje. Iš tikrųjų, jeigu tarsime, kad visos trys viršūnės yra kvadrato centre arba viršūnėse (žr. paveikslėlį),



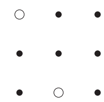
tai galima gauti tik statųjį trikampį. Vadinasi, perranką užtenka atlikti, kai viena viršūnė yra kraštinės viduryje. Dėl simetrijos galima laikyti, kad ta viršūnė yra taškas (1; 0). Kadangi abi likusios viršūnės negali būti antroje vertikalėje, tai remiantis simetrija galima laikyti, kad antra viršūnė yra pirmoje vertikalėje.

Dabar perranka nebedidelė. Jeigu ji yra (0; 0) (žr. kairį paveikslėlį), tai trečia viršūnė nebus nei pirmoje, nei antroje vertikalėje (tada trikampiai statieji), todėl tiks (2; 1) (trikampis (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$)) ir (2; 2) (trikampis (1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$)).

Jeigu antra viršūnė yra (0; 1) (žr. dešinį paveikslėlį), tai trečia viršūnė (0; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 1) duoda stačiuosius trikampius; viršūnė (0; 2) ir viršūnė (2; 0) duoda trikampius (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$); viršūnė (2; 2) duoda naują (trečią) trikampį ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$).

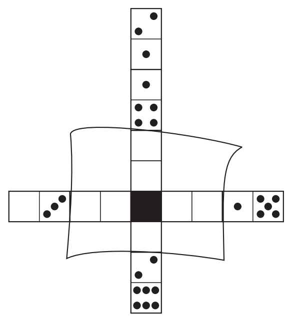
Jeigu antra viršūnė yra (0; 2), tai (žr. paveikslėlį dešinėje) trečia viršūnė gali būti: (1; 1) (viršūnes (0; 0) ir (0; 1) jau perrinkome), tada gauname jau turėtą trikampį (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$);



trečia viršūnė (1; 2) duoda statųjį trikampį; trečia viršūnė (2; 0) duoda jau turėtą trikampį (1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$); trečia viršūnė (2; 1) duoda jau turėtą trikampį ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$); trečia viršūnė (2; 2) duoda naują (ketvirtą) trikampį (2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$).

K29. (B) 3

? Sprendžiant šį uždavinį reikia žinoti, kad domino kauliukai yra stačiakampiai, kurių kiekvienoje pusėje yra nuo 1 iki 6 akių, o žaidžiant jie dedami taip, kad prie dviejų kauliukų bendros briaunos akučių skaičius būtų tas pats.



Tikrinkime atsakymus. Jeigu atsakymas A (juodas langelis 2), tai į dešinę turėtų būti kauliukas (2, 1), bet jis jau yra viršuje – prieštara.

Jeigu teisingas atsakymas B (juodas langelis 3), tai į apačią kauliuko (3, 2) langelis yra 2 (jo viršutinis langelis ir yra uždengtasis langelis). Tada į dešinę nuo užtušuoto langelio padėtas kauliukas (3, 1), į kairę – (3, 3), į viršų (3, 4), ir niekas tam neprieštarauja. Renkamės atsakymą B.

! Spręskime uždavinį, kai atsakymai nenurodyti.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 0 taškų. Tada į kairę turi būti padėtas kauliukas (3, 0), bet tas kauliukas jau padėtas kairiau.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 1 taškas. Tada į viršų eitų kauliukas $\binom{4}{1}$. Bet toks kauliukas jau panaudotas.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 2 taškai. Tada į dešinę būtų kauliukas (2, 1), bet jis jau padėtas viršuje.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 3 taškai. Tada į apačią yra 2 taškai (t. y. kauliuko viršus – 3 taškai, apačia – 2 taškai), į dešinę – kauliukas (3, 1), į viršų – kauliukas $\binom{4}{3}$, į kairę – kauliukas (3, 3). Taigi turime vieną sprendinį.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 4 taškai. Tada į dešinę turėtų būti kauliukas (4, 1), bet jis jau padėtas aukštyn.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 5 taškai. Tada į dešinę turėtų būti kauliukas (5, 1), bet jis jau padėtas toliau į dešinę.

Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 6 taškai. Kadangi į apačią bus langelis 2, taigi tas kauliukas yra $\binom{6}{2}$. Bet tas kauliukas jau panaudotas apačioje.

Taigi atsakymas vienintelis – užtušuotame langelyje gali būti tik 3 taškai.

Pabandykime sprendimą surašyti trumpiau.
Jei iš dešinės yra kauliukas (0, 1), tai juodas – 0, iš kairės kauliukas (3, 0), bet jis jau yra kairiau.
Jei iš dešinės yra kauliukas (1, 1), tai į apačią – kauliukas $\binom{1}{2}$, bet toks kauliukas jau padėtas.
Jei iš dešinės kauliukas (3, 1), tai į apačią – kauliukas $\binom{3}{2}$, į viršų – kauliukas $\binom{4}{3}$, į kairę – kauliukas (3, 3), ir tokia padėtis galima.
Pagaliau jei iš dešinės padėtas kauliukas (6, 1), tai į apačią turėtų būti kauliukas $\binom{6}{2}$, bet jis jau padėtas apačioje.
Vadinasi, vienintelis galimas variantas – juodajame kvadratėlyje yra 3 akutės.

K30. Ⓒ 6

Reikia nustatyti skaičiaus $0{,}2^{2000}$ paskutinį skaitmenį. Kadangi 2 keliant laipsniu galimos galūnės 2, 4, 8, 6, tai spėlioti nėra ko.

Kadangi galūnės 2, 4, 8, 6 kartojasi periodiškai – kas 4, tai $0{,}2^{2000}$ galūnė bus tokia pat kaip ir $0{,}2^4$, t. y. 6.
Teisingas atsakymas C.

Skaičių $0{,}2^{2000}$ galima užrašyti taip: $(0{,}2^4)^{500}$. Skaičius $0{,}2^4$ baigiasi 6, o tokį skaičių keliant laipsniu paskutinis skaitmuo nekinta.
Ir iš viso, iš dešimtainių trupmenų daugybos taisyklių išeina, kad užtenka nagrinėti skaičių 2^{2000}.