KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2010

BIČIULIS,
KADETAS

V–VIII
KLASĖS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius-sudarytojas ***JUOZAS MAČYS***

TEV
VILNIUS 2011

UDK 51(079)
Ke–108

Autorius-sudarytojas *Juozas Mačys*

Redaktorius *Valdas Vanagas*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Aldona Žalienė*
Konsultantas *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

ISBN 978–609–433–029–2

TURINYS

PRATARMĖ

Populiariausios pasaulyje mokinių matematikos varžybos yra tarptautinis *Kengūros* žaidimas-konkursas. Sumanytas Australijoje, jis bemat išplito. 1994 metais buvo įkurta asociacija „Kengūra be sienų“ (*Kangourou sans frontières*), kuriai dabar priklauso 45 šalys iš visų žemynų (išskyrus Australiją, jau seniai turinčią savo *Kengūrą*, na ir jos kaimynę Antarktidą). 2010 metais konkurse varžėsi per 5 milijonus mokinių, o į Gineso rekordų knygą jis seniai įrašytas kaip masiškiausias.

Kad mokiniai galėtų geriau pasirengti konkursams, organizavimo komiteto bei Matematikos ir informatikos instituto rūpesčiu nuo 1999 metų kasmet leidykloje TEV yra išleidžiamos konkurso užduočių ir sprendimų knygelės. Be to, leidykla TEV, bendradarbiaudama su Torunės M. Koperniko universitetu ir leidykla „Aksjomat“ (Lenkija), leidžia ankstesnių metų (kai Lietuva konkurse dar nedalyvavo) konkursų užduočių knygeles. Jau išleistos knygelės „Kengūra 1993–1998. Mažylis“, „Kengūra 1991–1998. Bičiulis“, „Kengūra 1991–1998. Kadetas“ ir „Kengūra 1991–1998. Junioras“. 2007 metais pirmą kartą konkursas buvo organizuotas ir „Nykštuko“ grupei — I ir II klasių mokiniams. Jiems rengtis konkursams taip pat išleistos knygelės „Nykštukas“ ir „Gudrutis“. Mėgstantiems spręsti uždavinius prie kompiuterio, parengti ir kompiuteriniai *Kengūros* konkursų variantai. Interneto knygyne TEVUKAS galima įsigyti tiek kiekvienų metų ir kiekvienos amžiaus grupės, tiek ir visų metų visų grupių rinkinius kompiuterinėse plokštelėse.

Lietuvoje ir kitose šalyse, 2010 metų konkursas įvyko kovo 18 dieną (laikantis taisyklės — kovo trečias ketvirtadienis). Konkurse dalyvavo per 60 tūkstančių mokinių iš daugiau kaip tūkstančio Lietuvos mokyklų. Visiems konkurse dalyvavusiems mokiniams buvo įteikti dalyvio pažymėjimai. Kiekvienas mokinys atminimui gavo konkurso užduočių sąlygas ir suvenyrinį *Kengūros* pieštuką.

Konkurso rezultatai buvo apdoroti Nacionaliniame egzaminų centre. Kompiuterinė programa nustatė mokinius, kurių atsakymų rinkiniai buvo identiški, t. y. sutapo *visi* — ir teisingi, ir neteisingi atsakymai. Jei kurioje nors mokykloje toje pačioje grupėje buvo du identiški atsakymai, tai jų autoriai išskirti nuspalvinimu arba *kursyvu*. Jeigu identiškų atsakymų buvo daugiau, o jų autoriai pretendavo į savo klasės geriausiųjų penkiasdešimtuką, tai tie autoriai internete iškelti už 50-uko lentelės brūkšnio.

Rajonai ir mokyklos savo dalyvių rezultatus gali pasižiūrėti interneto svetainėje www.kengura.lt; jiems paliekama teisė patiems spręsti, buvo ar nebuvo pažeistos konkurso sąlygos (pvz., ar buvo galimybių nusirašyti, spręsti kolektyviai, spręsti ilgiau nei buvo nurodyta ir pan.) ir kaip traktuoti identiškus darbus. Penkiasdešimtukai spausdinami ir šioje knygelėje (žr. p. 8–11) — juk kiekvienam dalyviui malonu matyti savo pavardę tarp geriausiųjų. Ką gi laimi konkurso nugalėtojai, kaip jie apdovanojami? Dešimt geriausiai konkurse pasirodžiusių juniorų kartu su dar penkiais lenkų mokyklų mokiniais rugpjūtį vyko į tarptautinę kengūrininkų stovyklą Zakopanėje (Lenkija), grupė lyderių stovyklavo Minske (Baltarusija). Būrys mūsų geriausių bičiulių ir kadetų rugpjūčio pradžioje ilsėjosi ir treniravosi puikiuose „Toliejos“ poilsio namuose, įsikūrusiuose tarp ežerų ir miškų Molėtų rajone. Stovykloje buvo visų Lietuvos rajonų atstovų. Kartu ten vyko ir tarptautinė *Kengūros* stovykla, kurioje kartu su mūsų laimėtojais dalyvavo svečiai iš Lenkijos ir Baltarusijos.

Visi dalyviai, patekę į savo klasės penkiasdešimtukus, taip pat kiekvieno miesto, rajono ar savivaldybės 10 geriausių sprendėjų (net ir nepatekusių į 50-tukus) gavo *Kengūros* užrašų knygutę.

Kartą metuose *Kengūros* asociacijos šalių atstovai susirenka į visuotinį suvažiavimą. 2009 metais toks suvažiavimas vyko Minske (Baltarusija) spalio mėnesį. Jame buvo apsvarstytos užduotys 2010 metų konkursui. Prieš suvažiavimą iš įvairių šalių atsiųsti uždaviniai buvo atitinkamai suskirstyti į 5 grupes ir sudėti į storą knygą. Tokį rinkinį gavo kiekvienos šalies atstovai. Iš viso sąrašo balsuojant buvo sudarytos rekomenduojamos užduotys (kaip įprasta, mažylių grupei — 24 klausimai, kitoms grupėms — po 30 klausimų), tada užduotys buvo tikslinamos, redaguojamos, ir išvažiuodama kiekviena šalis turėjo angliškai parengtą preliminarų užduočių rinkinį (beje, be sprendimų). Vis dėlto galutinės užduotys gerokai skyrėsi nuo rekomenduotųjų — kiekviena šalis turi teisę užduotyse šį bei tą keisti, atsižvelgdama į savo skonį ir matematikos programas. Be to, šalys, organizuojančios konkursą „Nykštuko“ grupei, visus 18 klausimų jam rengia pačios.

Konkurso metu negalima naudotis skaičiuokliais. Konkursas testinis, — tai reiškia, kad tik vienas atsakymas iš penkių pateiktų yra teisingas, ir tą atsakymą reikia nustatyti. Gautą atsakymą dalyvis nurodo savo kortelėje (dalyvio kortelės pavyzdys įdėtas 7 psl.; ten paaiškinta, kaip ją reikia užpildyti). Jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia parašyti tą atsakymą, pasižymėti jį sau, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo dažniausiai nelieka). Konkursas yra labai demokratiškas — sakysime, geras, bet lėtas ir specialiai konkursui nesirengęs olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

Vertinant darbus, už teisingą atsakymą duodamas prieš klausimą nurodytas taškų skaičius, už nenurodytą atsakymą — 0 taškų, už nurodytą neteisingą atsakymą atimama ketvirtadalis klausimui skiriamų taškų. Kad nebūtų neigiamų rezultatų, kiekvienam dalyviui iš karto skiriama 30 taškų. Todėl dalyvis iš viso gali surinkti nuo nuo 0 iki 150 taškų.

Kortelės teisingas užpildymas taip pat yra testo dalis, ir iš apsirikusių užpildant kortelę jokios pretenzijos nepriimamos. Beje, internete buvo nurodytos neteisingai kortelę užpildžiusių dalyvių pavardės, ir jiems buvo suteikta galimybė per savaitę patikslinti duomenis (dalis dalyvių ta galimybe sėkmingai pasinaudojo).

Šioje knygelėje pateiktos 2010 m. *Kengūros* konkurso bičiulių ir kadetų užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti ir pasitikrinti, knygelės gale yra teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės užduotį ir atlikti ją per 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo galimybes. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės užduotimi — dauguma vyresniųjų klasių uždavinių taip pat „įkandami“ jaunesniesiems.

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai, ir truputėlį pasitreniravus, juos galima tiesiog skaityti. Kad būtų patogiau, sprendimų dalyje po uždavinio numerio iš karto nurodoma, kuris atsakymas teisingas.

? Ženklu **?** pažymėtas „spėjimas“. Žinoma, dažniausiai tas spėjimas yra sprendimas arba beveik sprendimas, tik spėjime dažniausiai remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas knygelėje iš viso neduodamas ir iš karto pateikiamas sprendimas. Dar kartą pabrėžiame — rengiantis *Kengūros* konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus spėjimus ar trumpą sprendimą. Keliais klaustukais žymimi kiti spėjimo būdai.

! Ženklu **!** žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, perskaityti sprendimą labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai pravers gyvenime ir mokykloje.

!! Ženklu **!!** (o kartais ir ženklu **!!!**) žymimi kiti sprendimai, dažnai trumpesni, bet reikalaujantys daugiau žinių. Keliais šauktukais taip pat žymimos pastabos, komentarai mokytojui, siūlomi sunkesni panašūs uždaviniai ir kt.

Kiek daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio griežtas sprendimas, labai gerai matyti, pavyzdžiui, iš uždavinių B16, K21. Apčiuopti teisingą atsakymą čia paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį — labai sunku.
Stengiantis padėti pasirengti konkursui rusų, lenkų ir anglų mokyklų mokiniams internete pateiktos 2010 m. užduočių sąlygos jų kalbomis. Tai ypač svarbu žemesniųjų klasių mokiniams, kuriems skaityti matematinį tekstą lietuviškai sunku.

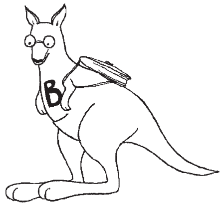
Daugiau informacijos rasite internete: http://www.kengura.lt.
Visais iškilusiais klausimais prašom kreiptis į *Kengūros* organizavimo komitetą — tel.: (8-5) 2729803 ir (8-5) 2109324, el. paštas: info@kengura.lt, adresas: Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius.

2011 metų konkursas įvyks kovo 17 dieną, o sąlygos vėl bus parengtos lietuvių, lenkų, rusų ir anglų kalbomis.
Sėkmės rengiantis konkursui! Kviečiame gausiai dalyvauti!

Organizavimo komitetas

2010 m. konkurso užduočių sąlygos

BIČIULIS (V ir VI klasės)

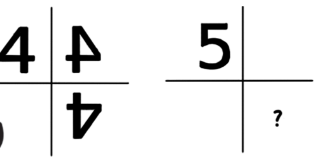


KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

B1. Nustatykite, kokį skaičių atitinka □, jei $\square + \square + 6 = \square + \square + \square + \square$.

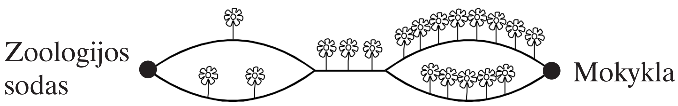
A) 2 **B**) 3 **C**) 4 **D**) 5 **E**) 6

B2. Skaičius 4 dukart atsispindi taip, kaip parodyta piešinyje. Jeigu tai būtų skaičius 5, tai ką matytume ten, kur dabar yra klaustukas?



A)  B)  C)  D)  E) 

B3. Kengūrytė eina iš zoologijos sodo į mokyklą vienu iš galimų kelių (žr. pav.), pakeliui skaičiuodama gėles.



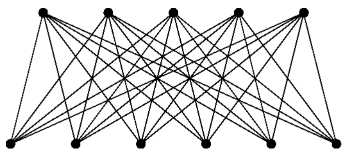
Kurio gėlių skaičiaus iš pateiktųjų ji negali gauti?

A) 9 **B**) 10 **C**) 11 **D**) 12 **E**) 13

B4. Laiptai turi 21 laiptelį. Nikas lipa į viršų, Mikas leidžiasi į apačią. Jie abu atsiduria ant to paties laiptelio, kuris yra 10-tas Nikui. Kelintas jis yra Mikui?

A) 13 **B**) 14 **C**) 11 **D**) 12 **E**) 10

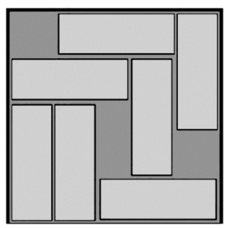
B5. Onutė sujungė atkarpomis kiekvieną viršutinį tašką su kiekvienu apatiniu tašku. Kiek atkarpų išvedė Onutė?
A) 20 **B**) 25 **C**) 30 **D**) 35 **E**) 40



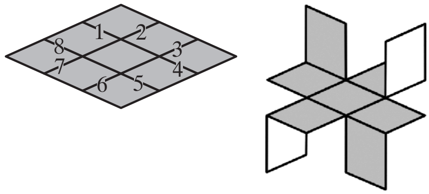
B6. Musė turi 6 kojas, o voras — 8. Tada 2 musės ir 3 vorai kartu turi tiek pat kojų, kiek 10 paukštelių ir

A) 2 katės **B**) 3 katės **C**) 4 katės **D**) 5 katės **E**) 6 katės

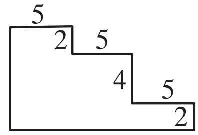
B7. Dėžutės dugne guli 7 vienodos plytelės. Kiek mažiausiai plytelių teks pastumti, kad rastųsi vietos dar vienai tokiai plytelei?
A) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 4 **E**) 5



B8. Kvadratinis popieriaus lakštas yra pilkas iš viršaus ir baltas iš apačios. Norėdama padaryti pavaizduotą lankstinį, Onutė tą lakštą įkirpo 4 vietose iš 8 pažymėtų. Kuriose?
A) 1, 3, 5 ir 7 **B**) 2, 4, 6 ir 8 **C**) 2, 3, 5 ir 6
D) 3, 4, 6 ir 7 **E**) 1, 4, 5 ir 8



B9. Kam lygus pavaizduotos figūros perimetras?
A) $3 \cdot 5 + 4 \cdot 2$ **B**) $3 \cdot 5 + 8 \cdot 2$ **C**) $6 \cdot 5 + 4 \cdot 2$
D) $6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$ **E**) $6 \cdot 5 + 8 \cdot 2$



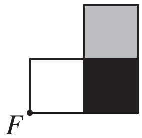
B10. Žemiau matome penkias virvutes. Kuri iš jų surišta mazgu?

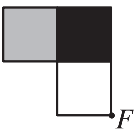
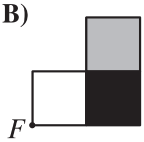
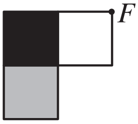
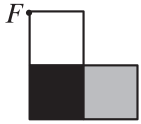
A)  B)  C)  D)  E) 

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

B11. Kuri iš žemiau esančių išraiškų duoda ne tai, ką visos kitos?

A) $20 \cdot 10 + 20 \cdot 10$ **B**) $20 : 10 \cdot 20 \cdot 10$ **C**) $20 \cdot 10 \cdot 20 : 10$ **D**) $20 \cdot 10 + 10 \cdot 20$
E) $20 : 10 \cdot 20 + 10$

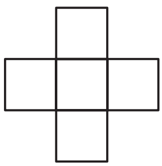
B12. Pasukę figūrą  puse apsisukimo apie tašką F, gautume figūrą:

A)  B)  C)  D)  E) 

B13. Benas pasirinko skaičių, padalijo jį iš 7, o prie dalmens pridėjo 7 ir gautąjį rezultatą padauginęs iš 7 gavo 777. Kokį skaičių jis pasirinko?

A) 7 **B**) 111 **C**) 722 **D**) 567 **E**) 728

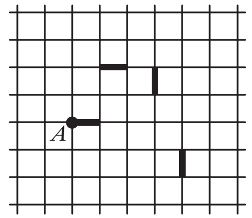
B14. Į šalia esančios figūros laukelius po vieną surašyti skaičiai 1, 4, 7, 10 ir 13 taip, kad trijų vertikalės skaičių suma yra lygi trijų horizontalės skaičių sumai. Kokia didžiausia gali būti ta suma?
A) 18 **B**) 20 **C**) 21 **D**) 22 **E**) 24



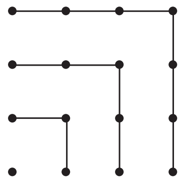
B15. 60 puslapių laikraštis daromas sudėjus vieną ant kito 15 vienodų lapų. Tada ta krūva lapų perlenkiama perpus, o gauti puslapiai sunumeruojami iš eilės nuo viršutinio iki apatinio. Dar nesusiuvus laikraščio iš jo buvo išimtas lapas su 7 puslapiu. Kurių dar puslapių nebeliko laikraštyje?

A) 8, 9 ir 10 **B**) 8, 42 ir 43 **C**) 8, 48 ir 49 **D**) 8, 52 ir 53 **E**) 8, 53 ir 54

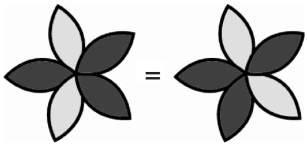
B16. Skruzdėlytė keliauja tinklelio linijomis. Ji pradeda ir baigia kelionę taške A, o daugiau taškų, kuriuose ji pabuvotų du kartus, nėra. Jos maršrutas turi eiti per visas paryškintas atkarpas. Kiek mažiausiai kvadratėlių gali būti maršruto viduje?
A) 8 **B**) 9 **C**) 10 **D**) 11 **E**) 13



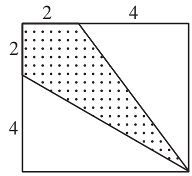
B17. Iš paveikslėlio matyti, kad $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$.
Kam lygi suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$?
A) 14×14 **B**) 9×9 **C**) $4 \times 4 \times 4$ **D**) 16×16 **E**) 4×9



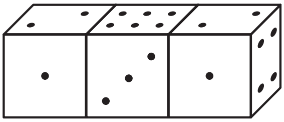
B18. Lina nupiešė gėlytę su 5 žiedlapiais ir norėtų ją nuspalvinti, tačiau teturi dvi spalvas – raudoną ir geltoną. Kiek skirtingų gėlyčių Lina gali nupiešti, jeigu kiekvieną žiedlapį Lina spalvina viena spalva? (Abu paveikslėliai vaizduoja tą pačią gėlytę.)
A) 6 **B**) 7 **C**) 8 **D**) 9 **E**) 10



B19. Kuri kvadrato dalis yra užtaškuota?
A) $\frac{1}{3}$ **B**) $\frac{1}{4}$ **C**) $\frac{1}{5}$ **D**) $\frac{3}{8}$ **E**) $\frac{2}{9}$

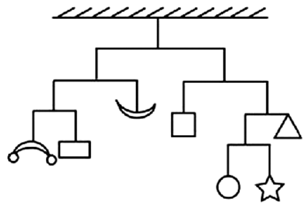


B20. Trys vienodi lošimo kauliukai yra suglausti taip, kaip parodyta piešinyje. Priešingų kauliuko sienelių akučių skaičius visada lygus 7. Kam lygi visų keturių suglaustų sienelių akučių suma?
A) 12 **B**) 13 **C**) 14 **D**) 15 **E**) 16



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

B21. Piešinyje matome pusiausvirą svarelių sistemą. Horizontalieji laikikliai bei vertikalieji siūlai yra padaryti iš besvorės medžiagos. Visa sistema sveria 112 gramų. Kiek gramų sveria žvaigždutė?
A) 6 **B**) 7 **C**) 12 **D**) 16 **E**) Nustatyti neįmanoma



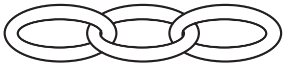
B22. Picų parduotuvėje visos picos su sūriu. Pica gali būti paskaninama vienu arba keliais priedais — ančiuviais, artišokais, grybais, kapariais, o gali būti ir nepaskaninama. Picos būna mažos, vidutinės ir didelės. Kiek daugiausiai skirtingų picų galima nusipirkti toje parduotuvėje?

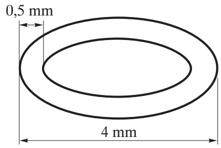
A) 30 **B**) 12 **C**) 18 **D**) 48 **E**) 72

B23. Kad paaiškėtų, kam atiteks paskutinis Linos gimtadienio pyrago gabalas, Lina, Sigutė, Henrikas, Paulina ir Arūnas sustoja ratuku nurodyta tvarka pagal laikrodžio rodyklę ir pagal ją pradeda skaičiuotę KEN-GŪ-RA-BĖK-IŠ-ČIA. Kiekvienas iš eilės sako po skiemenį, o pasakęs ČIA iškrenta iš ratuko. Skaičiuotė tęsiama tol, kol belieka tik vienas iš vaikų. Skaičiuotę pradedantį nurodo Lina. Kuriam ji nurodys pradėti, kad paskutinis pyrago gabalas liktų Arūnui?

A) Linai **B**) Sigutei **C**) Henrikui **D**) Paulinai **E**) Arūnui

B24. Juvelyras daro grandinėles, suverdamas vienodus žiedelius. Žiedelių matmenys nurodyti dešiniajame paveikslėlyje. Koks yra iš 5 žiedelių suvertos grandinėlės ilgis (mm)?





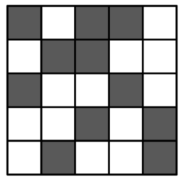
A) 20 **B**) 19 **C**) 17,5 **D**) 16 **E**) 15

B25. Lygybėje $\overline{PPQ} \cdot Q = \overline{RQ5Q}$ raidės P, Q ir R žymi skirtingus skaitmenis. Kam lygi suma $P + Q + R$?

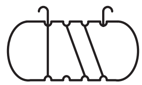
A) 13 **B**) 15 **C**) 16 **D**) 17 **E**) 20

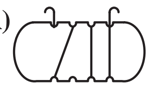
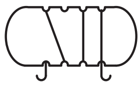
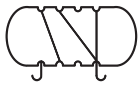
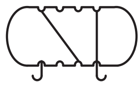
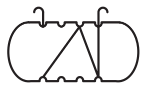
B26. Kelis užtušuotus figūros langelius reikėtų perspalvinti baltai, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje liktų po vienintelį užtušuotą langelį?

A) 4 **B**) 5 **C**) 6 **D**) 7 **E**) To padaryti neįmanoma

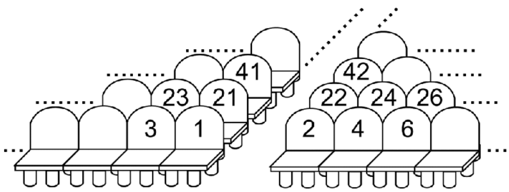


B27. Apie medinę lentelę su įraižomis Andrius apsuko vielą (žr. pav.). Kaip atrodo kita lentelės pusė?



A)  **B**)  **C**)  **D**)  **E**) 

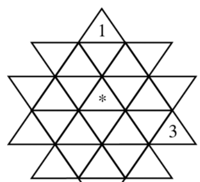
B28. Onutė salėje sėdi 100-joje vietoje, o Beatričė norėtų sėdėti kuo arčiau jos, tačiau jau tėra likę 5 bilietai: 76, 94, 99, 104 ir 118-tas. Kurį bilietą jai pirkti?



A) 94
B) 76
C) 99
D) 104
E) 118

B29. Į kiekvieną viršutinio paveikslėlio trikampėlį turi būti įrašytas vienas kuris iš skaičių 1, 2, 3 arba 4. Bet kurioje (taip pat ir pasuktoje) apatiniame paveikslėlyje pavaizduotoje 4 langelių konfigūracijoje turi būti įrašyti visi 4 skaičiai. Trys skaičiai 1, 2 ir 3 jau įrašyti. Koks skaičius gali būti įrašytas žvaigždute pažymėtame trikampėlyje?

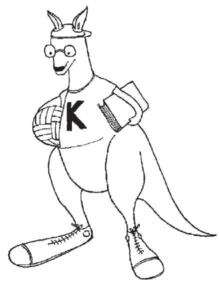
A) Tik 1 **B**) Tik 2 **C**) Tik 3 **D**) Tik 4
E) Bet kuris iš skaičių 1, 2 ir 3



B30. Vandenų valdovui tarnauja galvakojai — šešiakojai, septynkojai ir aštuonkojai. Septynkojai visada meluoja, o šešiakojai bei aštuonkojai – visada sako tiesą. Susitiko sykį keturi įvairiaspalviai galvakojai. Mėlynasis sako: „Iš viso mes turime 28 kojas“. Žaliasis sako: „Iš viso mes turime 27 kojas“. Geltonasis sako: „Iš viso mes turime 26 kojas“. Raudonasis sako: „Iš viso mes turime 25 kojas“. Kuris galvakojis pasakė tiesą?

A) Raudonasis **B**) Mėlynasis **C**) Žaliasis **D**) Geltonasis **E**) Nė vienas

KADETAS (VII ir VIII klasės)



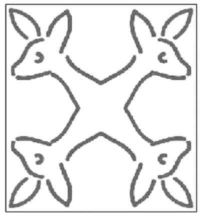
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

K1. Kam lygu $12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89$?

A) 389 **B**) 396 **C**) 404 **D**) 405 **E**) Kitas atsakymas

K2. Kiek simetrijos ašių turi šalia esanti figūra?

A) 0 **B**) 1 **C**) 2 **D**) 4 **E**) Be galo daug

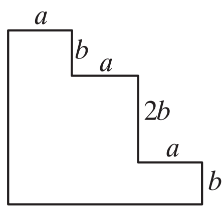


K3. Ruošiamoje kengūrinių žaisliukų siuntoje kiekviena kengūrėlė dedama į atskirą kubinę dėžutę. Kiekvienos aštuonios dėžutės be tarpų sudedamos į didesnę kartoninę kubinę dėžę. Kiek kubinių dėžučių yra tos kubinės dėžės apatiniame sluoksnyje?

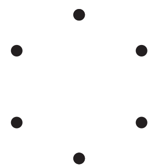
A) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 4 **E**) 5

K4. Kam lygus pavaizduotos figūros perimetras?

A) $3a+4b$ **B**) $3a+8b$ **C**) $6a+4b$ **D**) $6a+6b$ **E**) $6a+8b$



K5. Elena pažymėjo 6 taisyklingojo šešiakampio viršūnes ir sujungusi atkarpomis kai kuriuos iš tų 6 taškų gavo geometrinę figūrą. Ta figūra tikrai nėra:
A) trapecija **B**) statusis trikampis **C**) kvadratas
D) lygiakraštis trikampis **E**) bukasis trikampis



K6. Turime septynis paeiliui einančius natūraliuosius skaičius. Pirmųjų trijų skaičių suma lygi 33. Kam lygi paskutiniųjų trijų skaičių suma?

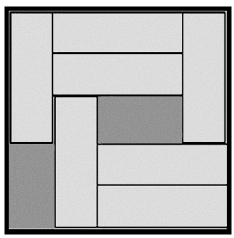
A) 39 **B**) 37 **C**) 42 **D**) 48 **E**) 45

K7. Stepas pirko rąstų malkoms ir supjovė juos į rąstigalius. Rąstus jam teko pjauti 53 kartus, o rąstigalių susidarė 72. Kiek rąstų pirko Stepas?

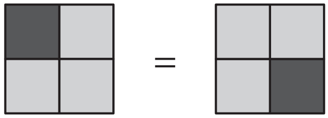
A) 17 **B**) 18 **C**) 19 **D**) 20 **E**) 21

K8. Dėžutės dugne guli 7 vienodos plytelės. Kiek mažiausiai plytelių teks pastumti, kad rastųsi vietos dar vienai tokiai plytelei?

A) 2 **B**) 3 **C**) 4 **D**) 5 **E**) To padaryti neįmanoma



K9. Kvadratas padalytas į 4 vienodus kvadratėlius. Kiekvienas iš tų keturių kvadratėlių nuspalvinamas viena kuria nors spalva – raudonai arba baltai. Kiek yra skirtingų kvadrato nuspalvinimo būdų? (Du nuspalvinimai laikomi vienodais, jeigu sukant juos galima sutapdinti.)



A) 5 **B**) 6 **C**) 7 **D**) 8 **E**) 9

K10. Sudedame šimtą pirmųjų teigiamų lyginių skaičių, tada šimtą pirmųjų teigiamų nelyginių skaičių. Kam lygus šių sumų skirtumas?

A) 0 **B**) 50 **C**) 100 **D**) 10 100 **E**) 15 150

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

K11. Senelė iškepė anūkams pyragą, bet nežino, keli anūkai – 3, 5 ar 6 ateis. Ji norėtų, kad atėję anūkai galėtų iš karto gauti po tiek pat pyrago. Į kelias lygias dalis būtų geriausia supjaustyti tą pyragą?

A) 12 **B**) 15 **C**) 18 **D**) 24 **E**) 30

K12. Kuris iš nurodytųjų skaičių yra mažiausias dviženklis skaičius, kuris nėra trijų skirtingų vienaženklių skaičių suma?

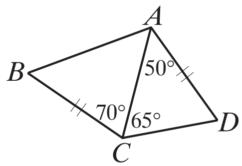
A) 24 **B**) 15 **C**) 23 **D**) 25 **E**) 10

K13. Kotrynai reikia 18 minučių, kad padarytų vientisą 3 žiedų grandinę sukabindama gretimus žiedus. Kiek minučių jai reikėtų padaryti vientisą 6 žiedų grandinę?

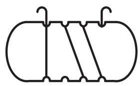
A) 27 **B**) 30 **C**) 36 **D**) 45 **E**) 60

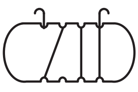
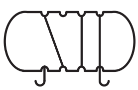
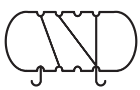
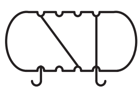
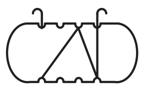
K14. Keturkampyje $ABCD$: $AD = BC$, $\angle DAC = 50^\circ$, $\angle DCA = = 65^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$ (žr. brėžinį). Raskite kampo $\angle ABC$ didumą.

A) 50° **B**) 55° **C**) 60° **D**) 65°
E) Nustatyti neįmanoma



K15. Apie medinę lentelę su įraižomis Andrius apsuko vielą (žr. pav.). Kaip atrodo kita lentelės pusė?



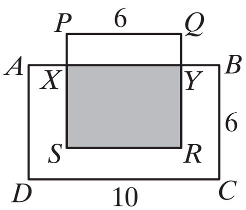
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

K16. Dėžėje yra 50 baltų, mėlynų ir raudonų plytelių. Baltų plytelių yra 11 kartų daugiau negu mėlynų. Raudonų plytelių yra mažiau negu baltų, bet daugiau negu mėlynų. Keliomis plytelėmis raudonųjų plytelių yra mažiau negu baltųjų?

A) 2 **B**) 11 **C**) 19 **D**) 22 **E**) 30

K17. Brėžinyje *ABCD* yra stačiakampis, o *PQRS* – kvadratas. Užtušuotos figūros plotas sudaro pusę viso stačiakampio *ABCD* ploto. Koks atkarpos *PX* ilgis?

A) 1 **B**) 1,5 **C**) 2 **D**) 2,5 **E**) 4



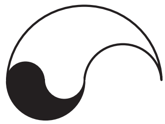
K18. Kiek mažiausiai tiesių reikia išvesti norint plokštumą padalyti į 5 sritis?

A) 3 **B**) 4 **C**) 5 **D**) 6 **E**) Kitas atsakymas

K19. Jei $a-1=b+2=c-3=d+4=e-5$, tai kuris iš skaičių a, b, c, d ir e yra didžiausias?

A) a **B**) b **C**) c **D**) d **E**) e

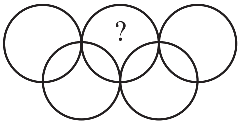
K20. Pavaizduotosios emblemos kontūrai yra sudaryti iš pusapskritimių, kurių spinduliai yra 2 cm, 4 cm ir 8 cm. Kuri emblemos dalis yra užtušuota?



A) $\frac{1}{3}$ **B**) $\frac{1}{4}$ **C**) $\frac{1}{5}$ **D**) $\frac{2}{5}$ **E**) $\frac{2}{9}$

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

K21. Susikertantys penki apskritimai riboja devynias sritis. Į jas, po vieną į kiekvieną sritį, yra įrašyti visi skaičiai nuo 1 iki 9 taip, kad bet kuriame skritulyje įrašytų skaičių suma yra 11.



Koks skaičius yra įrašytas į sritį, pažymėtą klaustuku?

A) 5 **B**) 6 **C**) 7 **D**) 8 **E**) 9

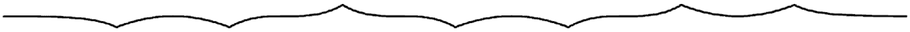
K22. Atlikti mainus turguje leidžiama tik taip, kaip nurodyta lentelėje.

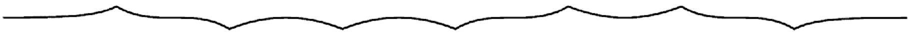
Keisti leidžiama tik taip!		
1 kalakutas	⇔	5 gaidžiai
1 žąsis + 2 vištos	⇔	3 gaidžiai
4 vištos	⇔	1 žąsis

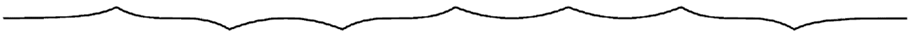
Kiek mažiausiai vištų turėtų atsigabenti į turgų ūkininkas Kvaklys, kad galėtų jas išsimainyti į vieną gaidį, vieną žąsį ir vieną kalakutą?

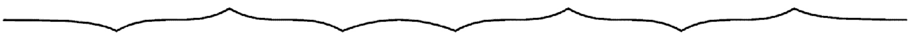
A) 18 **B**) 17 **C**) 16 **D**) 15 **E**) 14

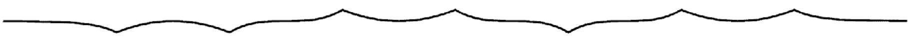
K23. Popieriaus juostelė buvo perlenkta pusiau. Susidariusi dviguba juostelė vėl buvo perlenkta pusiau. Pagaliau keturguba juostelė vėl buvo perlenkta pusiau. Kai juostelė buvo atlankstyta atgal, tai kiekviena lenkimo linija išgaubė ją į viršų arba į apačią. Kurio vaizdo iš žemiau parodytų niekada negalėsime pamatyti, žiūrėdami į atlankstytą juostelę iš šono?

A)


B)


C)


D)


E)


K24. Kiekvienoje iš 18 kortelių parašyta po vieną skaičių — arba 4, arba 5. Visų tų skaičių suma dalijasi iš 17. Keliose kortelėse parašytas skaičius 4?

A) 4 **B**) 5 **C**) 6 **D**) 7 **E**) 9

K25. Lentoje yra surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 10. Mokiniai klasėje žaidžia tokį žaidimą. Iš pradžių vienas kuris mokinys nutrina bet kuriuos du pasirinktus lentoje esančius skaičius ir vietoje jų užrašo vienetu sumažintą abiejų nutrintųjų skaičių sumą, po to tą patį daro kitas ir taip toliau, kol lentoje lieka vienintelis skaičius. Tas vienintelis lentoje likęs skaičius yra:

A) mažesnis už 11 **B**) 11 **C**) 46 **D**) didesnis kaip 46 **E**) atsakymas yra kitoks

K26. Saloje gyvena vien tiesakalbiai ir melagiai. Kiekvienas tiesakalbio pasakytas teiginys yra teisingas, o kiekvienas melagio pasakytas teiginys yra klaidingas. Kartą keletas tos salos gyventojų buvo viename kambaryje, o trys iš jų pasakė:
1) Pirmas: „Šiame kambaryje mūsų yra ne daugiau kaip trys. Visi mes esame melagiai.“
2) Antras: „Šiame kambaryje mūsų yra ne daugiau kaip keturi. Ne visi mes melagiai.“
3) Trečias: „Kambaryje mūsų penki. Trys iš mūsų – melagiai.“
Kiek žmonių tame kambaryje ir kiek iš jų melagių?

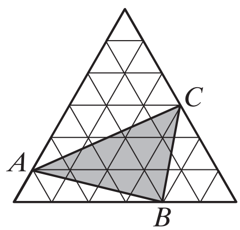
A) 3 ir 1 **B**) 4 ir 1 **C**) 4 ir 2 **D**) 5 ir 2 **E**) 5 ir 3

K27. Kengūrytė yra surinkusi didelį vienetinių kubelių $1 \times 1 \times 1$ rinkinį. Kiekvienas kubelis yra visas nudažytas kuria nors spalva. Kengūrytė norėtų iš 27 kubelių sudėti kubą $3 \times 3 \times 3$ taip, kad bet kurie du kubeliai, turintys bent vieną bendrą viršūnę, būtų skirtingų spalvų. Kelių mažiausiai spalvų kubelių jai prireiks?

A) 6 **B**) 8 **C**) 9 **D**) 12 **E**) 27

K28. Didysis lygiakraštis trikampis sudarytas iš 36 mažesnių $1\,\mathrm{cm}^2$ ploto lygiakraščių trikampių. Raskite $\triangle ABC$ plotą (cm^2).

A) 11 **B**) 12 **C**) 13 **D**) 14 **E**) 15

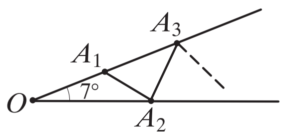


K29. Natūraliųjų skaičių 24 ir x mažiausiasis bendrasis kartotinis yra mažesnis už skaičių 24 ir y mažiausiąjį bendrąjį kartotinį. Tada santykis $\frac{y}{x}$ negali būti lygus:

A) $\frac{7}{8}$ **B**) $\frac{8}{7}$ **C**) $\frac{2}{3}$ **D**) $\frac{6}{7}$ **E**) $\frac{7}{6}$

K30. Kampas O lygus 7°, o atkarpos OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... yra lygios (žr. pav.). Kiek daugiausiai atkarpų gali būti šioje sekoje?

A) 11 **B**) 12 **C**) 13 **D**) 14 **E**) Be galo daug



SPRENDIMAI

BIČIULIS (V ir VI klasės)

B1. B 3

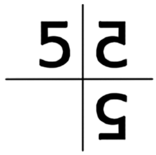
Iš duotos lygybės abiejų pusių atmeskime po du kvadratėlius:

$$\square + \square + 6 = \square + \square + \square + \square \longrightarrow 6 = \square + \square$$

Kadangi 2 kvadratėliai sudėti duoda 6, tai vienas kvadratėlis yra 3.
Teisingas atsakymas **B**.

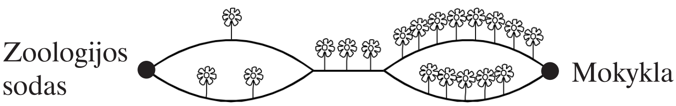
B2. C

Kai pereisime prie dešiniojo paveikslėlio, tai skaitmens 5 „užpakalis“, kuris dabar yra dešinėje, atsidurs kairėje. Kairėje jis bus ir apvertus tą vaizdą žemyn. Tokie yra paveikslėliai **A** ir **C**. Dabar panagrinėkime horizontaliąją atkarpą. Ji yra viršuje dešiniame paveikslėlyje taip pat bus viršuje, o apvertus — apačioje. Toks yra paveikslėlis **C**.
Teisingas atsakymas **C**.



B3. C 11

Suskirstykime kelią į tris dalis: pradžią, vidurį ir pabaigą. Pradžioje galima eiti pro 1 gėlę arba pro 2. Viduryje yra 3 gėlės. Pabaigoje galima eiti pro 5 arba pro 8 gėles. Mažiausiai kelyje bus $1 + 3 + 5 = 9$ gėlės. Gėlių skaičių galima padidinti $2 - 1 = 1$ (pradžioje eiti ne pro 1, o pro 2 gėles). Pabaigoje bendrų gėlių skaičių galima padidinti $8-5 = 3$ gėlėmis, tada jų būtų $9+3 = 12$.



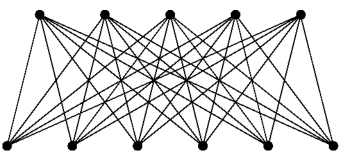
Jeigu pasirinktume kelią su daugiau gėlių tiek pradžioje, tiek pabaigoje, gėlių iš viso padaugėtų $1+3 = 4$, o kartu jų būtų $9+4 = 13$. Vadinasi, galima praeiti pro 9, 10, 12, 13 gėlių, o neįmanoma praeiti pro 11 gėlių.
Teisingas atsakymas **C**.

B4. C 11

Sakykime, kad Nikas ir Mikas lipdami „pastovi“ ant kiekvieno laiptelio. Iki susitikimo Nikas buvo pastovėjęs ant 9 laiptelių (dabar jis stovi ant 10-to), o Mikas buvo pastovėjęs ant $20 - 10 = 10$ laiptelių. Taigi Mikas dabar stovi ant 11 laiptelio skaičiuojant nuo viršaus.
Teisingas atsakymas **C**.

B5. C 30

Viršutinių taškų yra 5, apatinių — 6. Kai pirmą viršutinį tašką Onutė sujungs su visais 6 apatiniais, ji bus išvedusi 6 atkarpas. Tai jai reikės pakartoti su 4 likusiais taškais. Vadinasi, tą pačią procedūrą ji bus pakartojusi 5 kartus, todėl išves $6 \cdot 5 = 30$ atkarpų.

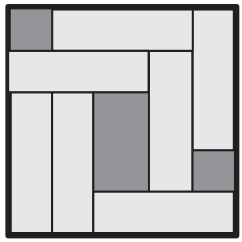


Teisingas atsakymas **C**.

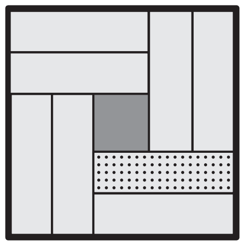
B6. Ⓒ 4 katės

! 2 musės turi $6 \cdot 2 = 12$ kojų, 3 vorai — $8 \cdot 3 = 24$ kojas. Kadangi 10 paukštelių turi $2 \cdot 10 = 20$ kojų, tai katėms lieka $12 + 24 - 20 = 16$ kojų. Vadinasi, kačių yra $16 : 4 = 4$.
Teisingas atsakymas **C**.

B7. Ⓑ 2



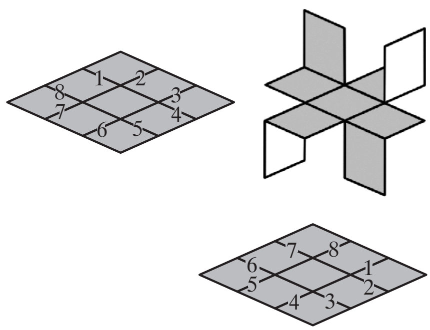
! Vieną plytelę pastumti neužtenka: kad ir kurią plytelę pastumtume (viršutinę ar dešiniąją — kitos plytelės pradinėje padėtyje „nejuda“), atsirastų naujas laisvas kvadratėlis, taigi dar vienos plytelės nepadėsime. O štai dvi plyteles pastumti užtenka: viršutinę plytelę stumiame kiek galima į kairę, tada atsilaisvina kvadratėlis jos dešinėje, ir po tuo kvadratėliu esančią plytelę galima pastumti į viršų. Dabar virš apatinės (horizontaliai gulinčios) plytelės atsiranda plotas padėti dar vieną tokią plytelę. Taigi pastumti reikia mažiausiai 2 plyteles.
Teisingas atsakymas **B**.



!! Nesunku suvokti, kad tai vienintelė galimybė padėti naują plytelę.
Iš tikrųjų, jeigu viršutinę plytelę į kairę pastumsime ne iki galo, tai pajudinti bus galima tik dešiniąją plytelę, bet net ją nuleidus kiek galima, vietos dar vienai plytelei neatsiras: viršutinėje eilutėje dvi plytelės netelpa.
Panašiai, jeigu nuleisime dešiniąją plytelę, tai kad ir kur pastumsime viršutinę, 2 plytelės viršutinėje eilutėje netilps.

!!! Iš viso, kad ir kiek plytelių stumdytume bei kad ir kiek ėjimų darytume, yra vienintelė galimybė padėti dar vieną plytelę — virš apatinės.

B8. Ⓑ 2, 4, 6 ir 8



? Norint užlenkti kvadratėlį 12 per kraštinę 1, reikia padaryti pjūvį per kraštinę 2. Panašiai nustatome, kad reikia daryti pjūvius per 4, 6, 8.
Renkamės atsakymą **B**.

! Lankstėme kvadratą nepasukę jo, bet sąlygoje apie tai nekalbama. Kas gi atsitiktų, jei jį pasuktume? Tada reikia daryti pjūvius per 8, 2, 4, 6, ir matome, kad atsakymas lieka tas pats.
Teisingas atsakymas **B**.

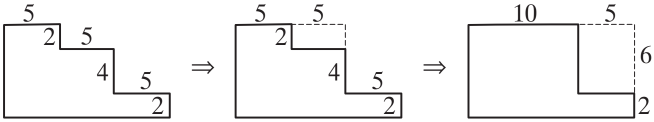
B9. Ⓔ $6 \cdot 5 + 8 \cdot 2$

! Apatinė daugiakampio kraštinė lygi $5+5+5 = 3 \cdot 5$, kairioji $2+4+2 = 4 \cdot 2$. Vadinasi, daugiakampio perimetras lygus

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 + 2 + 5 + 4 + 5 + 2 = 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2.$$

Teisingas atsakymas **E**.

!! Stačiakampio priešingos kraštinės lygios, todėl daugiakampio perimetras nesikeis, jei vietoj dviejų gretimų stačiakampio kraštinių imsime kitas dvi:

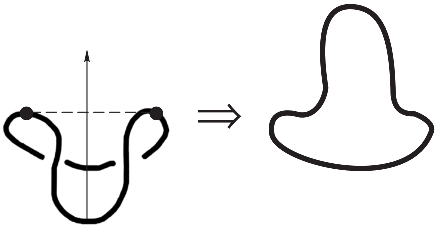


Vadinasi, daugiakampio perimetras lygus $2(15 + 8) = 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2$.

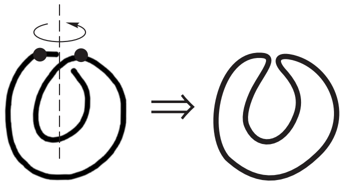
B10. Ⓓ

? Atsakymuose pavaizduotas virveles transformuokime taip, kad pasidarytų aišku, ar ta virvelė sumegzta, ar tik šiaip sulankstyta. Tam virvelės atskirus gabalus „atlenksime“ (kaip, pavyzdžiui, 1 paveikslėlyje) ar „atsuksime“ (kaip 2 pav.). Tai padarę iš karto matome, kad virvelės **A** ir **E** nėra mazgai.

A)

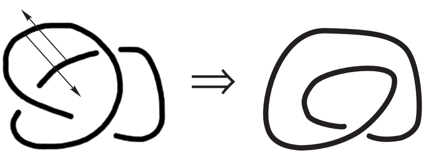


E)

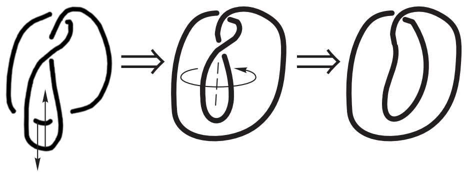


Toliau, 3 ir 4 pav. parodyta, kaip virvelės **B** ir **C** įgauna virvelės **E** pavidalą, taigi jos taip pat ne mazgai.

B)



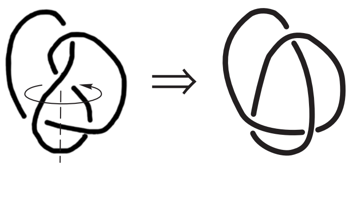
C)



Lieka virvelė **D**.
Renkamės atsakymą **D**.

! Liko įsitikinti, kad virvelė **D** tikrai yra mazgas.
Tai nesunku įžiūrėti, atsukus jos gabalą (žr. 5 pav.).
Teisingas atsakymas **D**.

D)



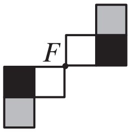
B11. Ⓔ $20 : 10 \cdot 20 + 10$

! Apskaičiuokime visų reiškinių reikšmes:
A $20 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 400$, **B** $20 : 10 \cdot 20 \cdot 10 = 400$, **C** $20 \cdot 10 \cdot 20 : 10 = 400$,
D $20 \cdot 10 + 10 \cdot 20 = 400$, **E** $20 : 10 \cdot 20 + 10 = 50$.
Taigi tik **E** skiriasi nuo visų kitų.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Skaičiuoti patogiau, sumažinus visus reiškinius 10 kartų:
A′ $20 + 20 = 40$, **B′** $2 \cdot 20 = 40$, **C′** $20 \cdot 2 = 40$, **D′** $20 + 20 = 40$, **E′** $2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Sumažinus 10 kartų, nuo likusių skiriasi reikšmė **E′**. Vadinasi, iš pradinių reikšmių išsiskiria **E**.

B12. Ⓒ

Pasukę duotąją figūrą puse apskritimo apie tašką F, gauname:



Matome, kad tai figūra **C**.
Teisingas atsakymas **C**.

B13. Ⓔ 728

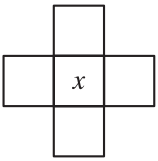
Pasirinktą skaičių gausime, atlikę atvirkščius veiksmus:

$$(777 : 7 - 7) \cdot 7 = 777 : 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 = 777 - 49 = 728.$$

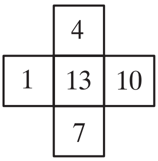
Teisingas atsakymas **E**.

B14. Ⓔ 24

Jeigu sudėsime minėtas sumas, tai vidurinis skaičius bus įtrauktas į sumą 2 kartus. Pažymėję tas lygias sumas S, o centrinį skaičių x, turėsime $2S = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + x$,



arba $2S = 35 + x$. Kadangi x yra vienas iš duotųjų skaičių, tai $x \leqslant 13$, o $2S \leqslant 48$, $S \leqslant 24$.
Liko įsitikinti, ar gauti sumą $S = 24$ galima. Tada būtinai $x = 13$, ir lieka patikrinti, ar galima sudaryti sąlygoje reikalaujamas lygias sumas. Bet $1 + 10 = 4 + 7$, taigi $1 + 10 + 13 = 4 + 7 + 13$, ir didžiausia įmanoma suma lygi 24.



Teisingas atsakymas **E**.

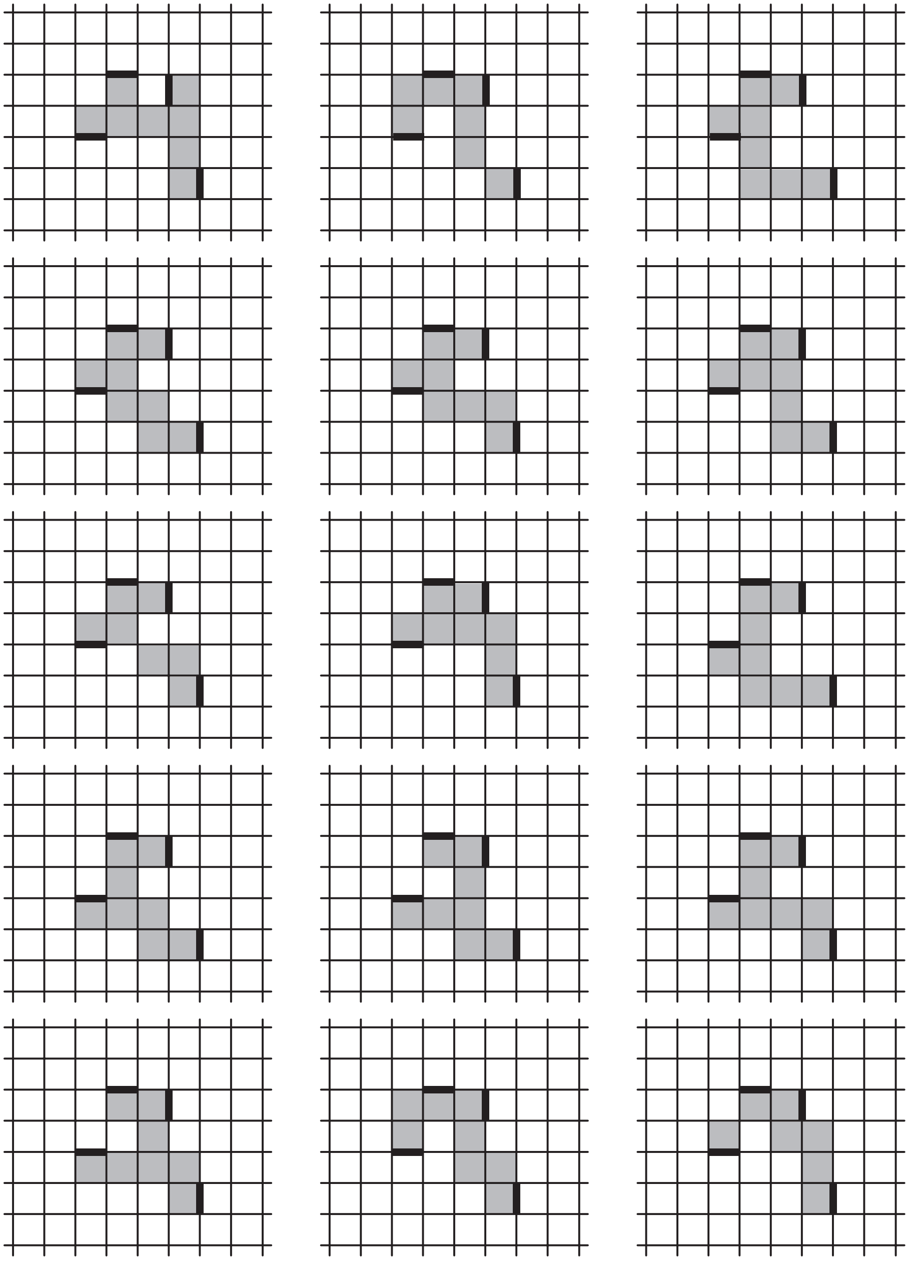
Uždavinį galima spręsti ir kitaip. Visų penkių skaičių suma yra $1+4+7+10+13 = 35$. Atmetus skaičių, kuris yra centre, ji turi „subyrėti“ į 2 lygias dviejų dėmenų sumas. Todėl atmesti galima tik nelyginį skaičių, t. y. 1, 7 arba 13. Atmetus 1, liks $35 - 1 = 34$, kiekviena dviejų dėmenų suma bus lygi $34 : 2 = 17$, t. y. $13 + 4 = 10 + 7$. Atmetus 7, liks 28, dviejų dėmenų suma bus 14, t. y. $13 + 1 = 10 + 4$. Atmetus 13, liks $35 - 13 = 22$, dviejų dėmenų suma bus lygi $22 : 2 = 11$, t. y. jos bus $10+1 = 7+4$. Sąlygoje minimos trijų dėmenų sumos pirmu atveju bus $17+1 = 18$, antru atveju $14 + 7 = 21$, trečiu atveju $11 + 13 = 24$, taigi pastaruoju atveju jos didžiausios.

B15. Ⓔ 8, 53 ir 54

Jeigu iš 60 puslapių laikraščio pašalintume pirmuosius 3 lapus, tai išnyktų pirmi 6 puslapiai ir paskutiniai 6 puslapiai. Dabar laikraštis prasidėtų 7-tu puslapiu, o 8 puslapis yra tame pačiame lape kitoje pusėje. Paskutinis puslapis pašalinus 6 puslapius laikraščio gale (t. y. 60, 59, 58, 57, 56, 55) būtų 54-tas puslapis. Aišku, kad ir 53 puslapis yra tame pačiame lape. Taigi lape, kuriame yra 7 puslapis, dar yra 8, 53 ir 54 puslapiai.
Teisingas atsakymas **E**.

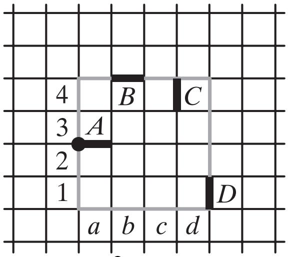
B16. Ⓐ 8

! Nesunkus uždavinys — jį išsprendė beveik visi dalyviai. Iš tikrųjų, kelis kartus pabandę randame maršrutą, kurio viduje yra 8 langeliai. Vadinasi, atsakymai **B**, **C**, **D** ir **E** tikrai neteisingi. Kadangi pagal konkurso sąlygas vienas iš atsakymų teisingas, tai teisingas turi būti atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.
1 pav. pavaizduoti visi įmanomi maršrutai, kurių viduje yra 8 langeliai. Tų 8 langelių sudaroma sritis užtušuota, o pats maršrutas — tai užtušuotojo daugiakampio kontūras.



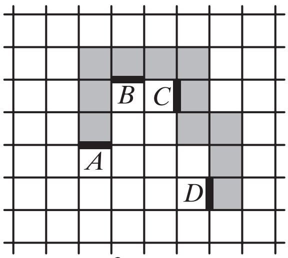
1 pav.

!! Tolesnis tekstas skirtas mokytojui (tik labai atkakliems mokiniams pavyks jį įveikti).
Gali kilti klausimas — o kur gi čia matematika? Atrodytų, tai paprastas galvosūkis, ir tiek. O vis dėlto — kodėl gi duoti atsakymai 8, 9, 10, 11, 13?
Kodėl nėra atsakymo 7? Ogi todėl, kad tada uždavinys tampa ypač sunkus. Kitaip sakant, uždavinys
Nustatykite, kiek mažiausiai langelių gali apimti sąlygą tenkinantis maršrutas
yra labai sunkus — įrodyti, kad nėra maršruto, kuris apima tik 7 langelius, tikrai sudėtinga.
Pasiaiškinkime, kuo tas uždavinio sunkumas pasireiškia. Visų pirma, neaišku, kaip vidinių langelių skaičius priklauso nuo maršruto ilgio: pavyzdžiui, nors visi 15 pavaizduotų maršrutų turi 8 vidinius langelius, bet maršrutų ilgis skiriasi — vienų 18, kitų — 16 (beje, maršruto ilgis visuomet yra lyginis — kodėl?).



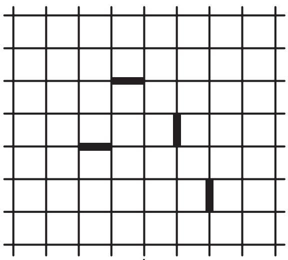
2 pav.

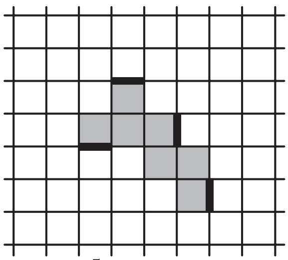
Antra, visi maršrutai, apjuosiantys 8 langelius, telpa į kvadratą 4×4, kurio langelius žymėsime kaip šachmatuose $a1, a2, a3, a4, b1, \ldots, c1, \ldots, d1, d2, d3, d4$; paryškintas atkarpas žymėsime raidėmis A, B, C, D (žr. 2 pav.). Negana to, kad ir kurį pasirinktume lentos langelį, galima rasti maršrutą, apjuosiantį 8 langelių sritį, kuriai pasirinktasis langelis nepriklausys. Ir atvirkščiai, kad ir kurį pasirinktume lentos langelį (išskyrus $a1$ ir $d4$), galima rasti maršrutą, apjuosiantį 8 langelių sritį, kuriai tas langelis priklausys (žr. 1 pav.).
Trečia, nagrinėjant visus leistinus (t. y. nebūtinai trumpiausius) maršrutus, kiekvienas langelis gali būti tiek vidinis, tiek išorinis.



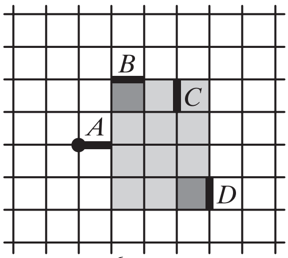
3 pav.

Pavyzdžiui, 3 pav. vidiniai yra langeliai $a3$, langelis virš atkarpos B (o langelis $b4$ — išorinis), langelis $d4$, langelis atkarpos D dešinėje (o ne $d1$).
Ketvirta, imkime tokį pavyzdį: sąlygos piešinyje atkarpą C nuleiskime žemyn per vieną langelį (žr. 4 pav.)


4 pav.


5 pav.

Dabar mažiausias vidinės srities langelių skaičius jau ne 8, o 7 (žr. 5 pav.), ir ne taip jau lengva paaiškinti, kuo pažymėtųjų maršruto atkarpų padėtis dabar mažiau varžanti.
Taigi grįžkime prie mūsų uždavinio:
Įrodykite, kad jeigu uždaras maršrutas eina per pažymėtas atkarpas A, B, C, D, tai jo viduje yra mažiausiai 8 langeliai.
Iš pradžių padarykime kelias paprastas pastabas.
1) Sąlygą tenkinantis maršrutas dalija plokštumą į dvi sritis — išorinę ir vidinę, todėl iš dviejų pažymėta atkarpa besiliečiančių langelių vienas būtinai priklauso vidinei sričiai, kitas — būtinai išorinei.
2) Vidinė sritis — tai daugiakampis, sudarytas iš kvadratėlių, ir iš kiekvieno jos kvadratėlio yra kelias į bet kurį kitą kvadratėlį. Kelią sudaro langeliai (pavyzdžiui, vienas iš kelių iš $d1$ į $b4$ yra langeliai $d1$, $c1$, $c2$, $b2$, $b3$, $b4$, paimti būtent tokia tvarka), tuo tarpu maršrutą sudaro atkarpos.
3) Jeigu du langeliai yra „tuščio“ stačiakampio $m \times n$ priešinguose kampuose, tai bet kuris trumpiausias kelias iš vieno į kitą yra $m + n - 1$ langelis ir visas kelias yra stačiakampyje. (Suprantama, jeigu stačiakampyje yra pažymėtų atkarpų, tai trumpiausias kelias gali tik pailgėti.) Pavyzdžiui, kiekvienas trumpiausias kelias iš langelio $d1$ į langelį $b4$ yra stačiakampyje $d1 - d4 - b4 - b1$, kurio matmenys 4×3, taigi lygus $3 + 2 + 1 = 6$ (iš pradinio langelio tris kartus reikės kilti į viršų, du kartus judėti į kairę). Aišku, kad tame kelyje kiekvienas langelis yra ne žemiau ir ne dešiniau už ankstesnį, todėl, pavyzdžiui, tokiame kelyje negali kartu būti langeliai $c4$ ir $b2$ (juk jeigu ankstesnis kelyje būtų $c4$, tai $b2$ būtų žemiau jo; o jeigu ankstesnis būtų $b2$, tai $c4$ būtų dešiniau jo).
Dabar jau pasiruošėme įrodyti, kad bet kurio sąlygą tenkinančio maršruto viduje yra ne mažiau kaip 8 langeliai.
Tarkime priešingai, — kad radome maršrutą, kurio vidinę sritį sudaro 7 ar mažiau langelių. Nagrinėkime trumpiausią kelią toje srityje nuo atkarpos D iki atkarpos B (žr. 6 pav.).



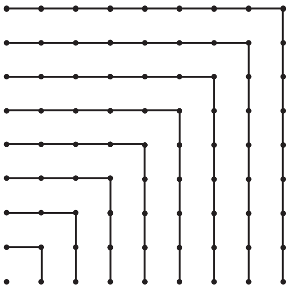
6 pav.

Sakykime, kad vidiniai langeliai prie tų atkarpų yra $d1$ ir $b4$ (jeigu tai langeliui $d1$ gretimas langelis atkarpos D dešinėje, tai įrodyti viską dar paprasčiau, nes kelias tik pailgėja; tas pats pasakytina apie langelį $b5$). Trumpiausią kelią iš $d1$ į $b4$ vidinėje srityje galėtų sudaryti arba 7 langeliai (daugiau langelių srityje tiesiog nėra), arba 6 langeliai (nes trumpesnio kelio iš $d1$ į $b4$ tiesiog nebūna). Bet jokio 7 langelių kelio iš $d1$ į $b4$ paprasčiausiai būti negali. Einant tuo keliu reikėtų padaryti lyginį žingsnių skaičių horizontaliai ir nelyginį žingsnių skaičių vertikaliai, o tai reikštų, kad kelią sudaro lyginis langelių skaičius. Vadinasi, tą trumpiausią kelią sudaro 6 langeliai. Kelias negali eiti per langelį $c4$ (arba per $d4$), nes tada jis neitų per langelius $b2$ ir $b3$ (šie kelyje žemiau), o tada iš kelio pasiekti 1 ėjimu nė laukelio $a2$, nė laukelio $a3$ būtų neįmanoma. Prie 6 langelių kelio prisidėtų mažiausiai 2 langeliai, ir srityje būtų ne mažiau kaip 8 langeliai. Prieštara.
Jeigu kelias neina nei per $c4$, nei per $d4$, o jo ilgis yra 6, tai jis kaip trumpiausias yra stačiakampyje $b1 - b4 - d4 - d1$. Bet be tų 6 langelių vidinėje srityje turi būti bent vienas iš langelių $a2$ ir $a3$, taip pat bent vienas iš langelių $c4$ ir $d4$. Srityje jau radome 8 langelius. Prieštara — juk tarėme, kad vidinę sritį sudaro mažiau kaip 8 langeliai. Teiginys įrodytas.
Teisingas atsakymas **A**.

B17. Ⓑ 9×9

! Žinoma, rasti sumą galima ir be paveikslėlio. Sumoje yra 4 poros po 20 — tai $3 + 17$, $5 + 15$, $7 + 13$, $9 + 11$. Taigi suma yra $1 + 4 \cdot 20 = 81$, o tai yra $9 \cdot 9$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Kaip tai ir pataria sąlygos paveikslėlis, kvadrato taškus galima suskaičiuoti dviem būdais: skaičiuojant „kampais“ arba įprastiniu būdu — eilutėmis ir stulpeliais.

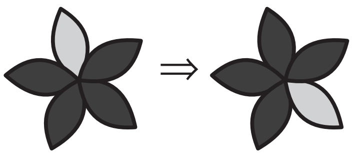


Jeigu prie sąlygos paveikslėlio pripieštume dar „kampus“ su 9 taškais, su 11, su 13, su 15 ir su 17 taškų, tai prašomą sumą galima rasti: 1) sudėjus kampų kraštinėse esančių taškų skaičius, $1+3+5+7+9+11+13+15$; 2) pastebėjus, kad taškai užpildo kvadratą 8×8, kuriame yra 9 eilutės po 9 skaičius, taigi $9 \cdot 9$. Kadangi abiem būdais gauname bendrą kvadrato taškų skaičių, tai

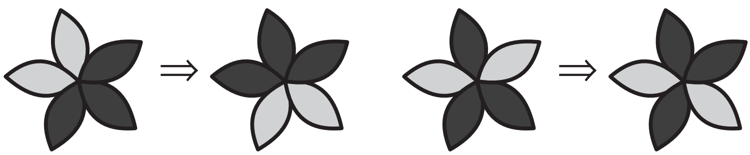
$$1+3+5+7+9+11+13+15 = 9 \cdot 9.$$

B18. Ⓒ 8

! Sąlygos paveikslėlis reiškia, kad dvi gėlytės laikomos vienodomis, jei žiedlapių spalvas galima sutapdinti posūkiu. Suskaičiuokime, kiek gali būti skirtingų gėlyčių. Raudonai gali būti nuspalvinti 0, 1, 2, 3, 4, 5 žiedlapiai. Jeigu raudonų žiedlapių 0, tai visi lapeliai geltoni, ir turime 1 gėlytę.

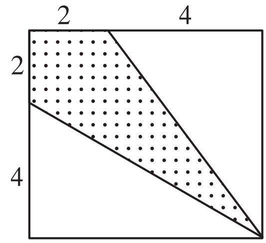


Jeigu raudonas žiedlapis 1, tai dvi tokias gėlytes visada galima sutapdinti, sutapdinus raudonuosius žiedlapius; vadinasi, įmanoma tik 1 gėlytė.



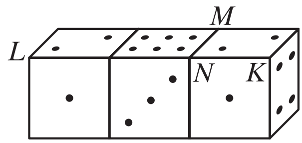
Jeigu raudonų žiedlapių 2, tai jie gali būti greta (2 tokias gėlytes sutapdinti paprasta — pasukame vieną iš jų taip, kad abu raudonieji žiedlapiai sutaptų — 1 gėlytė) arba atskirti 1 geltonu žiedlapiu (dvi tokias gėlytes vėl galima sutapdinti — užtenka sutapdinti minėtą geltoną žiedlapį, turintį 2 raudonus kaimynus, — dar 1 gėlytė). Jeigu raudonų žiedlapių 3, tai geltonų 2, o tada jau galime kalbėti apie geltonus žiedlapius, ir žinome, kad yra 2 skirtingos gėlytės.
Jeigu raudonų žiedlapių 4, tai geltonų — 1, ir turime 1 gėlytę. Jeigu raudoni visi žiedlapiai, tai geltonų 0, ir turime dar 1 gėlytę. Taigi iš viso turime $1+1+2+2+1+1 = 8$ skirtingas gėlytes.
Teisingas atsakymas **C**.

B19. Ⓐ $\frac{1}{3}$



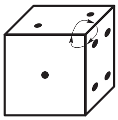
Neužtaškuoto vieno stačiojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$, abiejų trikampių plotas lygus $2 \cdot 12 = 24$, todėl užtaškuotas plotas lygus $6 \cdot 6 - 24 = 12$. Vadinasi, jis sudaro $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ kvadrato ploto.
Teisingas atsakymas **A**.

B20. Ⓒ 14



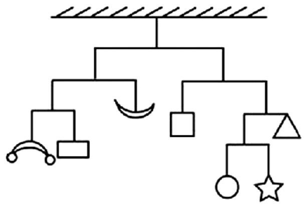
Dešiniojo kubelio kairioji siena turi $7 - 4 = 3$ akutes. Norisi manyti, kad lygiai taip pat kairiojo kubelio kairioji siena turi 3 akutes, dešinioji — 4 akutes. Tada viskas būtų aišku: į ieškomą sumą įeitų dešiniojo kauliuko kairioji siena (3 akutės), kairiojo kauliuko dešinioji siena (4 akutės) ir vidurinio kauliuko šoninių sienų akutės (o jų kaip priešingų sienelių suma 7). Iš viso turėtume $3 + 4 + 7 = 14$ akučių.
Renkamės atsakymą **C**.

O ar negali mūsų uždavinys turėti kito atsakymo? Ar tikrai kairiojo kubelio dešinioji sienelė — 4 akutės? O gal iš viso pavaizduota trijų kubelių konstrukcija neįmanoma? (Kad klausimas ne bergždžias, paaiškėja uždavus, pavyzdžiui, tokį klausimą: ar galėtų vidurinio kubelio priekinėje sienelėje būti dvi akutės?) Dažniausiai į tokius klausimus galima atsakyti nagrinėjant vadinamąją orientaciją. Įsivaizduokime, kad mes esame kubelio išorėje prie pat dešiniojo kubelio viršūnės, kurioje susikerta 1, 2 ir 4 akučių sienelės. Tada mes matome (neužstotas) tas tris sieneles, be to, sienelės akučių didėjimo tvarka išsidėsčiusios pagal laikrodžio rodyklę:



Dabar pagalvokime, kas atsitiktų, jeigu kairiojo kauliuko kairioje sienelėje būtų 4 akutės. Tada iš viršūnės L, kurioje susieina 1, 2 ir 4 akučių sienelės, jas matytume išsidėsčiusias prieš laikrodžio rodyklę! Vadinasi, kairysis ir dešinysis kauliukai nebūtų vienodi (o sąlyga to reikalauja, dar įdomiau — kauliukai nebūtų net simetriški: simetriško kauliuko viršutinėje sienelėje dvi akutės eitų ne • •, o • •).
O ką gi mes dešiniajame kauliuke matytume iš viršūnės M? Ten susieina sienos su 2 (viršutinė), 3 (kairioji) ir 6 akutėmis (užpakalinė siena), ir jeigu eisime sienelėmis kryptimi $2 \to 3 \to 6$, tai eisime pagal laikrodžio rodyklę. Dabar jau aišku: vidurinio kauliuko dešinioji siena yra 2, nes sienas apeidami $2 \to 3 \to 6$, taško N atžvilgiu eisime pagal laikrodžio rodyklę (o jeigu 2 akutės būtų dešinėje, tai žiūrint iš taško N kryptis $2 \to 3 \to 6$ būtų kryptis prieš laikrodžio rodyklę). Taigi vidurinio kauliuko kairioji sienelė yra 5 akutės, dešinioji — 2, užpakalinė — 4, apatinė — 1 akutė. Vadinasi, pavaizduota kubelių padėtis įmanoma.
Teisingas atsakymas **C**.

B21. Ⓑ 7



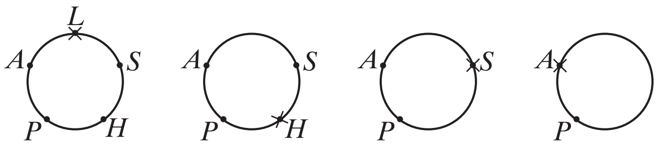
Eikime nuo viršaus žemyn. Kadangi kairė sistemos pusė atsveria dešinę, tai jos sveria po lygiai, po 56 gramus. Panašiai trikampis, skritulys ir žvaigždė sveria $56 : 2 = 28$ gramus, skritulys ir žvaigždė $28 : 2 = 14$ gramų, o viena žvaigždė sveria $14 : 2 = 7$ gramus.
Teisingas atsakymas **B**

B22. D 48

Kalbant apie ančiuvius picoje, yra 2 galimybės — su ančiuviais ir be ančiuvių. Kalbant apie artišokus — vėl 2 galimybės. Pagal sandaugos taisyklę turime 4 galimybes. Jeigu galvosime ir apie grybus, tai galimybių pasidarys $4 \cdot 2 = 8$, o jeigu atsižvelgsime ir į kaparius, tai jų bus $8 \cdot 2 = 16$. Vadinasi, skirtingo skonio picų yra 16. Bet kadangi kiekvieno skonio yra 3 picos — maža, vidutinė ir didelė, tai picų bus 3 kartus daugiau, $16 \cdot 3 = 48$.
Teisingas atsakymas **D**.

B23. B Sigutei

Sakykime, kad pradedame skaičiuoti nuo Linos. Kadangi skaičiuotėje 6 skiemenys, tai šeštą skiemenį ČIA ištars Lina ir ji iškris (žr. 1 pav.). Lieka 4 vaikai (žr. 2 pav.), o skaičiuotę pradeda Sigutė.

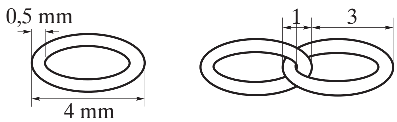


1 pav. 2 pav. 3 pav. 4 pav.

Dabar iškrenta Henrikas. Lieka 3 vaikai (žr. 3 pav.), o skaičiuotę pradeda Paulina — iškrenta Sigutė. Lieka 2 vaikai (žr. 4 pav.) — Paulina ir Arūnas, o skaičiuotę pradeda Paulina. Kadangi lyginius skiemenis ištars Arūnas, tai jis ištars ir šeštą skiemenį, taigi iškris. Lieka Paulina.
Norint, kad liktų Arūnas, reikia, kad viskas pasisuktų per vieną pagal laikrodžio rodyklę. Vadinasi, jeigu pradėsime nuo Sigutės (o ne nuo Linos), tai paskutinis išliks Arūnas. Jam ir atiteks paskutinis pyrago gabalas. Žinoma, galima ir pasitikrinti: pradėję nuo Sigutės, įsitikinsime, kad paskutinis lieka Arūnas.
Teisingas atsakymas **B**.

B24. D 16

Jei prie vieno žiedo (tokios „grandinėlės“ ilgis 4 mm) prijungsime antrą žiedą, tai grandinėlė pailgės $4 - 2 \cdot 0{,}25 = 3$ milimetrais.



Vadinasi, jei prie pirmo žiedo prijungti dar 4 žiedai, tai grandinėlė susideda iš 5 žiedų, ji pailgės 4 kartus po 3 mm, ir bus lygi $4 + 4 \cdot 3 = 16$ milimetrų.
Teisingas atsakymas **D**.

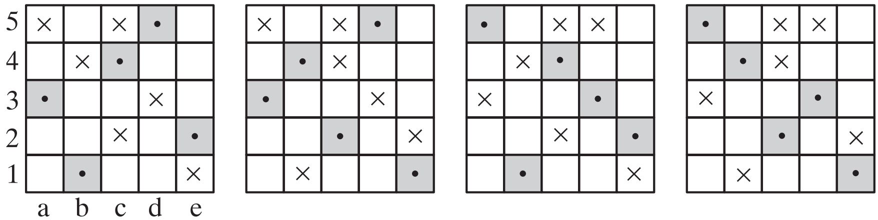
B25. D 17

Iš duotosios lygybės $\overline{PPQ} \cdot Q = \overline{RQ5Q}$ išplaukia, kad $Q \cdot Q$ baigiasi skaitmeniu Q, todėl $Q = 0$, $Q = 1$, $Q = 5$ arba $Q = 6$ (tai matome iš daugybos lentelės, bet galima įrodyti ir netikrinant: $Q \cdot Q - Q = Q(Q-1)$ baigiasi 0, taigi arba Q, arba $Q-1$ dalijais iš 5; vadinasi, $Q = 0, 5, 1, 6$). Bet 0 ir 1 per maži — dešinėje negautume keturženklio skaičiaus. Netinka ir 5: tada būtų $\overline{PP5} \cdot 5 = \overline{R555}$, ir kairė pusė dalijasi iš $5 \cdot 5 = 25$, o dešinė nesidalija — skaičiaus 25 kartotinių dviženklė galūnė turi dalytis iš 25. Vadinasi, $Q = 6$, ir turime $\overline{PP6} \cdot 6 = \overline{R656}$. Kadangi $6 \cdot 6 = 36$, tai $6 \cdot P$ baigiasi 2, t. y. $P = 2$ arba $P = 7$. Bet $226 \cdot 6 = 1356$, taigi netinka, ir lieka $P = 7$, $776 \cdot 6 = 4656$. Komplektas $P = 7$, $Q = 6$, $R = 4$ tenkina uždavinio sąlygą, o $P + Q + R = 17$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Nurodysime dar kelis būdus, kaip galima spręsti lygtį $\overline{PP6}\cdot 6 = \overline{R656}$. Atėmę iš jos $6\cdot 6 = 36$, turime $\overline{PP0}\cdot 6 = \overline{R620}$, o padauginę iš 5 (tai patogiau nei dalyti iš 2) — lygtį $\overline{PP0}\cdot 30 = 5\cdot\overline{R620}$, arba $\overline{PP0}\cdot 3 = 5\cdot\overline{R62}$. Dešinė pusė baigiasi 10, todėl kairėje P gali būti tik 7. Gavome tą patį sprendinį. Galima remtis ir dalumu. Lygties $\overline{PP6}\cdot 6 = \overline{R656}$ kairė pusė dalijasi iš 3, todėl $R+6+5+6$ dalijasi iš 3, ir $R = 1$, 4 arba 7. Bet $R = 7$ netinka — kairė pusė mažesnė už $999\cdot 6 < 1000\cdot 6 = 6000$. Netinka ir $R = 1$, nes $1656 : 6 = 276$, bet čia pirmi du skaitmenys nesutampa. Vadinasi, $R = 4$, $\overline{PP6} = 4656 : 6 = 776$, taigi $P = 7$.

B26. Ⓒ 6

? Lengvas uždavinys — po vieno kito bandymo gauname reikiamą lentelę (kurią nors iš 1–4 pav.). Čia kryžius reiškia baltai perspalvintą buvusį juodą laukelį, o skrituliukas — nagrinėjamą juodą langelį, paliktą neperspalvintą.



1 pav. 2 pav. 3 pav. 4 pav.

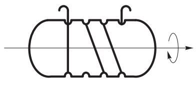
Žinoma, galima beveik nespėlioti. Žymėsime langelius šachmatiškai (žr. 1 pav.). Perspalvinkime, pavyzdžiui, langelį $a5$ (2 pav.). Tada turi būti neperspalvintas langelis $a3$, nes stulpelyje a turi būti juodas langelis. Vadinasi, reikia perspalvinti langelį $d3$ (kitaip 3 eilutėje bus du juodi langeliai). Teks palikti juodą $d5$, bet tada reikės perspalvinti $c5$. Dabar palikime juodą $c4$, o perspalvinkime $b4$. Vadinasi, liks juodas $b1$, perspalvintas $e1$, juodas $e2$ ir perspalvintas $c2$. Perspalvinome 6 langelius. Renkamės atsakymą **C**.

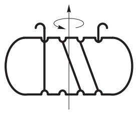
! O gal kitaip spalvindami gausime kitą atsakymą? Pagalvokime. Kadangi pradinėje lentelėje yra 11 juodų langelių, o turi likti 5 (kiekvienoje eilutėje po vieną), tai perspalvinti reikės 6 langelius. Tai reiškia, kad atsakymas gali būti tik **C** (6 perspalvinti langeliai) arba **E** (jeigu nepavyktų to padaryti). Bet jeigu jau žinome, kad tai padaryti pavyksta, tai atsakymas gali būti tik **C**.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Raskime visus perspalvinimo būdus. Nagrinėsime 2 variantus: pirmame variante perspalvinsime $a5$, antrame variante — paliksime juodą.
Pradedame: $a5\times$ (tai reiškia, kad langelį $a5$ perspalvinome) $\to$ $c3\bullet$ ($c3$ teko palikti juodą) $\to$ $d3\times \to d5\bullet \to c5\times$. Dabar turime dvi galimybes — $c4$ palikti juodą arba perspalvinti. Pirmą galimybę jau nagrinėjome anksčiau: $c4\bullet \to c2\times \to e2\bullet \to e1\times \to b1\bullet$ (žr. 1 pav.).
Antra galimybė $c4\times \to c2\bullet \to e2\times \to e1\bullet \to b1\times$ (žr. 2 pav.)
Antrame variante $a5$ paliksime juodą. Tada $a5\bullet \to a3\times \to d3\bullet \to d5\times$. Vėl turime dvi (lygiai tokias pat, kaip ir anksčiau) galimybes: $c4\bullet \to c2\times \to e2\bullet \to e1\times \to c1\bullet \to b4\times$ (žr. 3 pav.) ir $c4\times \to c2\bullet \to e2\times \to e1\bullet \to b1\times$ (žr. 4 pav.).
Įdomu, kad maršrutus $a5 \to a3 \to d3 \to d5$ ir $c4 \to c2 \to e2 \to e1 \to b1 \to b5$ spalviname nepriklausomai (vieno jų spalvinimas neturi jokios įtakos kito spalvinimui). Kiekvieną maršrutą spalvinti yra 2 galimybės — pirmą langelį perspalvinti arba palikti juodą, kiti langeliai spalvinami pakaitomis. Vadinasi, bendras galimybių skaičius yra $2\times 2 = 4$. Tai jau ir matėme.

B27. Ⓑ

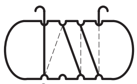
? Kaip sufleruoja atsakymai, lentelė gali būti apversta (t. y. pasukta 180° kampu apie horizontailąją ašį, 1 pav.) arba neapversta (t. y. pasukta 180° kampu apie vertikaliąją ašį, 2 pav.).


1 pav.

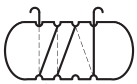

2 pav.

Pirmu atveju „kabliukai“ atsiduria apačioje, taigi reikia įsižiūrėti į paveikslėlius **B**, **C** ir **D**. Atsakymai **C** ir **D** atkrinta — tarp kabliukų abiejose įraižose turi būti viela. Antru atveju nagrinėjame **A** ir **E** (juose kabliukai viršuje). Atsakymas **E** vėl netinka dėl tos pačios priežasties — tarp kabliukų abiejose įraižose turi eiti viela. Netinka ir atsakymas **A** — sąlygos paveikslėlyje iš dešiniojo kabliuko viela neina priekinėje pusėje, taigi ji eina užpakalinėje pusėje. Lentelę apsukus tas kabliukas taps kairiuoju, o iš jo viela neina. Taigi liko vienintelis atsakymas.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pamėginkime įsitikinti, kad tikrai atsakymo **B** paveikslėlis teisingas. Sąlygos paveikslėlyje brūkšinine linija pažymėkime, kaip viela eina kitoje lentelės pusėje (žr. 3 pav.) — vaizdą „matome“ tokį, kaip paveikslėlyje **A**.


3 pav.

Taigi apsukę lentelę apie vertikaliąją ašį, gausime paveikslėlį (žr. 4 pav.), simetrišką paveikslėliui **A**:


4 pav.

Žinoma, tą patį gausime, jei paveikslėlį **B** pasuksime jo plokštumoje apie centrą 180° kampu.
Teisingas atsakymas **B**.

B28. Ⓔ 118

! Sąlygos paveikslėlyje matome, kad salėje žiūrovų vietos viduryje atskirtos praėjimu. Į kairę nuo praėjimo yra vietos su nelyginiais numeriais, į dešinį — su lyginiais. Kiekvienoje eilėje numeriai didėja einant tolyn nuo praėjimo. Taip pat matome, kad už kiekvienos kėdės yra kėdė, kurios numeris didesnis 20. Tai reiškia, kad kiekvienoje eilėje yra 20 vietų. Sudarykime vietų schemą tos salės dalies, kur yra 100 vieta, taip pat 76, 94, 99, 104 ir 118 vietos. Matome, kad iš minėtų vietų arčiausiai 100-osios vietos yra 118. Todėl Beatričei reikėtų pirkti bilietą į tą vietą.

119	117	· · · · · · ·	103	101
99	97	· · · · · · ·	83	81
79	77	· · · · · · ·	63	61

102	**104**	106	108	110	112	114	116	**118**	120
82	84	86	88	90	92	94	96	98	**100**
62	**64**	66	68	70	72	74	76	78	80

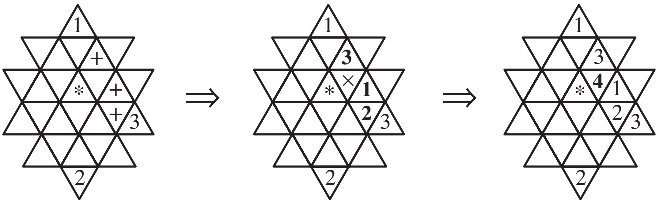
Teisingas atsakymas **E**.

B29. Ⓑ Tik 2

Sąlygoje nurodytus lygiagretainius iš 4 trikampių vadinkime standartiniais. Nagrinėkime 5 trikampius, kaip parodyta 1 pav.

1 pav.

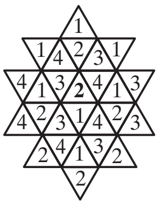
Juose įrašytus skaičius pažymėkime a, b, c, d, e. Skaičiai a, b, c, d yra viename standartiniame lygiagretainyje. Todėl tarp jų po vieną kartą yra skaičiai 1, 2, 3, 4. Bet ir tarp skaičių b, c, d, e po vieną kartą yra visi skaičiai 1, 2, 3, 4. Kadangi šiuose dviejuose rinkiniuose skaičiai b, c, d sutampa, tai ir kevirtieji skaičiai sutampa, t. y. $a = e$.
Tuo remdamiesi galime papildyti duotąją lentelę (2 pav.) skaičiais 1, 2, 3.



2 pav.

Dabar aišku, kad trikampyje, pažymėtame žvaigždute, negali būti nei 1, nei 2, nei 3, o gali būti tik 4. Taigi arba tokios lentelės iš viso nėra, arba žvaigždutė reiškia 4. Kadangi atsakymuose nekalbama apie tai, kad lentelės užpildyti neįmanoma, tai tinka tik atsakymas **B**.
Renkamės atsakymą **B**.

Kad sprendimas būtų pilnas, užpildome lentelę iki galo (3 pav.).



3 pav.

Teisingas atsakymas **B**.

B30. Ⓒ Žaliasis

Šešiakojai ir aštunkojai (tiesakalbiai) visada sako tiesą. Todėl jei jų būtų 2 ar daugiau, tai turėtume vienodų atskymų. Vadinasi, tiesakalbių tarp susirinkusių galvakojų yra vienas arba nėra nė vieno, o likusieji — melagiai, t. y. septynkojai. Sakykime, kad tiesakalbių nėra, tada visi 4 galvakojai turi $7 \cdot 4 = 28$ kojas. Vadinasi, mėlynasis galvakojis sako tiesą, taigi jis nėra melagis, — prieštara.
Vadinasi, tiesakalbis yra vienas, jis turi 6 arba 8 kojas, o likusieji 3 yra melagiai ir kartu turi $3 \cdot 7 = 21$ kojas. Taigi, visi 4 galvakojai turi $21 + 6 = 27$ arba $21 + 8 = 29$ kojas. Kojų tikrai nėra 29: jei taip būtų, tiesakalbis būtų tą ir pasakęs, o tokio atsakymo nėra. Todėl galvakojai turi 27 kojas, o tai pasakė žaliasis galvakojis (jis, žinoma, turi 6 kojas).
Teisingas atsakymas **C**.

KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. Ⓒ 404

! Galima visus skaičius paprasčiausiai sudėti iš eilės, bet žymiai įdomiau ir greičiau juos sugrupuoti. Pastebime, kad sumos $12+89$, $23+78$, $34+67$, $45+56$ lygios, kiekviena jų yra 101, taigi iš viso gauname $4 \cdot 101 = 404$.
Teisingas atsakymas **C**.

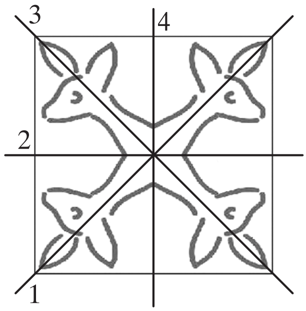
!! Galima skaičiuoti ir kitaip. Sumažinkime kiekvieną dėmenį vienetu. Tada reikės sudėti

$$\begin{aligned}
&11 + 22 + 34 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 = \\
&\quad = 11 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 11 + 8 \cdot 11 = \\
&\quad = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 11 = 36 \cdot 11 = 396.
\end{aligned}$$

Ieškomoji suma 8 didesnė, taigi lygi 404.

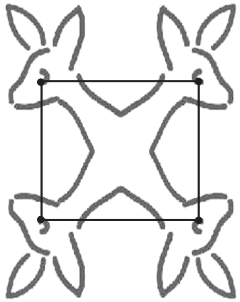
K2. Ⓒ 2

! Kadangi figūrai priklauso kvadratas, tai kiekviena figūros simetrijos ašis bus ir kvadrato simetrijos ašis. Kvadratas turi 4 simetrijos ašis — dvi (paveikslėlyje 1 ir 3 ašys) eina per įstrižaines, o kitos dvi (2 ir 4) — per priešingų kraštinių vidurius.



Iš karto matome, kad įstrižainės ašys netinka — jos nėra paveikslėlio simetrijos ašys, pvz., simetrija 3 tiesės atžvilgiu kengūrėlės akies į akį neatvaizduoja. O štai 2 ir 4 tiesės yra paveikslėlio simetrijos ašys. Pavyzdžiui, simetrija 4 tiesės atžvilgiu kiekvieną kairiųjų kengūrų galvų fragmentą atvaizduoja į atitinkamą dešiniųjų kengūrų atitinkamą fragmentą: akis pereina į akį, snukutis — į snukutį.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Sunkiau būtų spręsti uždavinį, jei paveikslėlyje nebūtų kvadrato.

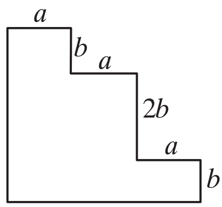


Bet dabar galima imti, pavyzdžiui, keturias kengūrėlių akis — jos yra kvadrato viršūnėse, Tolesnis sprendimas jau panašus.

K3. Ⓓ 4

Sakykime, kad mažosios dėžutės briauna lygi 1. Tada jos tūris taip pat lygus 1. Kadangi 8 mažosios dėžutės užima visą didžiąją dėžę, tai dėžės tūris lygus 8. Vadinasi, dėžės briauna lygi 2 (nes $2^3 = 8$). Todėl dugne dėžutės dengia kvadratą 2×2, vadinasi, jų apatiniame sluoksnyje yra 4.
Teisingas atsakymas **D**.

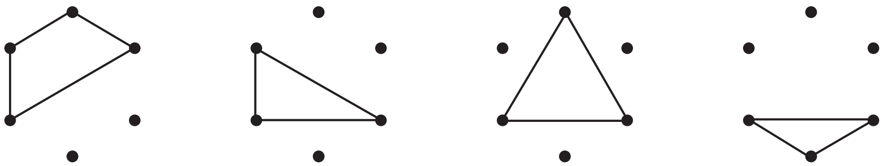
K4. Ⓔ $6a + 8b$



Kadangi dešinėje į viršų kylame per $b + 2b + b = 4b$, tai figūros kairioji kraštinė lygi $4b$. Į dešinę nuo kairiojo viršutinio kampo einame per $a + a + a = 3a$, todėl tokia ir apatinė kraštinė. Vadinasi, figūros perimetras lygus $2 \cdot 4b + 2 \cdot 3a = 6a + 8b$.
Teisingas atsakymas **E**.

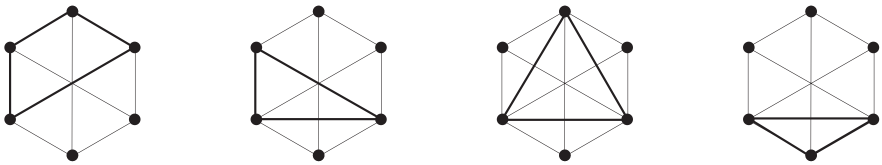
K5. Ⓒ Kvadratas

Lengva gauti trapeciją, statųjį trikampį, lygiakraštį trikampį, bukąjį trikampį:

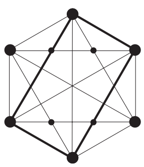


Kvadrato gauti neišeina.
Renkamės atsakymą **C**.

Įrodykime, kad gautos figūros tikrai yra trapecija, statusis trikampis, lygiakraštis trimapis, bukasis trikampis.



Padalykime šešiakampį į 6 lygiakraščius trikampius. Sakykime, kad šešiakampio kraštinė (taigi ir visos trikampių kraštinės) lygi 1. Tad pirmos figūros kampai prie šoninės kraštinės yra 60° ir 120°, todėl pagrindai lygiagretūs ir nelygūs (ilgiai 1 ir 2), vadinasi tai — ne lygiagretainis, o trapecija. Antros figūros — trikampio didysis kampas lygus $60° + 30° = 90°$, vadinasi, tai statusis trikampis. Trečios figūros — trikampio kiekvienas kampas lygus $30° + 30° = 60°$, vadinasi, trikampis yra lygiakraštis. Pagaliau ketvirtos figūros trikampio didysis kampas yra $60° + 60° = 120°$, taigi trikampis yra bukasis. Kiek sunkiau įrodyti, kad jungdami šešiakampio viršūnes, kvadrato negausime. Iš tikrųjų, tarkime, kad mums pavyko gauti kvadratą. Imkime, bet kurią kvadrato viršūnę.



Iš jos išeina 2 šešiakampio kraštinės ir 3 įstrižainės, o statųjį kampą sudaro kraštinė ir įstrižainė. Bet tos įstrižainės ilgis mažesnis už $1 + 1$ (bukojo trikampio kraštinė), o jos pusės ilgis mažesnis už 1 (nes tai lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi 1, aukštinė). Kadangi minėtos šešiakampio kraštinės ilgis 1, tai nagrinėjamo stačiojo kampo kraštinės nėra kvadrato kraštinės.
Teisingas atsakymas **C**.

K6. E 45

Kadangi pirmųjų trijų skaičių suma 33, tai jų vidurkis 11, todėl tai — skaičiai 10, 11, 12. Visi 7 skaičiai — tai 10, 11, 12, 13, 15, 15, 16, ir paskutiniųjų trijų suma lygi 45.
Teisingas atsakymas **E**.

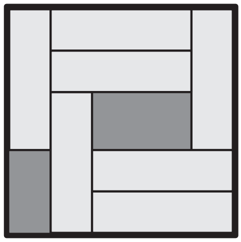
Galima skaičių ir nenustatinėti. Pirmo trejeto skaičių suma 33. Antro trejeto (nuo antro iki ketvirto) suma bus 3 didesnė, o priėjus penktą trejetą, ji padidės $3 \cdot 4 = 12$. Vadinasi, ieškoma suma lygi 45.

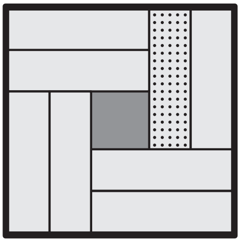
K7. C 19

Padarius 1 pjūvį, gabalų (rastų ar rastigalių) skaičius padidėja vienetu. Kadangi 53 vienetais padidėjęs rąstų skaičius tapo 72, tai pradinis rąstų skaičius buvo lygus $72 - 53 = 19$.
Teisingas atsakymas **C**.

K8. B 3

Dabar dėžutėje galima pajudinti tik kairiąją plytelę. Ją pastūmus iki apačios, judinti jau galima dvi viršutines plyteles. Tik jas abi pastūmę iki galo į kairę, galėsime padėti dar vieną plytelę (prisišliejusių prie dešiniosios).

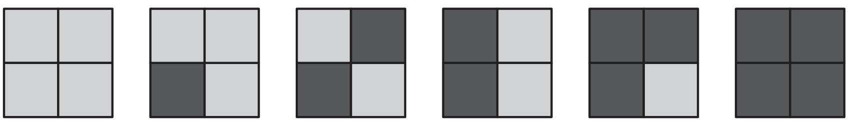




Kadangi 2 plyteles pastumti negana, o 3 pastumti užtenka, tai mažiausias pastumtų plytelių skaičius yra 3.
Teisingas atsakymas **B**.

K9. B 6

Jeigu visus kvadratėlius nuspalvinsime baltai, tai kad ir kaip sukiotume kvadratą, vaizdas bus tas pat — 1 būdas. Jeigu raudonai nuspalviname 1 kvadratėlį, tai kvadratą galima pasukti taip, kad tas langelis būtų kairysis viršutinis — turime 1 nuspalvinimo būdą.
Jeigu raudonai nuspalviname 2 kvadratėlius, tai turime arba du gretimus, arba 2 negretimus raudonus kvadratėlius. Kiekvienu atveju kvadratą galima pasukti taip, kad viršutinis kairysis langelis būtų raudonas, o viršutinis dešinysis — baltas, — 2 būdai.
Jeigu raudonai nuspalviname 3 kvadratėlius, tai kvadratą galima pasukti taip, kad ketvirtas — baltasis kvadratėlis būtų, pavyzdžiui, apatinis dešinysis — 1 būdas.



Jeigu raudonai nuspalviname visus 4 kvadratėlius — 1 būdas.
Taigi iš viso turime 6 nuspalvinimo būdus.
Teisingas atsakymas **B**.

K10. C 100

Būtų neišmintinga ieškoti kalbamųjų sumų, nors tai padaryti taip pat nesunku: pirmą sumą sudaro 50 porų po 202 $(2 + 220, 4 + 198, \ldots)$, antrą — 50 porų po 200 $(1 + 199, 3 + 197, \ldots)$. Taigi tų porų skirtumas lygus $50 \cdot 202 - 50 \cdot 200 = 50 \cdot 2 = 100$.
Bet žymiai geriau nieko nesumuoti: pirmas lyginis skaičius (2) vienetu didesnis už pirmą nelyginį (1), tą patį galima pasakyti apie antrus skaičius, ir t. t., o kadangi jų yra po 100, tai lyginių suma didesnė už nelyginių sumą 100 vienetų.
Teisingas atsakymas **C**.

K11. E 30

Gabalų skaičius turi dalytis iš 3, 5 ir 6, t. y. iš $\mathrm{BMK}(3, 5, 6) = 30$. Taigi jis galėtų būti, pavyzdžiui, 60, bet tarp atsakymų tėra vienintelis skaičiaus 30 kartotinis, ir tenka rinktis 30.
Teisingas atsakymas **E**.

K12. D 25

Pradėkime nuo mažiausio dviženklio skaičiaus 10 (jei jis tiks, tai jis ir bus ieškomasis). Bet $10 = 2 + 3 + 5$, taigi 10 galima išreikšti 3 skirtingų skaičių suma (žinoma, 10 išreikšti galima ir kitaip, pavyzdžiui, $10 = 1+4+5$). Tikriname $15 = 4+5+6$, — netinka. Tikriname $23 = 6+8+9$, — netinka. Lieka vienintelis atsakymas.
Renkamės atsakymą **D**.

Žinoma, įdomu įsitikinti, kad 25 nėra 3 vienaženklių suma. Bet tai gana akivaizdu: trijų didžiausių skirtingų vienaženklių suma lygi $7 + 8 + 9 = 24$, taigi 25 niekaip negausime.
Teisingas atsakymas **D**.

Sprendžiant užteko patikrinti vos kelis skaičius. Bet uždavinys galėjo būti suformuluotas truputį kitaip, pavyzdžiui:
Kuris iš skaičių yra mažiausias dviženklis toks, kad jo negalima išreikšti trijų skirtingų vienaženklių suma?
A 10 **B** 15 **C** 20 **D** 25 **E** Kitas atsakymas
Dabar jau nori nenori reikia patikrinti visus skaičius, mažesnius už 25. Tai nėra sunku, bet įdomiau bendresnis būdas. Jeigu ieškomasis dviženklis dalijasi iš 3, t. y. lygus $3k$ $(4 \leqslant k \leqslant 8)$, tai $3k = (k - 1) + k + (k + 1)$, o dėmenys vienaženkliai. Jeigu dalijamas iš 3 jis duoda liekaną 1, t. y. lygus $3k + 1$ $(3 \leqslant k \leqslant 7)$, tai $3k + 1 = (k - 1) + k + (k + 2)$.
Jei tai skaičius pavidalo $3k + 2$ $(3 \leqslant k \leqslant 7)$, tai $3k + 2 = (k - 1) + (k + 1) + (k + 2)$.
Įrodėme, kad mažesni už 25 dviženkliai skaičiai išreiškiami trijų vienaženklių suma, o 25 — neišreiškiamas. Taigi mažiausias neišreiškiamas skaičius yra 25.
Beje, jeigu sąlygoje būtų klausiama ne apie mažiausią dviženklį skaičių, o tiesiog apie mažiausią skaičių, tai toks būtų (neįdomus skaičius) 1. Neišreiškiami taip pat 2, 3, 4, 5, nes mažiausia 3 vienaženklių suma yra $1 + 2 + 3 = 6$. Didesni skaičiai (iki 24) — visi išreiškiami.

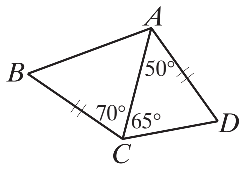
K13. D 45

Trijų žiedų grandinei padaryti reikia 2 sukabinimų. Vadinasi, vienam sukabinimui reikia 9 minučių. Kadangi 6 žiedams sujungti į grandinę reikia 5 sukabinimų, tai darbas truks $9 \cdot 5 = 45$ minutes.
Teisingas atsakymas **D**.

K14. B 55°

Kadangi $\angle ADC = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ$, tai ΔACD lygiašonis, $AC = AD$. Bet iš sąlygos tada $AC = BC$, todėl

$$\angle ABC = \angle BAC = (180^\circ - 70^\circ) : 2 = 55^\circ.$$



Teisingas atsakymas **B**.

K15. Ⓑ
Žr. Bičiulio 27 uždavinio sprendimą.

K16. Ⓒ 19

? Pažymėkime baltų, mėlynų ir raudonų plytelių skaičius pirmosiomis raidėmis — b, m, r. Pasirodo, kad visai neblogai šiame uždavinyje spėlioti. Kadangi baltų plytelių yra 11 kartų daugiau nei mėlynų, tai b — skaičiaus 11 kartotinis. Pagal sąlygą jis mažesnis už 50, taigi gali būti $b = 44$, 33, 22, 11.
Jei $b = 44$, tai $m = 4$, tada $r = 50 - 44 - 4 = 2$, bet tada raudonų plytelių nėra daugiau kaip mėlynų kaip kad to reikalauja sąlyga.
Jei $b = 33$, tai $m = 3$, tada $r = 50 - 33 - 3 = 14$. Visos uždavinio sąlygos išpildytos: raudonų plytelių mažiau nei baltų, bet daugiau nei mėlynų. Randame, kaip to prašo uždavinys, $b - r = 33 - 14 = 19$
Renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, nesunku įsitikinti, kad kiti du variantai netinka. Jei $b = 22$, tai $m = 2$, $r = 26$, bet tada raudonų daugiau nei baltų. Jei $b = 11$, tai $m = 1$, $r = 38$, ir vėl $r > b$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Žinoma, galima viską užrašyti simboliais:

$$b + m + r = 50,$$
$$b = 11m,$$
$$m < r < b.$$

Pakeitę b į $11m$, perrašome tai kaip

$$12m + r = 50,$$
$$m < r < 11m.$$

Į nelygybę įstatome iš lygties gautą r išraišką $r = 50 - 12m$. Tada

$$m < 50 - 12m < 11m,$$

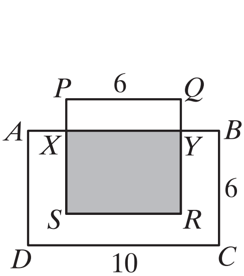
arba $13m < 50 < 23m$. Iš kairės nelygybės turime $m \leqslant 3$, iš dešinės $m \geqslant 3$. Vadinasi, $m = 3$.

K17. Ⓐ 1

! Kadangi $S_{ABCD} = 6 \cdot 10 = 60$, tai stačiakampio $XSRY$ plotas lygus 30. Todėl

$$SX = 30 : 6 = 5, \quad \text{o} \quad PX = PS - XS = 6 - 5 = 1.$$

Teisingas atsakymas **A**.



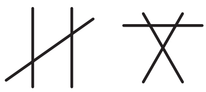
K18. Ⓑ 4

! Dvi tiesės plokštumą dalija į 3 arba 4 sritis:

Nagrinėkime pirmą atvejį. Jei trečia tiesė bus lygiagreti toms dviem, tai plokštuma bus padalyta į 4 sritis. Jei trečia tiesė kirs tas dvi, tai plokštuma bus padalyta į 6 sritis:

Antru atveju jei trečia tiesė bus lygiagreti kuriai iš tiesių, turėsime 6 sritis. Jei trečia tiesė eis per susikirtimo tašką, tai turėsime 6 sritis. Jeigu trečia tiesė neis per susikirtimo tašką, tai turėsime 7 sritis:

Taigi nustatėme, kad trijų tiesių dar neužtenka padalyti plokštumai į 5 sritis. O štai 4 tiesių užtenka:

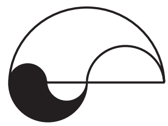


Beje, išvesti 4 lygiagrečias tieses — tai vienintelis būdas gauti 5 sritis. Iš tikrųjų, jei yra bent viena lygiagrečių tiesių pora, tai jau trečia tiesė duoda 6 sritis. Jei lygiagrečių tiesių nėra, tai jau 3 tiesės iškerta trikampį ir dalija plokštumą į 7 sritis.
Teisingas atsakymas **B**.

K19. E e

Pridėkime sąlygos lygybėje prie visų skaičių 5, tada $a + 4 = b + 7 = c + 2 = d + 9 = e$. Aišku, kad visi skaičiai a, b, c ir d mažesni už e.
Teisingas atsakymas **E**.

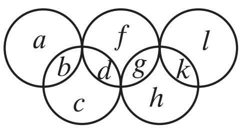
K20. B $\frac{1}{4}$



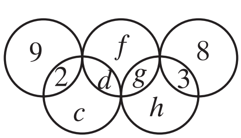
Išvedus didįjį skersmenį ir perkėlus apverstą 4 cm spindulio pusskritulį į dešinę, aišku, kad emblemos plotas lygus didžiajam pusskrituliui, $\pi \cdot 8^2/2 = 32\pi$. Pastūmę užtušuotą viršutinį pusskritulį ir jį apvertę, gausime užtušuotą 4 cm spindulio pusskritulį, kurio plotas $\pi \cdot 4^2/2 = 8\pi$.
Vadinasi, užtušuota $(8\pi) : (32\pi) = 8 : 32 = \frac{1}{4}$ emblemos dalis.
Teisingas atsakymas **B**.

K21. B 6

Aišku, kad spėti atsakymo neverta — geriau bandyti įrašinėti skaičius. Sužymėkime sritis iš kairės į dešinę taip.

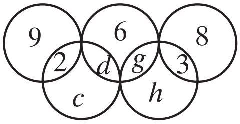


Kadangi skaičiai 9 ir 8 „dideli“, tai juos verta įrašyti į a ir l sritis — tų sričių skrituliai turi po mažiausiai skaičių (po du). Jeigu 9 įrašyti į sritį a, tai srityje b bus $11 - 9 = 2$, srityje l bus 8, srityje k bus $11 - 8 = 3$ (trumpai tai žymėsime $a = 9$, $b = 2$, $l = 8$, $k = 3$).

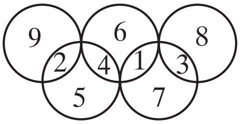


Kur dabar įrašyti 6? Sričiai d jis netinka, nes tada srityje c būtų $11 - 6 - 2 = 3$, bet trejetas jau panaudotas. Lygiai taip pat 6 netinka sritims c, h ir g. Vadinasi, 6 yra srityje f.
Renkamės atsakymą **B**.

! Kad spėjimas taptų sprendimu, pasižiūrėkime, ar pavyksta surašyti likusius skaičius taip, kad sąlyga būtų išpildyta. Tai padaryti nesunku ir paprasčiausiai bandant, bet įdomiau pasamprotauti.



Srityje d negali būti 1, nes tada srityje c atsirastų dar vienas aštuonetas. Skaičiai 2 ir 3 jau įrašyti. Vadinasi, srityje d stovi 4 (5 ar daugiau stovėti negali — tada „viduriniame“ skritulyje suma būtų didesnė už 11). Todėl srityje g yra $11 - 6 - 4 = 1$, srityje c yra $11 - 4 - 2 = 5$, srityje h įrašyta $11 - 1 - 3 = 7$.



Teisingas atsakymas **B**.

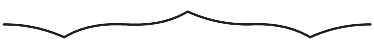
K22. Ⓒ 16

! Pasižymėkime paukščių „kainas“ pagal pirmas raides. Tada $k = 5g$, $z + 2v = 3g$, $z = 4v$. Įstatę z iš trečios lygties į antrą, turime $4v + 2v = 3g$, $g = 2v$. Pagaliau iš pirmos lygties $k = 5g$, $k = 10v$. Vadinasi, ūkininkas turi atsigabenti bent jau $g + z + k = 2v + 4v + 10v = 16v$, t. y. 16 vištų.
Liko įsitikinti, kad jas galima išsikeisti į kalakutą, žąsį ir gaidį. Bet ūkininkui reikia turėti 5 gaidžius, o juos jis gali gauti tik trejetais, taigi turėti bent 6 gaidžius, o tam reikia turėti 2 žąsis.
Keitimo planas aiškus: jis dukart keičia 4 vištas į 1 žąsį. Tada jis dukart keičia 1 žąsį ir 2 vištas į 3 gaidžius. Dabar ūkininkas turi 4 vištas ir 6 gaidžius. 5 gaidžius jis keičia į kalakutą, o 4 vištas į žąsį. Pagaliau jis turi kalakutą, gaidį ir žąsį, kaip ir norėjo.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima veikti ir nesusiskaičiavus, kiek kas kainuoja.
Kadangi jam reikės 5 gaidžių, tai jam teks įsigyti 6 gaidžius. Tam reikės 2 žąsų. Vadinasi, jis daro taip.
8 vištas Kvaklys keičia į 2 žąsis. Pridėjęs 4 vištas, tas žąsis jis išmaino į 6 gaidžius. Už 5 gaidžius jis gauna kalakutą, o žąsį dabar išsimaino už 4 vištas. Matome, kad Kvaklys turi atsivežti mažiausiai 16 vištų.

K23. Ⓓ

? Kiekvienu iš atvejų **A**–**E** matome juostelę, išlinkusią septyniose vietose. Kadangi juostelė pradžioje buvo perlenkta pusiau, tai pirmąją lenkimo liniją žymi vidurinis išlinkimas. Jei atveju **D** pakartotume pirmąjį juostelės lenkimą, tai, sutapus dviem juostelės dalims, gautume tokį vaizdą:



Antrąją lenkimo liniją vėlgi turi atitikti vidurinis išlinkimas. Bet jei dabar bandysime pakartoti antrąjį juostelės lenkimą, tai dvi juostelės dalys nesutaps (kad sutaptų, reikia, kad du šoniniai išlinkimai būtų nukreipti į priešingas puses – vienas į viršų, kitas į apačią, tačiau mūsų atveju jie abu nukreipti į apačią). Vadinasi, vaizdo **D** lankstant juostelę neįmanoma gauti.
Renkamės atsakymą **D**.

! Uždavinį baigiame spręsti, kai ir **D** patikrindami likusius variantus – mintyse kartodami lenkimus, įsitikiname, kad dvi suglaudžiamos juostelės dalys sutampa po kiekvieno lenkimo.
Teisingas atsakymas **D**.

K24. Ⓑ 5

! Įsivaizduokime, kad visos kortelės su ketvertais. Tada skaičių suma lygi

$$4 \cdot 18 = 72 = 17 \cdot 4 + 4.$$

Kad ji dalytųsi iš 17, reikia jį padidinti 13 vienetų. Vieną kortelę pakeitę didesne (su penketu) sumą padidiname 1. Vadinasi, reikia pakeisti 13 kortelių, o 5 kortelės liks su ketvertais.
Teisingas atsakymas **B**.

K25. Ⓒ 46

! Padarius vieną ėjimą, skaičių lentoje kiekis sumažėja vienetu, o visų skaičių suma — taip pat vienetu. Kadangi lentoje turi iš 10 skaičių likti 1, tai bus padaryti 9 ėjimai. Po jų skaičių suma

$$1 + 2 + \cdots + 10 = 11 \cdot 5 = 55$$

sumažės devynetu ir taps lygi

$$55 - 9 = 46.$$

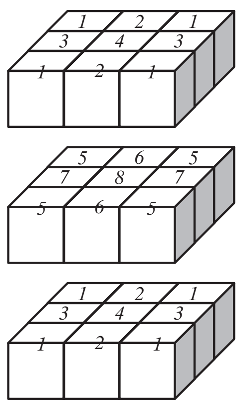
Teisingas atsakymas **C**.

K26. Ⓒ 4 ir 2

! Iš karto pastebime, kad pirmas — melagis: jei jis būtų tiesakalbis, tai negalėtų pasakyti „Visi mes esame melagiai“.
Vadinasi, pirmojo teiginiai — melas, todėl kambaryje yra daugiau kaip 3 žmonės, o tarp jų yra tiesakalbių. Todėl antrojo teiginys „Ne visi yra melagiai“ — tesingas, taigi jis tiesakalbis. Kadangi tada jo teiginys „Mūsų yra ne daugiau kaip keturi“ teisingas, tai kambaryje yra 4 žmonės.
Dabar nustatykime, kiek melagių yra tarp susitikusiųjų. Jau nustatėme, kad pirmasis — melagis. Melagis ir trečiasis, nes jis teigė, kas kambaryje yra 5 žmonės, o jų yra 4. Bet šis trečiasis teigė, kad melagių yra 3, vadinasi, melagių yra ne 3. Bet jų ir ne 4, — juk antrasis tiesakalbis. Taigi melagių ne daugiau kaip 2 — bet juk 2 melagius mes jau žinome. Vadinasi, melagių yra 2.
Teisingas atsakymas **C**.

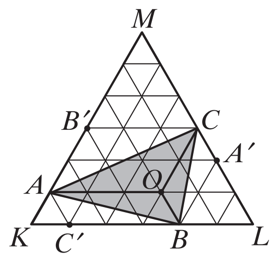
K27. Ⓑ 8

! Imkime kubą, sudėtą iš 8 vienetinių kubelių. Visi jie turi bendrą viršūnę kubo $2 \times 2 \times 2$ centre. Todėl aišku, kad kengūrytei mažiau kaip 8 spalvų neužteks. Bet turint 8 spalvas visai nesunku sudėti norimą kubą (žr. pav.). Jame spalvos sunumeruotos, o kubas pavaizduotas atskirais sluoksniais.



! **K28.** (A) 11

Iš trikampio ABC viršūnių trikampio tinklo linijomis prieikime tašką O (žr. pav.). Suskaidykime trikampį ABC į 3 trikampius: AOB, BOC, COA. Trikampio AOB plotas yra lygus 3, nes tai yra pusė lygiagretainio $AC'BO$ ploto, o šį sudaro 6 trikampiukai. Panašiai



$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} S_{BOCA'} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2, \quad S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} S_{AOCB'} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

Vadinasi, $S_{ABC} = 3 + 2 + 6 = 11$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Yra žinoma, kad bendrą kampą turinčių trikampių plotų santykis lygus tą kampą sudarančių kraštinių sandaugų santykiui. Taigi

$$S_{\Delta AMC} = S_{\Delta KLM} = (MA \cdot MC) : (MK : ML) = (MA : MK) \cdot (MC : ML) =$$
$$= (5 : 6) \cdot (3 : 6) = \frac{15}{36}.$$

Kadangi $S_{\Delta KLM} = 36$, tai $S_{\Delta AMC} = 15$. Panašiai

$$S_{\Delta AKB} : S_{\Delta MKL} = (1 : 6) \cdot (4 : 6) = \frac{4}{36}, \quad S_{\Delta AKB} = 4.$$

$$S_{\Delta CLB} : S_{\Delta MKL} = (3 : 6) \cdot (2 : 6) = \frac{6}{36}, \quad S_{\Delta CLB} = 6.$$

ΔABC plotą gauname iš ΔKLM ploto atėmę nagrinėtų trikampių plotus, todėl

$$S_{\Delta ABC} = 36 - 15 - 4 - 6 = 11 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

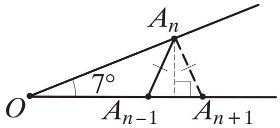
K29. (D) $\frac{6}{7}$

? Patikrinkime atsakymus **A**, **B**, **C**, **E**.
A) Kadangi $\frac{y}{x} = \frac{7}{8}$, tai $x = 8n$, $y = 7n$. Nagrinėkime MBK$(24, 8n)$ ir MBK$(24, 7n)$. Kai $n = 1$, tai pirmas skaičius lygus MBK$(24, 8) = 24$, o antras skaičius MBK$(24, 7) = 24 \cdot 7$, $24 < 24 \cdot 7$, taigi atsakymas **A** netinka.
B) Kadangi $\frac{y}{x} = \frac{8}{7}$, tai $x = 7n$, $y = 8n$. Nagrinėkime MBK$(24, 7n)$ ir MBK$(24, 8n)$. Kai $n = 1$, tai mažiausi bendrieji kartotiniai $24 \cdot 7 < 24 \cdot 8$, taigi atsakymas **B** netinka.
C) Kadangi $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, tai $x = 3n$, $y = 2n$. Nagrinėkime MBK$(24, 3n)$ ir MBK$(24, 2n)$. Kai $n = 16$, tai $48 < 96$, ir atsakymas **C** netinka.
E) Kadangi $\frac{y}{x} = \frac{7}{6}$, tai $x = 6n$, $y = 7n$. Nagrinėkime MBK$(24, 6n)$ ir MBK$(24, 7n)$. Kai $n = 1$, tai $24 < 24 \cdot 7$, ir atsakymas **E** netinka.
Kadangi atsakymasi **A**, **B**, **C**, **E** netinka, tai lieka vienintelis atsakymas.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kad sprendimas taptų išsamus, įsitikinkime, kad atsakymas **D** tikrai tinka. Tai reiškia, kad jeigu $\frac{y}{x} = \frac{6}{7}$, tai visada MBK$(24, x) \geqslant$ MBK$(24, y)$. Kadangi $x = 7n$, $y = 6n$, tai nagrinėsime MBK$(24, 7n)$ ir MBK$(24, 6n)$. Kadangi 24 neturi septynetų, tai MBK$(24, 7n) = 7$MBK$(24, n)$. Kita vertus, MBK$(24, 6n)$ gali turėti (bet nebūtinai turi turėti) tik 1 dvejetuku ir 1 trejetuku daugiau nei MBK$(24, n)$, t. y. MBK$(24, 6n) \leqslant 6$MBK$(24, n)$. Todėl pirmas mažiausiasis bendrasis kartotinis visada yra didesnis.
Teisingas atsakymas **D**.

K30. Ⓒ 13

! Tarkime, mums jau pavyko atidėti n atkarpų (paskutinioji iš jų $A_{n-1}A_n$; žr. brėžinį).



Kada mums pavyks atidėti $(n+1)$-ąją?
Pastebėsime, kad trikampis $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ turi būti lygiašonis ($A_{n-1}A_n = A_nA_{n+1}$), o taškas A_{n+1} turi būti atidėtas spindulyje OA_{n-1} į kitą pusę nuo A_{n-1} nei taškas O. Tada $\angle A_{n+1}A_{n-1}A_n$ turi būti smailusis (kaip lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo), bet $\angle OA_{n-1}A_n = 180^\circ - \angle A_{n+1}A_{n-1}A_n > 90^\circ$. Kita vertus, jei $\angle OA_{n-1}A_n > 90^\circ$, tai taškas A_{n+1}, simetriškas taškui A_{n-1} statmens iš A_n į OA_{n-1} atžvilgiu, tiks: tada $A_nA_{n-1} = A_nA_{n+1}$ dėl simetrijos to statmens atžvilgiu, o A_{n+1} yra kitoje pusėje nuo statmens nei taškas A_{n-1}, todėl ir kitoje pusėje nuo taško A_{n-1} nei taškas O.
Dabar išsiaiškinkime, kaip kinta $\angle OA_{n-1}A_n$ didėjant n ir kada atkarpas dar galima atidėti. Kai $n \geqslant 2$, tai

$$\begin{aligned}\angle OA_nA_{n+1} &= 180^\circ - \angle A_nOA_{n+1} - \angle OA_{n+1}A_n = \\ &= 180^\circ - 7^\circ - \angle A_{n-1}A_{n+1}A_n = \\ &= 173^\circ - \angle A_nA_{n-1}A_{n+1} = \\ &= 173^\circ - (180^\circ - \angle A_nA_{n-1}O) = \\ &= \angle OA_{n-1}A_n - 7^\circ\end{aligned}$$

($\Delta A_{n-1}A_nA_{n+1}$ lygiašonis). Taigi matome, kad kampas, kuris pradžioje (kai $n=1$) lygus

$$\angle OA_1A_2 = 180^\circ - \angle A_1OA_2 - \angle OA_2A_1 = 180^\circ - 2\cdot 7^\circ,$$

didinant n vienetu, mažėja 7°, o kai jis tampa mažesnis ar lygus 90°, tenka sustoti — daugiau atkarpų nebeatidėsime. Taigi

$$\begin{aligned}&\angle OA_1A_2 = 180^\circ - 2\cdot 7^\circ,\\ &\angle OA_2A_3 = 180^\circ - 3\cdot 7^\circ,\\ &\angle OA_3A_4 = 180^\circ - 4\cdot 7^\circ,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &\angle OA_{11}A_{12} = 180^\circ - 12\cdot 7^\circ = 96^\circ > 90^\circ,\end{aligned}$$

taigi A_{13} dar galima atidėti, bet $\angle OA_{12}A_{13} = 180^\circ - 13\cdot 7^\circ = 89^\circ < 90^\circ$, tad A_{14} atidėti nebegalima. Vadinasi, galima atidėti 13 atkarpų OA_1, A_1A_2, …, $A_{12}A_{13}$.
Teisingas atsakymas **C**.

ATSAKYMAI

Klausimo Nr. Grupė

	B	K
1	B	C
2	C	C
3	C	D
4	C	E
5	C	C
6	C	E
7	B	C
8	B	B
9	E	B
10	D	C
11	E	E
12	C	D
13	E	D
14	E	B
15	E	B
16	A	C
17	B	A
18	C	B
19	A	E
20	C	B
21	B	B
22	D	C
23	B	D
24	D	B
25	D	C
26	C	C
27	B	B
28	E	A
29	B	D
30	C	C

KENGŪRA 2010. V–VIII klasės
Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai
Juozas Mačys

2011 02 02. 2,75 sp. l. Užs. Nr. 15
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Petro ofsetas“
Žalgirio g. 90, LT-09303 Vilnius