SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. C Žr. uždavinio J13 sprendimą.

S2. D Žr. uždavinio J6 sprendimą.

S3. B Žr. uždavinio J7 sprendimą.

S4. C Žr. uždavinio J24 sprendimą.

S5. E 90

? Kadangi $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, tai natūralu imti $a = 2 \cdot 3$, $b = 5 \cdot 3$, ir gauname $ab = 90$.

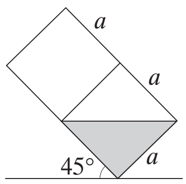
! Kadangi $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, tai $5a = 2b$. Vadinasi, a dalijasi iš 2, $a = 2n$, tada $2b = 10n$, $b = 5n$. Kadangi a ir b didžiausiasis bendrasis daliklis lygus 3, tai $n = 3$. Todėl $a = 6$, $b = 15$, ir sandauga $ab = 90$.
Teisingas atsakymas **E**.

S6. A 3003

! Kadangi visos prizmės viršūnės priklauso pagrindams, tai jos pagrindas yra 1001-kampis. Vadinasi, yra 1001 šoninės briaunos. Pridėję po 1001 kiekvieno pagrindo kraštinę, gauname 3003 briaunas.
Teisingas atsakymas **A**.

S7. B 25%

? Išvedus sąlygoje pavaizduoto stačiakampio vidurinę liniją, tarsi aišku, kad vandens yra pusės stiklinės pusė.
Renkamės atsakymą **B**.



! Kadangi stačiojo trikampio vienas kampas lygus 45°, tai ir kitas toks pat. Vadinasi, ir kita to trikampio kraštinė lygi a. Nagrinėkime „pusę“ stiklinės padaliję ją pusiau. Savaime aišku, kad pusės stiklinės tūris yra 50%. Vanduo sudaro pusstiklinės pusę — pusstiklinė simetriška vandens paviršiaus atžvilgiu. Taigi vanduo sudaro pusę tų 50%, t. y. 25%.
Teisingas atsakymas **B**.

S8. E $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

? Kadangi 1 radianas $\approx 57°$, tai $\sin 1 \approx \sin 57°$, $\sin 2 = \sin 114° = \sin(180° - 114°) = \sin 66°$, $\sin 3 \approx \sin 171° = \sin 9°$. Kadangi $\sin 9° < \sin 57° < \sin 66°$, tai $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi $\sin x = \sin(\pi - x)$, tai $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$. Kadangi visi argumentai dabar yra pirmame ketvirtyje ($\pi - 3 < \frac{\pi}{2}$, nes $\frac{\pi}{2} < 3$, o $\pi - 2 < \frac{\pi}{2}$, nes $\frac{\pi}{2} < 2$) ir $\pi - 3 < 1 < \pi - 2$, tai $\sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2)$ ir $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.
Teisingas atsakymas **E**.

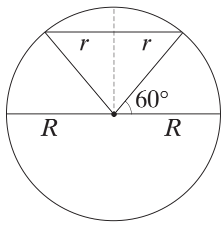
S9. C $\frac{1}{12}$

? Sakykime, kad vandens tūris 1. Tada ledo tūris pasidarys $1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$. Kai ledas ištirps, vandens tūris vėl bus 1, vadinasi, tūris sumažės $\frac{1}{11}$, o tai sudaro $\frac{1}{11} : \frac{12}{11} = \frac{1}{12}$ tūrio dalį.
Renkamės atsakymą **C**.

! Šiaip sprendimas **?** visai geras, tik yra pavojaus supainioti tūrio vienetus ir tūrio dalis. Todėl galime vandens tūrį pažymėti V. Tada ledo tūris bus $V + \frac{1}{11}V = \frac{12}{11}V$. Kai ledas ištirps, tūris vėl sumažės $\frac{1}{11}V$, o tai yra $\frac{1}{11}V : (\frac{12}{11}V) = \frac{1}{12}$ ledo tūrio dalis.
Teisingas atsakymas **C**.

S10. Ⓔ Kitas atsakymas

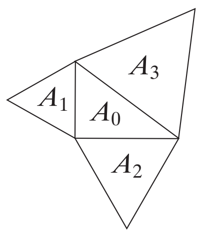
! Pavaizduokime Žemės rutulio pjūvį.



Ieškomos lygiagretės ilgis yra $2\pi r$, Žemės pusiaujo ilgis $2\pi R = 40\,000$. Kadangi $r = \frac{R}{2}$, tai $2\pi r = \pi R = 20\,000$. Retas atvejis — teisingo atsakymo tarp konkrečių atsakymų nėra.
Teisingas atsakymas **E**.

S11. Ⓐ $A_1 + A_2 = A_3$

? Prisiminus Pitagoro teoremą norisi rinktis atsakymą **B**, bet taip apsiriktume — prisiminkime tokią Pitagoro teoremos formuluotę: ant stačiojo trikampio įžambinės nubrėžto kvadrato plotas lygus sumai plotų kvadratų, nubrėžtų ant to stačiojo trikampio statinių. Todėl spėjame, kad teisingas atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.



! Jeigu lygiakraščio trikampio kraštinė yra t, tai jo plotas lygus $S = \frac{1}{2}t \cdot t \cdot \sin 60^\circ = t^2\sqrt{3}/4$. Ploto A_1 trikampio kraštinę pažymėkime a, ploto A_2 — b, ploto A_3 — c. Tada pagal Pitagoro teoremą $a^2 + b^2 = c^2$. Padauginkime šią lygybę iš $\sqrt{3}/4$:

$$a^2\sqrt{3}/4 + b^2\sqrt{3}/4 = c^2\sqrt{3}/4.$$

Tai reiškia, kad $A_1 + A_2 = A_3$.
Teisinga lygybė **A**.

!! Patikrinkime, ar tikrai jokia kita lygybė negali būti teisinga kokiam nors stačiajam trikampiui. Pakėlę kvadratu lygybę **A**, gauname $A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = A_3^2$. Todėl lygybė **B** būtų teisinga tik kai $2A_1A_2 = 0$, o trikampio plotas visada teigiamas. Neteisinga ir lygybė **D**. Jei būtų $A_1 + A_2 = A_3\sqrt{2}$, tai gautume $A_3\sqrt{2} = A_3$, t. y. $\sqrt{2} = 1$.
Sunkiausia patikrinti lygybę **C**.
Jeigu plotas matuojamas kvadratiniais vienetais (pavyzdžiui, kvadratiniais centimetrais), tai lygybė jau neteisinga: neįmanoma sudėti nevienodų dimensijų vienetų. Vis dėlto galima kalbėti apie lygybę, kai nekalbama apie dimensiją. (Pavyzdžiui, galima kalbėti apie kubą, kurio tūris V lygus paviršiui S, $V = S$. Tokio kubo kraštinę pažymėję a, gautume $a^3 = 6a^2$, $a = 6$, t. y. jei kubo kraštinė lygi 6, tai jo paviršiaus plotas lygus 216 ir tūris lygus 216.) Taigi tegul lygybė **C** teisinga. Kadangi

$A_0 = ab/2$, tai $A_1 + A_2 + A_3^2 = 3ab/2$, $a^2\sqrt{3}/4 + b^2\sqrt{3}/4 + (a^2\sqrt{3}/4 + b^2\sqrt{3}/4)^2 = 3ab/2$. Įrodysime, kad galima taip pasirinkti a ir b, kad ši lygybė bus teisinga. Imkime $a = b$, tada

$$a^2\sqrt{3}/2 + 3a^4/4 = 3a^2/2,$$
$$2a^2\sqrt{3} + 3a^4 = 6a^2,$$
$$2\sqrt{3} + 3a^2 = 6,$$

ir aišku, kad reikiamos a ir b reikšmės, $a = b$, egzistuoja: $a = b = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}$.
Beje, nebūtina imti $a = b$. Imkime, pavyzdžiui, $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\approx 0{,}87a$). Lygybė **C** virsta tokia:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \Big(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\Big)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad \frac{7a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{49a^4\cdot 3}{256} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4},$$
$$\frac{49a^4\cdot 3}{256} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{16}, \quad 49a^2\sqrt{3} = 80,$$

taigi užtenka imti

$$a = \sqrt[4]{\frac{2^8\cdot 5^2\cdot 3^3}{7^4\cdot 3^4}} = \frac{4\sqrt[4]{675}}{21}, \quad b = \frac{2\sqrt[4]{675}}{21}\sqrt{3} = \frac{6\sqrt[4]{75}}{21}.$$

Taigi galima sakyti, kad yra tokių stačiųjų trikampių, kuriems teisinga tiek lygybė **A**, tiek ir lygybė **C**. Kad lygybė **C** būtų neįmanoma, užtektų ją pataisyti, pavyzdžiui, taip:

$$A_1 + A_2 + A_3^2 = \sqrt{3}A_0.$$

Tada jos kairė pusė didesnė už dešinę, nes pagal vidurkių nelygybę

$$A_1 + A_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ab = \frac{ab\sqrt{3}}{2} = A_0\sqrt{3}.$$

Galima būtų pakeisti ir uždavinio klausimą: *Kuri iš lygybių teisinga kiekvienam stačiajam trikampiui?*

S12. (A) REBLAS

? Pagal sandaugos taisyklę žodyne yra $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6! = 720$ žodžių. Kiekviena raide prasideda $5! = 120$ žodžių. Vadinasi, mūsų žodis prasideda penkta raide, t. y. R.
Antra raidė gali būti kiekviena iš penkių likusių A, B, E, L, S. Su kiekviena jų yra $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24$ žodžių, vadinasi, mūsų žodis, kurio numeris $537 = 4\cdot 120 + 2\cdot 24 + 9$, yra trečiojoje grupėje žodžių, o jų antra raidė yra E. Bet raidėmis RE prasidedantį žodį duoda tik atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Tęskime toliau. Tarp 24 žodžių, prasidedančių raidėmis RE, trečia raidė gali būti viena iš raidžių A, B, L, S. Su kiekviena iš jų, kai šioje grupėje ji trečia, yra $3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$ žodžiai. Vadinasi, trečiąja reikia imti antrą iš likusių raidžių — B.
Kadangi $547 = 4\cdot 120 + 2\cdot 24 + 1\cdot 6 + 3$, o su kiekviena ketvirtąja raide tėra $2\cdot 1 = 2! = 2$ žodžiai, tai ketvirtąją raidę reikia imti antrą iš likusių A, L, S, t. y. raidę L. Raidėmis REBL prasideda tik — REBLAS ir REBLSA, taigi mūsų žodis — REBLAS.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Matome, kad spręsdami skaičių 537 išreiškėme faktorialų, padaugintų iš koeficientų, suma, ir koeficientai buvo ne didesni už faktorialo numerį, t. y.

$$537 = 4\cdot 5! + 2\cdot 4! + 1\cdot 3! + 1\cdot 2! + 1\cdot 1!.$$

Nesunku įrodyti, kad kiekvieną skaičių galima vieninteliu būdu išreikšti tokiu faktorialų dariniu. Įrodant praverčia gerai žinoma tapatybė

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

S13. Ⓒ $384\,\mathrm{dm}^2$

Kadangi nepasakyta, kokie yra išpjauto stačiakampio gretasienio matmenys, tai galime imti „patogiausią“ stačiakampį — kubą, kurio kraštinė yra lygi pusei pradinio kubo kraštinės. Pradinio kubo kraštinė $a^3 = 512\,\mathrm{dm}^3$, todėl $a = 8\,\mathrm{dm}$. Mažojo kubo kraštinė lygi $4\,\mathrm{dm}$. Naujojo kūno paviršių sudaro 3 kubo sienos po $64\,\mathrm{dm}^2$ ir 3 sienos, iš kurių išmesta po kvadratą $4\,\mathrm{dm} \times 4\,\mathrm{dm}$ ir dar trys mažojo kubo sienos. Taigi paviršiaus plotas lygus $3 \cdot 64 + 3 \cdot 48 + 3 \cdot 16 = 3 \cdot 64 + 3 \cdot 64 = 6 \cdot 64 = 384\,(\mathrm{dm}^2)$. Renkamės atsakymą **C**.

Žinoma, nesunku suvokti, kad taip skaičiuodami tris gretasienio sienas atmetame, po to vėl jas pridedame, ir tai teisinga bet kuriam stačiajam gretasieniui. Vadinasi, paviršiaus plotas nesikeičia ir lygus pradinio kubo paviršiaus plotui $6 \cdot 8^2 = 384\,(\mathrm{dm})^2$.

S14. Ⓒ Žr. uždavinio M20 sprendimą.

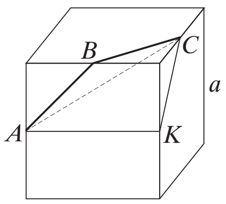
S15. Ⓓ 120°

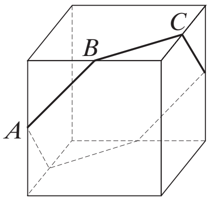
Nesunku kampą rasti, pavyzdžiui, iš $\triangle ABC$. Pagal Pitagoro teoremą $AB^2 = BC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$. Iš stačiojo $\triangle ACK$: $AC^2 = AK^2 + KC^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$. Pagal kosinusų teoremą

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B,$$

$$\frac{3a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2 \cos B, \qquad \cos B = -\frac{1}{2}, \qquad B = 120^\circ.$$

Teisingas atsakymas **D**.





Galima nesiremti kosinusų teorema, o nuleisti statmenį BD į AC. Bet dar gražesnis toks sprendimas. Jungdami toliau kubo briaunų vidurius, gauname taisyklingąjį šešiakampį. Kaip žinome, jo kampas lygus $180^\circ(6-2) : 6 = 120^\circ$.

S16. Ⓔ 5

Kadangi buvo 10 komandų, tai jos sužaidė $10 \cdot 9/2 = 45$ susitikimus. Jeigu visi susitikimai baigtųsi be lygiųjų, tai susitikimas „duotų“ 3 taškus (laimėjusiai komandai 3 taškus, pralaimėjusiai — 0) — iš viso 135 taškus. Lygiosios duoda 1 tašku mažiau (abiem komandoms po 1 tašką) — todėl 5 susitikimai turėjo baigtis lygiosiomis.
Teisingas atsakymas **E**.

Gali kilti pagrįstas klausimas — o ar galėjo taip būti? Todėl verta pateikti pavyzdį turnyro, kur taškų suma būtų 130.
Sakykime, kad paskutinė, 10-toji komanda sužaidė lygiosiomis su 9, 8, 7, 6, 5 komandomis, o likusieji susitikimai baigėsi „pagal rangą“ — mažesnį numerį turinti komanda laimėjo prieš turinčią didesnį numerį.
Tada I komanda laimėjo prieš likusias — 27 taškai, II komanda prieš tolesnes — 24 taškai, III prieš

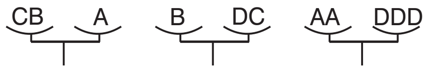
žemesnes — 21 taškas, IV prieš žemesnes — 18 taškų. V komanda laimėjo prieš VI–IX, bet sužaidė lygiomis su X komanda — $4 \cdot 3 + 1 = 13$ taškų. VI komanda surinko 3 taškais mažiau — 10 taškų, VII — surinko 7 taškus, VIII — 4 taškus, IX — 1 tašką, o X — 5 taškus (po vieną tašką iš 5 lygiųjų). Iš viso turime $27+24+21+18+13+10+7+4+1+5 = 4(27+1)+13+5 = 4\cdot 28+18 = 130$ taškų.

S17. Ⓒ 5

! Žinoma, lengva užrašyti lygčių sistemą

$$A = B + C,$$
$$B = C + D,$$
$$2A = 3D$$

ir ją „išspręsti“: pavyzdžiui, išsireiškę iš pirmųjų dviejų lygčių A ir D, iš trečios lygties turime $2(B + C) = 3(B - C)$, $B = 5C$.
Teisingas atsakymas **C**.



!! Galima sudėti lygybes $2B + 2C = 2A$, $3C + 3D = 3B$, $2A = 3D$. Iš karto gauname $B = 5C$.

S18. Ⓑ 73%

? Sakykime, kad savikaina buvo 100 litų. Įdiegus naujas technologijas ji tapo 50 litų. Sumažinus darbuotojų skaičių ji pasidarė $0{,}6 \cdot 50 = 30$ litų. Pagaliau patobulinus valdymą ji tapo $0{,}9 \cdot 30 = 27$ litai. Savikaina sumažėjo $100 - 27 = 73$ litais, o tai sudaro 73% pradinės savikainos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Sakykime, kad savikaina buvo A litų. Tada įdiegus naujas technologijas ji tapo $0{,}5A$ litų. Sumažinus darbuotojų skaičių, ji pasidarė $0{,}6 \cdot 0{,}5A = 0{,}3A$. Pagaliau patobulinus valdymą ji tapo $0{,}9 \cdot 0{,}3A = 0{,}27A$. Vadinasi, produkcijos savikaina sumažėjo $0{,}73A$ litų, ir tai sudaro 73% buvusios savikainos A.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Matome, kad sprendimas abiem atvejais lygiai toks pat. Tik ar turėjome teisę reikalauti, kad savikaina būtų 100 litų. Nelabai... Bet išeitis paprasta: užtenka pasakyti, kad savikaina buvo 100 (sąlyginių) vienetų — ir nė šuva nesulos.

S19. Ⓐ 100

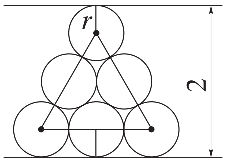
! Achilo greitis 10 m/s, o vėžlio — 0,1 m/s. Vadinasi, atstumas tarp Achilo ir vėžlio kas sekundę sutrumpėja $10 - 0{,}1 = 9{,}9$ (m). Todėl pasivyti Achilui prireiks $990 : 9{,}9 = 100$ sekundžių.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Vargu ar verta pradėti galvoti taip: kai Achilas įveiks 10 metrų, tai vėžlys nuropos 0,1 m, ir atstumas tarp jų taps $990 - 9{,}9 = 980{,}1$ (m). Kai Achilas įveiks dar 10 metrų, atstumas sumažės dar 9,9 m ir taps 970,2 m. Žinoma, dabar užtenka paklausti: o kiek gi kartų dar tilps į 970,2 m tie 9,9 m? Bet juk tai tas pats sprendimas — tik pavėluotas pora žingsnių.

S20. Ⓐ $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

? Iš paveikslėlio aišku, kad 6 spinduliai yra daugiau už 2, o 4 (ir netgi 5) spinduliai — mažiau už 2. Todėl 2 padalijęiš teisingo atsakymo, turime gauti skaičių iš intervalo (4; 6). Atsakymas **B** duoda dalmenį $1 + \sqrt{3} < 4$, **C** — dalmenį $2 + \sqrt{3} < 4$, **D** — dalmenį $4 + 2\sqrt{3} > 6$. O štai **A** duoda

dalmenį $2 + 2\sqrt{3} = 2 + \sqrt{12}$ — skaičių iš intervalo (5; 6).
Renkamės atsakymą **A**.



! Pažymėję apskritimo spindulį r, matome, kad apskritimų centrų linijų sudaryto lygiakraščio trikampio kraštinė lygi $4r$, todėl jo aukštinė lygi $4r \sin 60^\circ = 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Vadinasi, $2r + 2r\sqrt{3} = 2$, iš kur $r = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$.
Teisingas atsakymas **A**.

S21. Ⓒ Žr. uždavinio K27 sprendimą.

S22. Ⓔ 110

! Trikampis iš tų 5 tiesės taškų gali turėti 0, 1 arba 2 viršūnes. Jeigu jis viršūnių tarp jų neturi, tai tokių trikampių yra $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Jeigu trikampis turi iš jų 1 viršūnę, tai kitos 2 viršūnės gali būti pasirinktos $C_5^2 = 10$ būdų, o pirmoji — 5 būdais, ir pagal sandaugos taisyklę turime dar $10 \cdot 5 = 50$ trikampių. Pagaliau, jei dvi viršūnės imamos iš tų penkių, o trečia — iš likusių, tai gauname dar $C_5^2 \cdot 5 = 50$ trikampių. Iš viso gavome 110 trikampių.
Teisingas atsakymas **E**.

S23. Ⓑ 71

? Kadangi $2001 = 3 \cdot 667 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, tai aišku, kad rečiausiai pasitaikys reikalingas daugiklis 29, o iki 2001 skaičiaus 29 kartotinių yra 69. Kadangi $69 < 3 \cdot 29$, tai tarp jų yra tik du, į kuriuos įeina 29^2 — tai 29^2 ir $2 \cdot 29^2$. Vadinasi, į 2002! daugiklis 29 įeis $69 + 2 = 71$ kartą.
Renkamės atsakymą **B**.

! Nesunku ir tiksliai suskaičiuoti, kuriuo laipsniu į faktorialo 2002! skaidinį įeina 3 ir 23. Žinoma, užtenka įsitikinti, kad jų yra ne mažiau kaip 71. Bet nuo 1 iki 2001 yra 87 skaičiaus 23 kartotiniai ir $23 \cdot 29$ skaičiaus 3 kartotiniai.
Atsakymas **B** teisingas.

S24. Ⓑ 11 ir 17

? Tikrinkime atsakymus. 12 ir 18 netinka, nes 18 nėra daugiau kaip devyniskart daugiau už 2. 11 ir 17 tinka, nes visos trys sąlygos išpildytos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pasižymėkime skaičius x ir y. Tada $x + y > 27$, $x > 2(y - 12)$, $y > 9(x - 10)$, t. y.

$$x + y > 27,$$
$$x + 24 > 2y,$$
$$y + 90 > 9x.$$

Prie padvigubintos I nelygybės pridėję II, gauname $3x > 30$, t. y. $x > 10$. Prie II nelygybės pridėję padvigubintą III, gauname $204 > 17x$, t. y. $x < 12$.
Vadinasi, $x = 11$. Tada iš antros nelygybės $y < 18$, todėl $y = 17$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Tą patį galima gauti ir šiek tiek kitaip. Iš II ir III nelygybės $x > 2y - 24 > 2(9x - 90) - 24 = 18x - 204$, $17x < 204$, $x < 12$. Panašiai iš I ir II nelygybės $x > 2y - 24 > 2(27 - x) - 24 = 30 - 2x$,

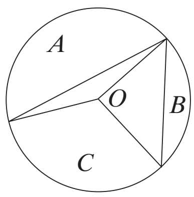
$3x > 30$, $x > 10$. Todėl $x = 11$ ir t. t. Žinoma, galima vertinti ir y. Iš II ir III nelygybės $y > 9x - 90 > 9(2y - 24) - 90 = 18y - 9 \cdot 34$, $17y < 9 \cdot 34$, $y < 18$, o iš I ir III nelygybės $y > 9x - 90 > 9(27 - y) - 90 = 9 \cdot 17 - 9y$, t. y. $10y > 153$, $y \geqslant 16$.
Tikrinkime $y = 16$. Tada iš nelygybių $x > 11$, $x > 8$ ir $9x < 96$, bet jos prieštaringos. Jeigu $y = 17$, tai iš nelygybių $x > 10$, $x > 10$ ir $9x < 107$ gauname $x = 11$. Vėl gavome tą patį atsakymą.

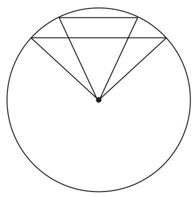
S25. Ⓒ 8

! Sakykime, kad turime trikampį, kurio viršūnės yra taisyklingojo dešimtkampio viršūnės. Kiekviena kraštinė jungia galus lankų, esančių trikampio išorėje, kuriuos sudaro vienas ar daugiau apskritimo dešimtadalių. Kadangi tų lankų suma lygi 10, tai turime sumas $8 + 1 + 1$, $7 + 2 + 1$, $6 + 3 + 1$, $6 + 2 + 2$, $5 + 4 + 1$, $5 + 3 + 2$, $4 + 4 + 2$, $4 + 3 + 3$. Jos ir atitinka 8 skirtingus trikampius.
Teisingas atsakymas **C**.

S26. Ⓑ $\frac{\pi}{3}$

? Skritulio plotas lygus π. Kadangi išpjova sprendžiant iš brėžinio lygi skritulio trečdaliui, tai jos plotas lygus $\frac{\pi}{3}$.
Renkamės atsakymą **B**.





! Pažymėkime nuopjovos lanko didumą radianais φ. Tada išpjovos su tuo lanku plotas lygus $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\varphi}{2}$, o trikampio plotas $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\varphi$, taigi nuopjovos plotas $\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi}{2}$. Nesunku atspėti, kad nuopjovos B kampas $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Toks kampas φ tikrai duoda nuopjovos plotą $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Panašiai nuopjovos A kampas $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, nes toks kampas duoda nuopjovos plotą

$$\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{4}.$$

Vadinasi, išpjovai C lieka kampas $2\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{12-1-3}{12}\pi = \frac{2\pi}{3}$, todėl jos plotas lygus $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3}$.

!! Sprendime liko neaiški vieta: ar nuopjovos plotas vienareikšmiškai nustato jos kampą? O gal dvi skirtingų kampų nuopjovos duos tą patį plotą? Geometriškai tai akivaizdu (žr. dešinį brėžinį). Bet dar paprasčiau taikyti išvestinę: kampams $0 < \varphi < \pi$ turime $S(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi$, $S'(\varphi) = = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$. Vadinasi, kampui didėjant didėja ir nuopjovos plotas.

S27. Ⓑ 2 005 003

! Skaičiaus 10^{2002} užraše yra vienetas ir 2002 nuliai, bet jo skaitmenų suma lygi 1, todėl mus domina tik 1-ženkliai, 2-ženkliai, ..., 2002-ženkliai skaičiai.
Jeigu pirmas skaitmuo 2, tai prie jo galima prirašyti 0, 1, 2, ..., 2001 nulį — iš viso 2002 skaičiai.
Dar skaičius gali prasidėti 1. Suskaičiuokime, kiek yra tokių norimų skaičių.
Skaičius gali turėti dar vieną skaitmenį — tokių skaičių 1, būtent 11.
Skaičius gali turėti dar du skaitmenis — jų 2, būtent 110 ir 101.
Skaičius gali turėti dar 3 skaitmenis — jų 3, vienetą galima rašyti 3 vietose.
. . . .
Skaičius gali turėti dar 2001 skaitmenį — jų yra 2001.

Gavome $1 + 2 + \cdots + 2001$ vienetu prasidedančių skaičių.
Vadinasi, iš viso norimų skaičių yra

$$1 + 2 + \cdots + 2001 + 2002 = \frac{2003 \cdot 2002}{2} = 2003 \cdot 1001 = 2\,005\,003.$$

Teisingas atsakymas **B**.

S28. Ⓒ 7

? Pradėkime nuo vidurio. Imdami 7 litrus, gauname koncentraciją $\frac{14 \cdot 18 + 7 \cdot 90}{21} = 2 \cdot 6 + 30 = 42$.
Renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, gautas atsakymas vienintelis. Sudarykime lygtį jam gauti. Pažymėkime keičiamą kiekį x litrų. Tada naujoji koncentracija bus $\frac{(21-x)18 + x \cdot 90}{21} = 42$. Todėl

$$\begin{aligned}
&21 \cdot 18 + 72x = 42 \cdot 21,\\
&7 \cdot 9 + 12x = 7 \cdot 21,\\
&12x = 7 \cdot 12,\\
&x = 7.
\end{aligned}$$

Taigi reikia 90% rūgšties tirpalu pakeisti $7\,\ell$ esamo skysčio.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima apsieiti ir be lygties. Iš pradžių tirpale yra $21 \cdot 0{,}18\,\ell$ grynos skruzdžių rūgšties, po pakeitimo — $21 \cdot 0{,}42\,\ell$. Vadinasi, grynos rūgšties turi padaugėti $21 \cdot 0{,}24\,\ell$. Pakeitus $1\,\ell$, grynos rūgšties padaugėja $0{,}90 - 0{,}18 = 0{,}72\,\ell$. Todėl pakeisti reikia $21 \cdot 0{,}24 : 0{,}72 = 21 : 3 = 7\,(\ell)$ skysčio.

S29. Ⓐ $\frac{19}{10}$

? Pabandome parinkti sąlygą tenkinantį trejetą. Tai greitai pavyksta: $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ — iš tikrųjų, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$. Tada ieškomasis skaičius lygus $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{1+8}{6} + \frac{2}{5} = \frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{19}{10}$.
Renkamės atsakymą **A**.

! Nesunku suskaičiuoti norimą sumą S bendru atveju:

$$\begin{aligned}
S + 3 &= \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} =\\
&= (a+b+c)\Big(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\Big) = 7 \cdot \frac{7}{10},
\end{aligned}$$

todėl $S = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10}$.
Atsakymas **A** teisingas visada.

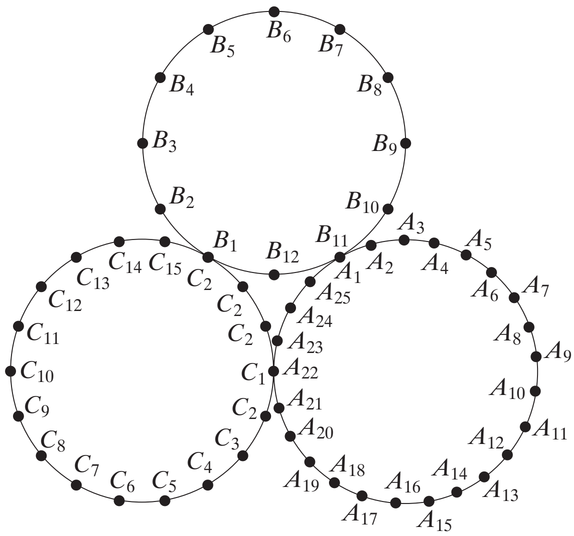
!! Galima veikti ir atvirkščiai. Sudauginę duotąsias lygybes, gauname

$$\begin{aligned}
\frac{49}{10} &= \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} =\\
&= 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} =\\
&= 3 + S,
\end{aligned}$$

todėl $S = \frac{19}{10}$.

S30. Ⓑ 6

? Iš A_1 galima pasiekti A_3, A_5, …, A_{25}, A_2, A_4, …, A_{24}, A_1 — vadinasi, visus apskritimo A taškus. Perėjus iš A_1 į apskritimą B galima pasiekti B_1, B_3, …, B_{11}, B_1. Iš B_1 galima patekti į apskritimą C — į C_{18}, C_2, C_4, …, C_{16}, C_{18}. Bet iš A_{22} taip pat galima patekti į C_3, C_5, …, C_{17}, C_1. Vadinasi, iš A_1 galima patekti į visus taškus, išskyrus B_2, B_4, …, B_{12}.
Renkamės atsakymą **B**.



! Iš pateikto sprendimo **?** jau aišku, kad į B_2, B_4, …, B_{12} patekti negalima. Įrodysime tai kiek griežčiau. Tarkime, kad mes radome kelią iš A_1 į B_{2k}. Tada yra ir kelias iš B_{2k} į A_1. Bet jeigu patekome į tašką B su lyginiu numeriu, tai mes visą laiką ir suksimės B taškuose su lyginiais numeriais, o pereiti į apskritimą A ir C negalėsime — tai galima padaryti tik iš „nelyginių“ taškų B_1 ir B_{11}.
Teisingas atsakymas **B**.