JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. C 54°

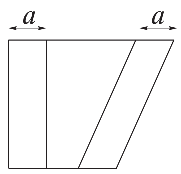
! Aišku, kad kampo didumas ir porcijos didumas proporcingi. Kadangi porcija sudaro $\frac{15}{100} = \frac{30}{2\cdot 100} = \frac{3}{20}$ torto, tai ir kampas sudaro $\frac{3}{20}$ pilnojo kampo, ir yra lygus $\frac{3}{20} \cdot 360^\circ = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$.
Teisingas atsakymas **C**.

J2. B 16

Žr. uždavinio K7 sprendimą.

J3. A Visų juostų plotas toks pat

? Išveskime tiesę per 3 juostos lūžio taškus, lygiagrečią duotosioms. Tada aišku, kad figūros 2 ir 3 sudėtos iš lygių lygiagretainių, taigi jų plotai lygūs. Vadinasi atsakymai **C** ir **D** netinka, **E** — nepanašus į teisybę, o 1 juostos plotas „iš akies“ nebent mažesnis.
Renkamės atsakymą **A**.



! Paprasta įrodyti, kad 1 ir 2 juostos viršutinės (taip pat ir apatinės) dalys lygiaplotės (žr. paveikslą). Kadangi „kairiąją“ trapeciją pastūmę per a į dešinę gauname „dešiniąją“ trapeciją, tai jų plotai lygūs. Bet atmetę trapecijų bendrąją dalį — „vidurinę“ trapeciją taip pat gausime lygius plotus, o tai ir yra juostų viršutinių dalių plotai.
Žinoma, galima remtis lygiagretainio ir stačiakampio ploto formulėmis, bet tai nelabai įdomu.
Teisingas atsakymas **A**.

J4. E $2n^2 + 2003$

? Imkime $n = 0$, tada skaičiai **A**, **C**, **D** lyginiai, ir šie atsakymai atkrenta. Imkime $n = 1$, tada atkrenta ir atsakymas **B**.
Renkamės atsakymą **E**.

! Atsakymas **E** visada teisingas — juk lyginio ($2n^2$) ir nelyginio (2003) skaičių suma visada nelyginė.
Teisingas tik atsakymas **E**.

J5. D Statusis

! Pažymėkime kampo A didumą α, tada $\angle B = 2\alpha$, $\angle C = 3\alpha$. Trikampio kampų suma lygi 180°, todėl $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 30^\circ$. Vadinasi, $\angle C = 90^\circ$, ir trikampis ABC yra statusis.
Teisingas atsakymas **D**.

J6. D $\frac{5}{7}$

! Apgaulingas uždavinys: svarbiausia susivokti, kad dainos atlikimo laikas — tai nuo pirmo dainininko dainavimo pradžios iki trečio dainininko dainavimo pabaigos.
Sakykime, kad kiekvienas dainininkas vieną eilutę dainuoja laiką T, taigi visą dainą jis dainuoja laiką $12T$. Antras dainininkas įstoja po T, trečias — po $2T$, vadinasi, kartu jie visi dainuoja $10T$. Bet kadangi trečias įstoja po $2T$, tai daina skambės $12T + 2T = 14T$. Vadinasi, kartu dainininkai dainuoja $\frac{10T}{14T} = \frac{5}{7}$ dainos atlikimo laiko dalis.
Teisingas atsakymas **D**.

J7. (B) 10 015

Nesunku rasti skaičiaus $2003 \cdot a = 2003 \cdot \underbrace{11...1}_{2003}$ dešimtainę išraišką:

$$2003 \cdot \underbrace{11...1}_{2003} = 2000 \cdot \underbrace{11...1}_{2003} + 3 \cdot \underbrace{11...1}_{2003} = \underbrace{22...2}_{2003}000 + \underbrace{33...3}_{2003} = 222\underbrace{55...5}_{2000}333.$$

Todėl ieškomoji skaitmenų suma lygi $2 \cdot 3 + 5 \cdot 2000 + 3 \cdot 3 = 15 + 10\,000 = 10\,015$.
Teisingas atsakymas **B**.

J8. (C) $a + 2b$

Žr. uždavinio K4 sprendimą.

J9. (C) 3

Funkcija $f(x) = 0$ tenkina duotąją funkcinę lygtį, nes kairioji pusė lygi 0, o dešinioji — taip pat: $f^2(x) + f^2(y) = 0^2 + 0^2 = 0$.
Funkcija $f(x) = \frac{1}{2}$ taip pat tenkina lygtį — kairioji pusė lygi $\frac{1}{2}$, o dešinioji $f^2(x) + f^2(y) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.
Funkcija $f(x) = 1$ lygties netenkina, nes kairioji pusė lygi 1, o dešinioji $1^2 + 1^2 = 2$.
Funkcija $f(x) = x$ lygtį tenkina, nes kairioji pusė lygi $f(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$, o dešinioji — taip pat: $f^2(x) + f^2(y) = x^2 + y^2$.
Funkcija $f(x) = -x$ lygties netenkina, nes kairioji pusė $f(x^2+y^2) = -(x^2+y^2)$. Šie du reiškiniai „kartais“ lygūs (kai $x = y = 0$), o „kartais“ nelygūs (visais kitais atvejais). Bet funkcija tenkina lygtį tik tada, kai lygybė teisinga su visais x ir y.
Taigi iš duotųjų 5 funkcijų lygtį tenkina trys.

Teisingas atsakymas **C**.

Įdomu būtų išspręsti duotąją funkcinę lygtį — t. y. rasti visas funkcijas, tenkinančias duotąją lygtį. Pasirodo, tai sudėtingas uždavinys, o tokių funkcijų yra be galo daug.
Taigi spręskime tokį uždavinį.

Rasti visas funkcijas $f(x)$, kurios visiems x ir y tenkina lygtį

$$f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y). \tag{1}$$

Sprendimas. Iš pradžių nagrinėkime tik neneigiamus x ir y. Imkime (1) lygybėje $x = y \to \sqrt{\frac{x}{2}}$, tada gauname $f(x) = 2f^2\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \geqslant 0$, o tai reiškia, kad mūsų funkcija įgyja tik neneigiamas reikšmes.
Dabar lygybėje (1) imkime $x = y = 0$. Tada $f(0) = 2f^2(0)$, taigi turime du atvejus:
1) $f(0) = 0$ ir 2) $f(0) = \frac{1}{2}$.
1) *atvejis*, $f(0) = 0$. Paėmę (1) lygybėje $y = 0$, gauname

$$f(x^2) = f^2(x), \tag{2}$$

todėl $f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2)$. Pakeitę šioje lygybėje x į $\sqrt{x}$, y į $\sqrt{y}$ gauname, kad su visais $x, y \geqslant 0$ teisinga lygybė

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{3}$$

Kadangi $f(y) \geqslant 0$, tai lygybė (3) duoda

$$f(x + y) \geqslant f(x),$$

o tai reiškia, kad funkcija f didėja (plačiąja prasme) neneigiamiems x, t. y. $f(x) \leqslant f(y)$, jei tik $0 \leqslant x < y$.

Imkime (2) lygybėje $x = 1$. Tada $f(1) = f^2(1)$, todėl arba $f(1) = 0$, arba $f(1) = 1$.
Jeigu $f(1) = 0$, tai iš (3) lygybės $f(2) = 0$, tada $f(4) = 2f(2) = 0$, $f(8) = 0$, ..., $f(2^n) = 0$, ..., o kadangi $f(x)$ didėjanti, tai $f(x) = 0$ su visais x. Jau žinome, kad ši funkcija tenkina (1) lygtį.
Tegu dabar $f(1) = 1$. Kadangi iš (3) lygybės $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x + x) = 3f(x)$ ir t. t., tai $f(nx) = nf(x)$. Paėmę čia $x = 1$, gauname $f(n) = n$, o paėmę $x = \frac{1}{n}$, gauname $1 = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, t. y. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Pagaliau paėmę $x = \frac{m}{n}$, turime $f(m) = nf\left(\frac{m}{n}\right)$, t. y. $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$. Įrodėme, kad $f(r) = r$ visiems racionaliems $r \geqslant 0$.
Bet mūsų funkcija didėja, todėl nesunku įrodyti, kad $f(x) = x$ visiems $x \geqslant 0$. Iš tikrųjų, tarkime, kad kuriame nors taške $f(x) < x$. Tarp šių nelygių skaičių įstatykime racionalųjį skaičių r, $f(x) < r < x$. Kadangi $f(x)$ didėja, tai $f(r) \leqslant f(x)$, o kadangi r racionalus, tai paskutinė nelygybė reiškia, kad $r \leqslant f(x)$. Prieštara. Lygiai taip pat negali būti $f(x) > x$. Vadinasi, $f(x) = x$. Jau matėme, kad ši funkcija tenkina lygtį (1). Gavome antrą sprendinį. 1) atvejis išnagrinėtas.
2) *atvejis*, $f(0) = \frac{1}{2}$. Iš lygybės (1) su $y = 0$ gauname

$$f(x^2) = f^2(x) + \frac{1}{4}, \tag{4}$$

o tai be kita ko reiškia, kad $f(x^2) \geqslant \frac{1}{4}$, t. y. $f(x) \geqslant \frac{1}{4}$.
Imdami (1) lygybėje $x = y = \frac{1}{2}$ turime $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f^2\left(\frac{1}{2}\right)$, ir kadangi $f(x) \geqslant \frac{1}{4} \neq 0$, tai $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
Remiantis (4) lygybe $f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y) = f(x^2) - \frac{1}{4} + f(y^2) - \frac{1}{4} = f(x^2) + f(y^2) - \frac{1}{2}$, o tai reiškia, kad

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Imdami $y = x$ įsitikiname, kad jeigu $f(x) = \frac{1}{2}$, tai $f(2x) = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = f(2) = \ldots = f(2^n) = \ldots = \frac{1}{2}$. Lygiai taip pat imdami (5) lygybėje $\frac{x}{2}$ vietoj x ir y, gauname $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}$, o tai reiškia, jog jeigu $f(x) = \frac{1}{2}$, tai ir $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \ldots = f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \ldots = \frac{1}{2}$.
Jeigu žinotume, kad $f(x)$ didėja, tai iš karto būtų aišku, jog $f(x) \equiv \frac{1}{2}$. Dabar tenka elgtis kitaip. Apskaičiuokime $f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$ dviem būdais — vieną kartą taikydami (5), po to (4), kitą kartą — atvirkščiai:

$$f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = f\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = f(x^2) + f\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2},$$
$$f\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = f^2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \left(f(x) + f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = f^2(x) + \frac{1}{4} = f(x^2).$$

Sulyginę pastarųjų lygybių dešiniąsias puses, turime $f\left(x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, arba $f(x) + f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, t. y. $f(x) = \frac{1}{2}$ su visais $x \geqslant 0$. 2) atvejis išnagrinėtas.
Taigi jeigu $f(x)$ tenkina lygtį (1), tai neneigiamiesiems x arba $f(x) = 0$, arba $f(x) = \frac{1}{2}$, arba $f(x) = x$. (Vadinasi, jeigu ieškotume funkcijų, apibrėžtų tik su neneigiamais x, tai šitos trys ir būtų funkcinės lygties (1) sprendiniai.)
Nagrinėkime neigiamus argumentus. Imkime $x > 0$ ir raskime $f(-x)$. Iš (1) lygybės $f^2(-x) = f((-x)^2 + y^2) - f^2(y) = f(x^2 + y^2) - f^2(y) = f^2(x)$. t. y. $f(-x) = \pm f(x)$. Tai reiškia, kad vienuose taškuose $f(-x) = -f(x)$, o kituose $f(-x) = f(x)$, ir tokių funkcijų yra be galo daug. Beje, tą sąlygą trumpai galima užrašyti taip: $|f(-x)| = f(x)$, kai $x > 0$. Taigi gavome funkciją $f(x) \equiv 0$, funkcijų šeimą $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ \pm x, & x < 0, \end{cases}$ ir funkcijų šeimą $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geqslant 0, \\ \pm\frac{1}{2}, & x < 0. \end{cases}$

Patikrinti, kad visos gautosios funkcijos tenkina lygtį (1), paprasta. Pavyzdžiui, imkime funkcijas $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ \pm x, & x < 0. \end{cases}$ Kadangi argumentas $x^2 + y^2$ visada teigiamas, tai kairė lygties (1) pusė lygi $x^2 + y^2$. Bet tokia pat ir dešinė pusė, kadangi visos funkcijos reikšmės yra x arba $-x$, ir $(\pm x)^2 + (\pm y)^2 = x^2 + y^2$.
Funkcinė lygtis (1) išspręsta.

J10. (D) 8

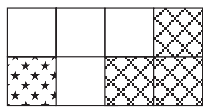
! Pradėti galima nuo Z: kadangi $\overline{ZYX} = \overline{XX} + \overline{YY} + \overline{ZZ} < 100 + 100 + 100 = 300$, tai lygybėje $\overline{XX} + \overline{YY} + \overline{ZZ} = \overline{ZYX}$ galėtų Z būti 1 arba 2. Bet $Z = 2$ būti negali — pagal paskutinius skaitmenis turėtume $Y = 8$, ir gautume $\overline{XX} + 88 + 22 = \overline{28X}$, o tai neįmanoma, nes $X + 2 + 1$ į sumos šimtus gali atnešti tik 1. Vadinasi, $Z = 1$, tada pagal paskutinius skaitmenis $Y = 9$, ir turime $\overline{XX} + 99 + 11 = \overline{18X}$, o tada aišku, kad $X = 8$ (ir viskas išeina: $88 + 99 + 11 = 198$).
Teisingas atsakymas **D**.

!! Iš vienetų stulpelio aišku, kad $Y + Z = 10$. Vadinasi, į antrą stulpelį persikelia 1. Bet $X + Z + 1$ gali būti tik 10, į pirmą stulpelį persikelia 1, t. y. $Z = 1$, tada $X = 8$.

J11. (B) 3
Žr. uždavinio B30 sprendimą.

J12. (C)

! Įsivaizduokime, kad nuėmėme viršutinį sluoksnį, o į apatinį žiūrime iš viršaus. Pilkoji detalė jame kubelių neturi. Sužymėkime žvaigždėtos ir subrūkšniuotos detalių kubelius, priklausančius apatiniam sluoksniui. Liko keturi kubeliai — tai ir yra išimtosios detalės kubeliai. Matome, kad tai detalė **C**.
Teisingas atsakymas **C**.



J13. (B) 75

? Galima tikrinti atsakymus, nors tai ir prastas būdas — geriau skaičiuoti.
Imkime atsakymą **C**, t. y. sakykime, kad pilna statinė yra 90 litrų. Tada jos 70% yra $\frac{7}{10} \cdot 90\,\ell$, o jos 30% yra $\frac{3}{10} \cdot 90\,\ell$. Skirtumas lygus $\frac{4}{10} \cdot 90 = 36\,\ell$, o tai truputį per daug. Tikriname atsakymą **B**. Pilna statinė yra $75\,\ell$, jos 70% yra $\frac{7}{10} \cdot 75\,\ell$, o jos 30% yra $\frac{3}{10} \cdot 75\,\ell$. Skirtumas $\frac{4}{10} \cdot 75 = 30\,\ell$, kaip ir turi būti.
Renkamės atsakymą **B**.

! Mums nebekyla jokių abejonių, kad atsakymas **B** teisingas: jaučiame, kad didėjant statinės talpai didėja ir skirtumas. Bet paprasčiausia — skaičiuoti.
Kai iš statinės nupilta 30% vandens, tai joje yra 70% vandens. Todėl $30\,\ell$ sudaro $70 - 30 = 40\%$ pilnos statinės. Vadinasi, 4% statinės — tai $3\,\ell$, o 100% — tai 75 litrai.
Teisingas atsakymas **B**.

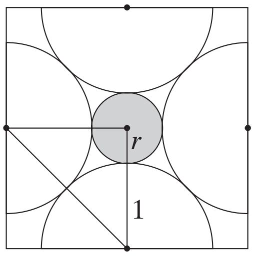
J14. (C) 856

! Raskime didžiausią įmanomą triženklį skaičių, kuris gaunamas iš 888 pakeitus du skaitmenis ir kuris dalijasi iš 8. Aišku, kad vienas jo skaitmuo yra 8. Kadangi 1000 dalijasi iš 8, tai didžiausi dalūs iš 8 triženkliai skaičiai yra 992, 984, … . Matome, kad jau 984 tinka — turi skaitmenį 8.
Panašiai randame mažiausią tokį skaičių. Kadangi 100 nesidalija iš 8, tai 104 dalijasi, ir dalijasi skaičiai 104, 112, 120, 128, … . Vadinasi, mažiausias reikiamas skaičius yra 128. Todėl ieškomas skirtumas yra $984 - 128 = 856$.
Teisingas atsakymas **C**.

J15. Ⓓ 64
Žr. uždavinio K24 sprendimą.

J16. Ⓓ 1002
! Atlikę skliaustuose sudėtį, gauname, kad duotoji sandauga lygi $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2003}{2002}\cdot\frac{2004}{2003}$. Matome, kad kiekvienos (išskyrus paskutinę) trupmenos skaitiklis lygus po jos einančios trupmenos vardikliui. Todėl suprastinę gauname $\frac{2004}{2}=1002$.
Teisingas atsakymas **D**.

J17. Ⓐ $\sqrt{2}-1$
! Pasižymėję mažojo apskritimo spindulį r, pagal Pitagoro teoremą turime $(1+r)^2+(1+r)^2=(1+1)^2$, t. y. $2(1+r)^2=4$, $(1+r)^2=2$, $1+r=\sqrt{2}$, $r=\sqrt{2}-1$.



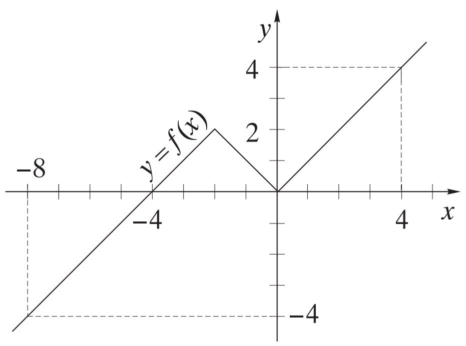
Teisingas atsakymas **A.**

J18. Ⓔ 15 555
! Kiekvienas iš tų skaičių prasideda arba 2, arba 3. Skaitmeniu 2 prasideda trys skaičiai — 2003, 2030 ir 2300. Skaitmeniu 3 taip pat prasideda trys skaičiai — 3002, 3020 ir 3200. Jų suma lygi $2003+2030+2300+3002+3020+3200=15\,555$.
Teisingas atsakymas **E**.

J19. Ⓔ 2^{34}
! Pagal sąlygą $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=a_1:a_2=1:2=2^{-1}$, $a_4=a_2:a_3=2:2^{-1}=2^2$, $a_5=a_3:a_4=2^{-1}:2^2=2^{-3}$, $a_6=a_4:a_5=2^2:2^{-3}=2^5$, $a_7=a_5:a_6=2^{-3}:2^5=2^{-8}$, $a_8=a_6:a_7=2^5:2^{-8}=2^{13}$, $a_9=a_7:a_8=2^{-8}:2^{13}=2^{-21}$.
Todėl $a_{10}=a_8:a_9=2^{13}:2^{-21}=2^{34}$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Beje, matematinės indukcijos metodu lengva įrodyti, kad $a_n=2^{(-1)^n F_{n-2}}$, kur F_k — k-tasis Fibonačio skaičius ($F_0=F_1=1$, $F_2=2$, $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$, kai $k\geqslant 3$).

J20. Ⓒ -12; -8; -4; 0
? Iš grafiko $f(-4)=0$, $f(0)=0$. Pratęsę pustieses iki tiesių matome, kad $f(x)=x+4$, kai $x<-4$. Dabar aišku, kad reikia imti taškus $0, -4, -8, -12, -16$.
Kadangi $f(0)=0$, tai ir $f(f(0))=f(0)=0$, ir $f(f(f(0)))=0$.
Kadangi $f(-4)=0$, tai ir $f(f(-4))=f(0)=0$, ir $f(f(f(-4)))=0$.
Kadangi $f(-8)=-4$, tai ir $f(f(f(-8)))=f(f(-4))=0$.
Kadangi $f(-12)=-8$, tai ir $f(f(f(-12)))=f(f(-8))=f(-4)=0$. Vadinasi atsakymai **A**, **B** ir **E** netinka.
Kadangi $f(-16)=-12$, tai $f(f(f(-16)))=f(f(-12))=f(-8)=-4\neq 0$. Vadinasi, atsakymas **D** netinka, ir lieka tik atsakymas **C**.
Renkamės atsakymą **C**.



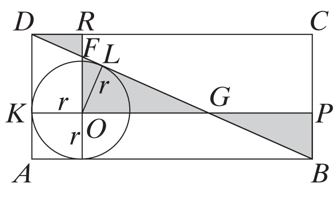
! Vėl spėjimas **?** buvo labai artimas sprendimui. Kadangi $f(x)$ turi tik du nulius, $f(-4) = f(0) = 0$, tai $f(f(x))$ gali būti lygi nuliui tada ir tik tada, kai $f(x) = -4$ arba $f(x) = 0$, t. y. kai $x = -8$, $x = -4$ ir $x = 0$. Todėl $f(f(f(x)))$ gali būti lygi nuliui tada ir tik tada, kai $f(f(x)) = -4$ arba $f(f(x)) = 0$, t. y. kai $f(x) = -8$, $f(x) = -4$ arba $f(x) = 0$, t. y. kai $x = -12$, $x = -8$, $x = -4$ ir $x = 0$.
Teisingas atsakymas **C**.

J21. Ⓐ $\frac{9}{4}$

! Kadangi $\triangle ADE$ ir $\triangle ADC$ turi bendrą aukštinę iš viršūnės D, tai jų plotų santykis lygus pagrindų santykiui $\frac{15}{24}$. Kadangi $\triangle ADC$ ir $\triangle ABC$ turi bendrą aukštinę iš viršūnės C, tai jų plotų santykis lygus $\frac{36}{10}$. Todėl $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{15}{24} \cdot \frac{36}{10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$.
Teisingas atsakymas **A**.

J22. Ⓒ 18

! Taškus, kuriuose įstrižainė DB kerta stačiakampio $OPCR$ kraštines, pažymėkime F ir G. Apskritimo centrą O sujunkime su lietimosi taškais K, L ir M, o spindulį pažymėkime r (žr. brėžinį). Kadangi $OKDR$ stačiakampis, tai $DR = KO = r = OL$, vadinasi, statieji trikampiai DRF ir OLF lygūs. Analogiškai lygūs ir trikampiai LGO ir GPB. Todėl stačiakampio $OPCR$ plotas lygus trikampio BCD plotui, t. y. pusei stačiakampio $ABCD$ ploto. Taigi ieškomasis plotas lygus $36 : 2 = 18$.
Teisingas atsakymas **C**.



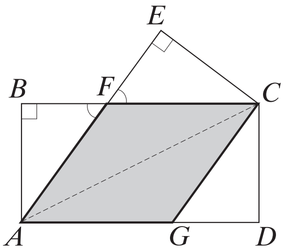
!! Stačiakampio $OPCR$ plotą galima apskaičiuoti remiantis į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio formule $r = (a + b - c)/2$. Jeigu a ir b stačiakampio $ABCD$ kraštinės (pagal sąlygą $ab = 36$), o r — į trikampį ABD įbrėžto apskritimo spindulys, tai stačiakampio $OPCR$ kraštinės lygios $a - r$ ir $b - r$. Todėl jeigu $c = BD$, tai stačiakampio $OPCR$ plotas lygus $(a - r)(b - r) = (a - \frac{a+b-c}{2})(b - \frac{a+b-c}{2}) = \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{b-a+c}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2-(a^2+b^2-2ab)}{4} = \frac{ab}{2} = \frac{36}{2} = 18$.

J23. B 1

Kadangi K ir L prieštarauja vienas kitam, tai abu jie sakyti teisybės negali (bet gali abu meluoti). Vadinasi vaikas N neabejotinai meluoja.
Jeigu K ir L abu meluoja, tai vaikas M sako teisybę, ir šiuo atveju iš vaikų lygiai vienas sako teisybę — būtent M.
Jeigu iš vaikų K ir L vienas sako teisybę, tai M meluoja. Vadinasi, ir šiuo atveju vienas sako teisybę.
Teisingas atsakymas **B**.

J24. C 7,5

Pažymėkime taškus, kaip parodyta brėžinyje. Kadangi $\triangle CDG = \triangle CEF$ (tai tas pats trikampis — prieš nukerpant ir po to), tai $\angle CEF = 90°$.



Statieji trikampiai CEF ir ABF lygūs. Pažymėję $CF = x$, gauname $BF = 12 - x$, $AF = x$. Iš $\triangle ABF$ pagal Pitagoro teoremą $x^2 = (12 - x)^2 + 6^2$, $24x = 180$, taigi $x = 7{,}5$.
Teisingas atsakymas **C**.

J25. B 1

Išskiriame pilnąjį kvadratą: $x^2 + 2xy + y^2 = xy$, $x^2 + xy + y^2 = 0$, $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$, $(2x + y)^2 + 3y^2 = 0$. Kadangi abu dėmenys neneigiami, tai abu jie lygūs nuliui, $y = 0$, o tada ir $x = 0$.
Teisingas atsakymas **B**.

J26. D 8

Kadangi 5 imti negalima, tai pradėkime nuo 6. Skaičių 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 skaitmenų sumos lygios 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4. Išrašinėkime skaičius, kurių skaitmenų sumos dalijasi iš 5: 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 46, 50, 55, 64, 69 ir t. t. Matome, kad didžiausia norimų skaičių atkarpa yra nuo 56 iki 63, kurie duoda sumas 11, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 9. Spėjame, kad daugiau kaip 8 tokių iš eilės einančių skaičių nebūna.
Renkamės atsakymą **D**.

Įrodysime, kad tarp bet kurių 9 iš eilės einančių skaičių bus skaičius, kurio skaitmenų suma dalijasi iš 5. Iš tikrųjų, jeigu tarp tų 9 skaičių nėra skaičiaus, kuris baigiasi nuliu, tai tų skaičių skaitmenų sumos taip pat sudaro devynių paeiliui einančių skaičių aibę, todėl tarp jų yra suma, kuri dalijasi iš 5.
Liko išnagrinėti atvejį, kai tarp devynių skaičių yra skaičius, kuris baigiasi 0. Tada tas skaičius yra arba tarp pirmų penkių, arba tarp paskutinių penkių iš mūsų devynetuko. Pirmu atveju paskutinių penkių, o antru atveju — pirmųjų penkių skaičių sumos sudaro aibę iš 5 iš eilės einančių skaičių, taigi tarp jų yra suma, kuri dalijasi iš 5.
O štai aštuonių iš eilės einančių skaičių skaitmenų sumos gali nesidalyti iš 5. Jau matėme, kad tokie, pavyzdžiui, yra skaičiai 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.
Teisingas atsakymas **D**.

J27. Ⓒ Yra trys paeiliui stovinčios matematikos knygos
Žr. uždavinio K25 sprendimą.

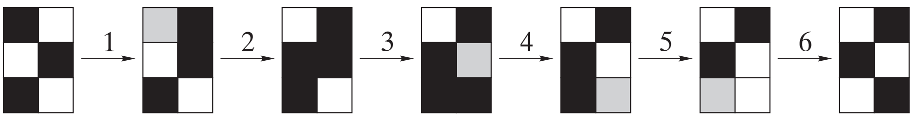
J28. Ⓒ 22

? Imame 1, 4 ir pridedame trečią skaičių — gauname sumas $1 + 4 + 7 = 12$, $1 + 4 + 10 = 15$, $1+4+13 = 18$, $1+4+16 = 21$, $1+4+19 = 24$, $1+4+22 = 27$, $1+4+25 = 30$, $1+4+28 = 33$. Imkime didžiausius du skaičius — gauname sumas $25 + 28 + 22 = 75$, $25 + 28 + 19 = 72$, $25 + 28 + 16 = 69$, $25 + 28 + 13 = 66$, $25 + 28 + 10 = 63$, $25 + 28 + 7 = 60$, $25 + 28 + 4 = 57$, $25 + 28 + 1 = 54$. Imkime vidurinius skaičius 13 ir 16 — gauname sumas $13 + 16 + 7 = 36$, $13 + 16 + 10 = 39$, $13 + 16 + 19 = 48$, $13 + 16 + 22 = 51$. Nesunku gauti ir trūkstamas sumas, dalias iš 3, būtent 42 ir 45 — imame mažiausią ir didžiausią dėmenis, o tada $1 + 28 + 13 = 42$, $1 + 28 + 16 = 45$. Gavome visus skaičius nuo $12 = 3 \cdot 4$ iki $75 = 3 \cdot 25$, dalius iš 3. Jų yra tiek pat, kiek yra skaičių nuo 4 iki 25, t. y. tiek pat, kiek nuo 1 iki 22 (atmetėme po 3), t. y. 22.
Renkamės atsakymą **C**.

! Spėjimą **?** labai nesunku padaryti griežtą. Jeigu iš visų skaičių atmesime po 1, tai skirtingų sumų bus tiek pat, tik jos bus trejetu mažesnės. Jeigu skaičius 0, 3, ..., 27 pakeisime triskart mažesniais, tai vėl sumų bus tiek pat, tik jos bus triskart mažesnės, o skaičiai bus 0, 1, ..., 9. Mažiausia įmanoma suma yra $0+1+2 = 3$, didžiausia $9+8+7 = 24$, o visas tarpines sumas gauti paprasta — užtenka imti iš pradžių 0 ir 1 ir pridėti po vieną iš likusių skaičių — gauname sumas nuo 3 iki 10. Tada imame 9 ir 8 ir pridedame po vieną iš likusių — gauname sumas nuo 24 iki 17. Pagaliau prie $0+9$ pridedame dėmenį nuo 2 iki 8 — gauname sumas nuo 11 iki 17. Taigi iš skaičių 0, 1, ..., 9 gavome visas sumas nuo 3 iki 24, t. y. 22 sumas. Tiek pat sumų galima sudaryti ir iš pradinių skaičių.
Teisingas atsakymas **C**.

J29. Ⓒ 6

! Kiekvienas iš juodų kvadratėlių turi tapti baltu. Kad kvadratėlis iš juodo pasidarytų baltu, pagal sąlygą reikia ne mažiau kaip 2 ėjimų (nes prieš tai jis turi tapti žaliu). Kadangi juodų kvadratėlių yra 3, ir jokie du iš jų negali pakeisti spalvos tuo pačiu ėjimu (nes jokie du iš jų nėra gretimi), tai prireiks ne mažiau kaip $2 \cdot 3 = 6$ ėjimų.
Šešių ėjimų užtenka — tai rodo pavyzdys.



Teisingas atsakymas **C**.

J30. Ⓒ 80

! Skaičiuje gali būti nuo 1 iki 5 vienetų (skaičius negali būti 00 000). Jei yra 1 vienetas, tai jis gali stovėti vienoje iš 5 vietų (nuliai mums netrukdo — tiesiog, pavyzdžiui, laikysime, kad skaičius 00 010 yra dviženklis). Tokių skaičių yra 5, ir jiems užrašyti reikės 5 vienetų.
Jei skaičiuje yra 2 vienetai (o likusieji nuliai), tai viską lemia, kur parašyti tie vienetai. Juos 5 vietose galima parašyti $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ būdų (vietose 12 13 14 15 23 24 25 34 35 45), ir tiems 10 skaičių užrašyti prireiks $10 \cdot 2 = 20$ vienetų.
Jei skaičiuje yra 3 vienetai, tai jame yra 2 nuliai. Dviem nuliams parašyti, kaip jau matėme, yra 10 būdų. Taigi tiems 10 skaičių parašyti reikės $10 \cdot 3 = 30$ vienetukų.
Jei skaičiuje yra 4 vienetai, tai jame yra 1 nulis, kuris gali užimti 5 padėtis. Tiems 5 skaičiams užrašyti reikės $5 \cdot 4 = 20$ vienetų.
Pagaliau, jeigu skaičiuje visi 5 vienetai, tai jis vienintelis.
Iš viso prireiks $5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 80$ vienetų.
Teisingas atsakymas **C**.