KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2010

JUNIORAS, SENJORAS

IX–XII KLASĖS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius-sudarytojas ***AIVARAS NOVIKAS***

TEV

VILNIUS 2011

UDK 51(079)
Ke–108

Autorius-sudarytojas *Aivaras Novikas*

Redaktorius *Juozas Mačys*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Aldona Žalienė*
Konsultantas *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

ISBN 978–609–433–030–8

TURINYS

PRATARMĖ

Populiariausios pasaulyje mokinių matematikos varžybos yra tarptautinis *Kengūros* žaidimas-konkursas. Sumanytas Australijoje, jis bemat išplito. 1994 metais buvo įkurta asociacija „Kengūra be sienų“ (*Kangourou sans frontières*), kuriai dabar priklauso 45 šalys iš visų žemynų (išskyrus Australiją, jau seniai turinčią savo *Kengūrą*, na ir jos kaimynę Antarktidą). 2010 metais konkurse varžėsi per 5 milijonus mokinių, o į Gineso rekordų knygą jis seniai įrašytas kaip masiškiausias.

Kad mokiniai galėtų geriau pasirengti konkursams, organizavimo komiteto bei Matematikos ir informatikos instituto rūpesčiu nuo 1999 metų kasmet leidykloje TEV yra išleidžiamos konkurso užduočių ir sprendimų knygelės. Be to, leidykla TEV, bendradarbiaudama su Torunės M. Koperniko universitetu ir leidykla „Aksjomat“ (Lenkija), leidžia ankstesnių metų (kai Lietuva konkurse dar nedalyvavo) konkursų užduočių knygeles. Jau išleistos knygelės „Kengūra 1993–1998. Mažylis“, „Kengūra 1991–1998. Bičiulis“, „Kengūra 1991–1998. Kadetas“ ir „Kengūra 1991–1998. Junioras“. 2007 metais pirmą kartą konkursas buvo organizuotas ir „Nykštuko“ grupei — I ir II klasių mokiniams. Jiems rengtis konkursams taip pat išleistos knygelės „Nykštukas“ ir „Gudrutis“. Mėgstantiems spręsti uždavinius prie kompiuterio, parengti ir kompiuteriniai *Kengūros* konkursų variantai. Interneto knygyne TEVUKAS galima įsigyti tiek kiekvienų metų ir kiekvienos amžiaus grupės, tiek ir visų metų visų grupių rinkinius kompiuterinėse plokštelėse.

Lietuvoje ir kitose šalyse, 2010 metų konkursas įvyko kovo 18 dieną (laikantis taisyklės — kovo trečias ketvirtadienis). Konkurse dalyvavo per 60 tūkstančių mokinių iš daugiau kaip tūkstančio Lietuvos mokyklų. Visiems konkurse dalyvavusiems mokiniams buvo įteikti dalyvio pažymėjimai. Kiekvienas mokinys atminimui gavo konkurso užduočių sąlygas ir suvenyrinį *Kengūros* pieštuką.

Konkurso rezultatai buvo apdoroti Nacionaliniame egzaminų centre. Kompiuterinė programa nustatė mokinius, kurių atsakymų rinkiniai buvo identiški, t. y. sutapo *visi* — ir teisingi, ir neteisingi atsakymai. Jei kurioje nors mokykloje toje pačioje grupėje buvo du identiški atsakymai, tai jų autoriai išskirti nuspalvinimu arba *kursyvu*. Jeigu identiškų atsakymų buvo daugiau, o jų autoriai pretendavo į savo klasės geriausiųjų penkiasdešimtuką, tai tie autoriai internete iškelti už 50-uko lentelės brūkšnio.

Rajonai ir mokyklos savo dalyvių rezultatus gali pasižiūrėti interneto svetainėje www.kengura.lt; jiems paliekama teisė patiems spręsti, buvo ar nebuvo pažeistos konkurso sąlygos (pvz., ar buvo galimybių nusirašyti, spręsti kolektyviai, spręsti ilgiau nei buvo nurodyta ir pan.) ir kaip traktuoti identiškus darbus. Penkiasdešimtukai spausdinami ir šioje knygelėje (žr. p. 8–11) — juk kiekvienam dalyviui malonu matyti savo pavardę tarp geriausiųjų. Ką gi laimi konkurso nugalėtojai, kaip jie apdovanojami? Dešimt geriausiai konkurse pasirodžiusių juniorų kartu su dar penkiais lenkų mokyklų mokiniais rugpjūtį vyko į tarptautinę kengūrininkų stovyklą Zakopanėje (Lenkija), grupė lyderių stovyklavo Minske (Baltarusija). Būrys mūsų geriausių bičiulių ir kadetų rugpjūčio pradžioje ilsėjosi ir treniravosi puikiuose „Toliejos“ poilsio namuose, įsikūrusiuose tarp ežerų ir miškų Molėtų rajone. Stovykloje buvo visų Lietuvos rajonų atstovų. Kartu ten vyko ir tarptautinė *Kengūros* stovykla, kurioje kartu su mūsų laimėtojais dalyvavo svečiai iš Lenkijos ir Baltarusijos.

Visi dalyviai, patekę į savo klasės penkiasdešimtukus, taip pat kiekvieno miesto, rajono ar savivaldybės 10 geriausių sprendėjų (net ir nepatekusių į 50-tukus) gavo *Kengūros* užrašų knygutę.

Kartą metuose *Kengūros* asociacijos šalių atstovai susirenka į visuotinį suvažiavimą. 2009 metais toks suvažiavimas vyko Minske (Baltarusija) spalio mėnesį. Jame buvo apsvarstytos užduotys 2010 metų konkursui. Prieš suvažiavimą iš įvairių šalių atsiųsti uždaviniai buvo atitinkamai suskirstyti į 5 grupes ir sudėti į storą knygą. Tokį rinkinį gavo kiekvienos šalies atstovai. Iš viso sąrašo balsuojant buvo sudarytos rekomenduojamos užduotys (kaip įprasta, mažylių grupei — 24 klausimai, kitoms grupėms — po 30 klausimų), tada užduotys buvo tikslinamos, redaguojamos, ir išvažiuodama kiekviena šalis turėjo angliškai parengtą preliminarų užduočių rinkinį (beje, be sprendimų). Vis dėlto galutinės užduotys gerokai skyrėsi nuo rekomenduotųjų — kiekviena šalis turi teisę užduotyse šį bei tą keisti, atsižvelgdama į savo skonį ir matematikos programas. Be to, šalys, organizuojančios konkursą „Nykštuko“ grupei, visas 18 užduočių jam rengia pačios.

Konkurso metu negalima naudotis skaičiuokliais. Konkursas testinis, — tai reiškia, kad tik vienas atsakymas iš penkių pateiktų yra teisingas, ir tą atsakymą reikia nustatyti. Gautą atsakymą dalyvis nurodo savo kortelėje (dalyvio kortelės pavyzdys įdėtas 7 psl.; ten paaiškinta, kaip ją reikia užpildyti). Jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia parašyti tą atsakymą, pasižymėti jį sau, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo dažniausiai nelieka). Konkursas yra labai demokratiškas — sakysime, geras, bet lėtas ir specialiai konkursui nesirengęs olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

Vertinant darbus, už teisingą atsakymą duodamas prieš uždavinį nurodytas taškų skaičius, už nenurodytą atsakymą — 0 taškų, už nurodytą neteisingą atsakymą atimama ketvirtadalis uždaviniui skiriamų taškų. Kad nebūtų neigiamų rezultatų, kiekvienam dalyviui iš karto skiriama taškų. Todėl dalyvis iš viso gali surinkti nuo 0 iki 150 taškų.

Kortelės teisingas užpildymas taip pat yra testo dalis, ir iš apsirikusių užpildant kortelę jokios pretenzijos nepriimamos. Beje, internete buvo nurodytos neteisingai kortelę užpildžiusių dalyvių pavardės, ir jiems buvo suteikta galimybė per savaitę patikslinti duomenis (dalis dalyvių ta galimybe sėkmingai pasinaudojo).

Šioje knygelėje pateiktos 2010 m. *Kengūros* konkurso juniorų ir senjorų grupių užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti ir pasitikrinti, knygelės gale yra teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės užduotį ir atlikti ją per 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo galimybes. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės užduotimi — dauguma vyresniųjų klasių uždavinių taip pat „įkandami“ jaunesniesiems.

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai, ir truputėlį pasitreniravus, juos galima tiesiog skaityti. Kad būtų patogiau, sprendimų dalyje po uždavinio numerio iš karto nurodoma, kuris atsakymas teisingas.

? Ženklu **?** pažymėtas „spėjimas“. Žinoma, dažniausiai tas spėjimas yra sprendimas arba beveik sprendimas, tik spėjime dažniausiai remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas knygelėje iš viso neduodamas ir iš karto pateikiamas sprendimas. Dar kartą pabrėžiame — rengiantis *Kengūros* konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus spėjimus ar trumpą sprendimą. Keliais klaustukais žymimi kiti spėjimo būdai.

! Ženklu **!** žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, perskaityti sprendimą labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai pravers gyvenime ir mokykloje.

!! Ženklu **!!** (o kartais ir ženklu **!!!**) žymimi kiti sprendimai, dažnai trumpesni, bet reikalaujantys daugiau žinių. Keliais šauktukais taip pat žymimos pastabos, komentarai mokytojui, siūlomi sunkesni panašūs uždaviniai ir kt.

Kiek daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio griežtas sprendimas, labai gerai matyti, pavyzdžiui, iš uždavinių S23, S30. Apčiuopti teisingą atsakymą čia paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį — labai sunku.
Stengiantis padėti pasirengti konkursui rusų, lenkų ir anglų mokyklų mokiniams internete pateiktos 2010 m. užduočių sąlygos jų kalbomis. Tai ypač svarbu žemesniųjų klasių mokiniams, kuriems skaityti matematinį tekstą lietuviškai sunku.

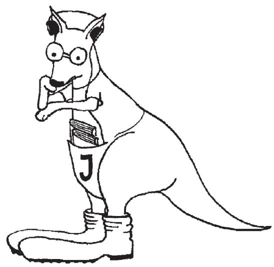
Daugiau informacijos rasite internete: http://www.kengura.lt.
Visais iškilusiais klausimais prašom kreiptis į *Kengūros* organizavimo komitetą — tel.: (8-5) 2729803 ir (8-5) 2109324, el. paštas: info@kengura.lt, adresas: Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius.

2011 metų konkursas įvyks kovo 17 dieną, o sąlygos vėl bus parengtos lietuvių, lenkų, rusų ir anglų kalbomis.
Sėkmės rengiantis konkursui! Kviečiame gausiai dalyvauti!

Organizavimo komitetas

2010 m. konkurso užduočių sąlygos

JUNIORAS (IX ir X klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

J1. Ką gausime 20102010 padalijęs iš 2010?

A) 11 **B**) 101 **C**) 1001 **D**) 10001 **E**) Ne sveikąjį skaičių

J2. Jonas už testą gavo 85% visų taškų, o Tadas už tą patį testą gavo 90% visų taškų. Tačiau jis tegavo vienu tašku daugiau nei Jonas. Kiek daugiausiai taškų buvo galima gauti už testą?

A) 5 **B**) 17 **C**) 18 **D**) 20 **E**) 25

J3. Abiejose eilutėse skaičių sumos yra lygios.

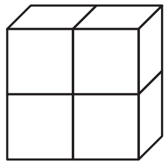
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	x

Kam lygi x reikšmė?

A) 1010 **B**) 1020 **C**) 1910 **D**) 1990 **E**) 2020

J4. Kūnas (žr. paveikslėlį) sudarytas iš keturių vienodų kubelių. Kiekvieno kubelio paviršiaus plotas lygus $24\,\text{cm}^2$. Kam lygus pavaizduotos figūros paviršiaus plotas?

A) $80\,\text{cm}^2$ **B**) $64\,\text{cm}^2$ **C**) $40\,\text{cm}^2$ **D**) $32\,\text{cm}^2$ **E**) $24\,\text{cm}^2$



J5. Kiekvieną gimtadienį Rožė gauna tiek gėlių, kiek jai sukanka metų. Tas gėles Rožė visada išsidžiovina ir pasilieka atminimui. Dabar Rožė jau turi 120 gėlių. Kiek Rožei metų?

A) 10 **B**) 12 **C**) 14 **D**) 15 **E**) 20

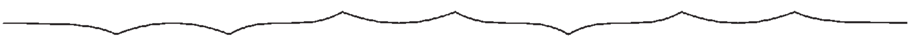
J6. Popieriaus juostelė buvo perlenkta pusiau. Susidariusi dviguba juostelė vėl buvo perlenkta pusiau, pagaliau keturguba juostelė vėl buvo perlenkta pusiau. Kai juostelė buvo atlankstyta atgal, tai kiekviena lenkimo linija išgaubė ją į viršų arba į apačią. Kurio vaizdo iš žemiau parodytų niekada negalėsime pamatyti, žiūrėdami į atlankstytą juostelę iš šono?

A)

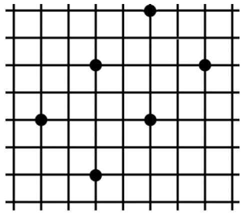

B)


C)

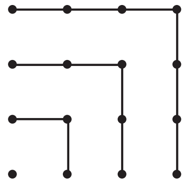

D)


E)


J7. Languoto popieriaus lapo mazguose pažymėti 6 taškai. Jungdami kai kuriuos iš šių taškų atkarpomis norime gauti kvadratą, rombą (nekvadratą), lygiagretainį (nerombą, nekvadratą), trapeciją (nelygiagretainį), smailųjį trikampį. Kelias iš tų penkių figūrų mums pavyks gauti?
A) 1 **B**) 5 **C**) 2 **D**) 4 **E**) 3



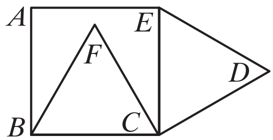
J8. Iš paveikslėlio matyti, kad $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$. Kam lygi suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$?
A) 14×14 **B**) 9×9 **C**) $4 \times 4 \times 4$ **D**) 16×16 **E**) 4×9



J9. Atostogų metu Brigita nuvyko į Veroną. Ji labai norėjo bent po vieną sykį pereiti kiekvienu iš penkių įžymiųjų senųjų tiltų per Adidžės upę. Jos maršrutas prasidėjo stotyje, ir kai ji sugrįžo į stotį, buvo perėjusi visus tuos penkis tiltus (ir nė per vieną iš naujųjų tiltų). Maršrutas kirto upę n kartų. Kuri iš nurodytų n reikšmių yra galima?

A) 3 **B**) 4 **C**) 5 **D**) 6 **E**) 7

J10. $ABCE$ yra kvadratas, o BCF ir CDE – lygiakraščiai trikampiai. Atkarpos AB ilgis yra 1. Kam lygus atkarpos FD ilgis?
A) $\sqrt{2}$ **B**) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C**) $\sqrt{3}$ **D**) $\sqrt{5} - 1$ **E**) $\sqrt{6} - 1$

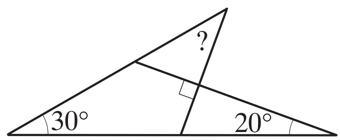


KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

J11. Vakar buvo mokytojo gimtadienis, ir šiandien jis pasakė, kad jo ir jo tėvo metų sandauga lygi 2010. Kuriais metais gimė mokytojas?

A) 1943 **B**) 1953 **C**) 1980 **D**) 1995 **E**) 2005

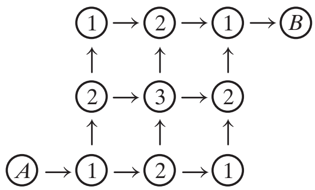
J12. Kam lygus kampas, pažymėtas klaustuku?
A) $10°$ **B**) $20°$ **C**) $30°$ **D**) $40°$ **E**) $50°$



J13. Natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma lygi 2010, o skaitmenų sandauga lygi 2. Kiek yra tokių skaičių?

A) 2010 **B**) 2009 **C**) 2008 **D**) 1005 **E**) 1004

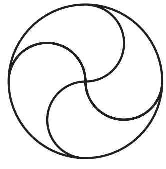
J14. Einant rodyklių kryptimis, reikia nukeliauti iš skrituliuko A į skrituliuką B. Kiekvienai tokiai kelionei priskiriama visų tos kelionės metu aplankytų skrituliukų skaičių suma. Kiek skirtingų sumų mes galime gauti?
A) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 4 **E**) 6



J15. Trys vieno mėnesio antradieniai buvo lyginės to mėnesio dienos. Kuri savaitės diena buvo 21-oji to mėnesio diena?

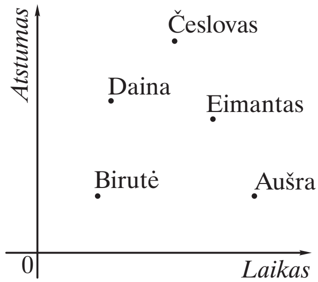
A) Trečiadienis **B**) Ketvirtadienis **C**) Penktadienis **D**) Šeštadienis **E**) Sekmadienis

J16. 4 cm spindulio skritulys padalytas 2 cm spindulio apskritimo lankais į keturias vienodas dalis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus kiekvienos iš keturių dalių perimetras (cm)?
A) 2π **B**) 4π **C**) 6π **D**) 8π **E**) 12π



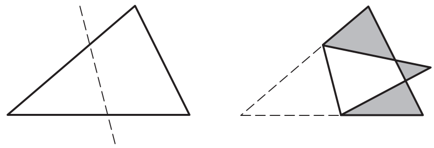
J17. 5 mokiniai varžėsi, kas greitesnis. Grafikas rodo mokinių nubėgtus atstumus ir jų sugaištą laiką. Kuris iš mokinių buvo greičiausias?

A) Aušra **B**) Birutė **C**) Česlovas **D**) Daina **E**) Eimantas



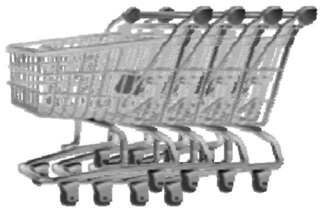
J18. Perlenkus trikampį per brūkšninę liniją, gauta nauja figūra (žr. paveikslėlį). Trikampio plotas 1,5 karto didesnis nei gautos figūros plotas, o užtušuotos figūros plotas lygus 1. Kam lygus pradinio trikampio plotas?

A) 2 **B**) 3 **C**) 4 **D**) 5 **E**) Nustatyti neįmanoma



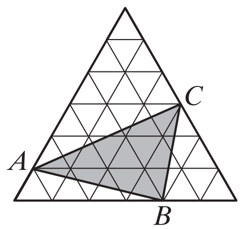
J19. Parduotuvėje stovi dvi eilės kompaktiškai vienas į kitą įstatytų vežimėlių. Pirmoje 2,9 m ilgio eilėje yra 10 vežimėlių, o antroje 4,9 m ilgio eilėje – dvidešimt vežimėlių. Koks yra vieno vežimėlio ilgis (m)?

A) 0,8 **B**) 1 **C**) 1,1 **D**) 1,2 **E**) 1,4



J20. Didysis lygiakraštis trikampis sudarytas iš 36 mažesnių 1 cm^2 ploto lygiakraščių trikampių. Raskite $\triangle ABC$ plotą (cm^2).

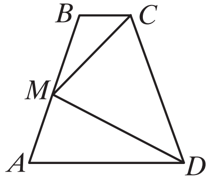
A) 11 **B**) 12 **C**) 13 **D**) 14 **E**) 15



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

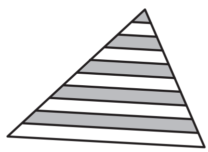
J21. $ABCD$ yra lygiašonė trapecija, M yra jos šoninės kraštinės AB vidurio taškas, $BM = 1$ ir $\angle CMD = 90^\circ$. Kam lygus trapecijos $ABCD$ perimetras?

A) 5 **B**) 6 **C**) 7 **D**) 8 **E**) Nustatyti neįmanoma



J22. Tiesės, lygiagrečios vienai trikampio kraštinei, dalija kiekvieną iš kitų dviejų pavaizduoto trikampio kraštinių į 10 lygių atkarpų. Kuri trikampio ploto dalis užtušuota?

A) 41,75% **B**) 42,5% **C**) 45% **D**) 46% **E**) 47,5%



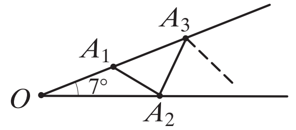
J23. Kiek yra natūraliųjų skaičių n ($1 \leqslant n \leqslant 100$), kuriems skaičius n^n yra tikslus kvadratas?

A) 5 **B**) 50 **C**) 55 **D**) 54 **E**) 15

J24. Tarp Jūrų Valdovo tarnų galvakojų yra ne tik įprastinių aštuonkojų, bet ir šešiakojų bei septynkojų. Septynkojai visada meluoja, o šešiakojai ir aštuonkojai visada sako tiesą. Kartą susitiko keturi galvakojai. Mėlynasis galvakojis tarė: „Kartu mes turime 28 kojas". Žaliasis tarė: „Kartu mes turime 27 kojas". Geltonasis tarė: „Kartu mes turime 26 kojas". Raudonasis tarė: „Kartu mes turime 25 kojas". Kiek kojų turi raudonasis galvakojis?

A) 6 **B**) 7 **C**) 8 **D**) 6 arba 8 **E**) Nustatyti neįmanoma

J25. Kampas O lygus 7°, o atkarpos OA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ yra lygios (žr. pav.). Kiek daugiausiai atkarpų gali būti šioje sekoje?
A) 11 **B**) 12 **C**) 13 **D**) 14 **E**) Be galo daug



J26. Sekos $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, \ldots$ kiekvienas narys, pradedant ketvirtuoju, yra apskaičiuojamas pagal tris prieš jį einančius narius: dešinysis iš tų narių atimamas iš kitų dviejų sumos. Koks yra 2010-as sekos narys?

A) -2006 **B**) 2008 **C**) -2002 **D**) -2004 **E**) Kitas atsakymas

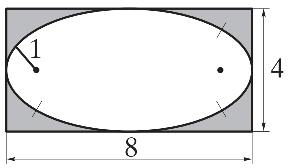
J27. Prie kiekvienos penkiakampio kraštinės parašoma po natūralųjį skaičių taip, kad bet kurių gretimų skaičių poros didžiausiasis bendrasis daliklis yra 1, o bet kurių negretimų skaičių poros didžiausiasis bendrasis daliklis yra didesnis už 1. Kuris iš šių skaičių niekada nebus parašytas?

A) 20 **B**) 18 **C**) 19 **D**) 21 **E**) 22

J28. Kelių triženklių natūraliųjų skaičių vidurinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų aritmetiniam vidurkiui?

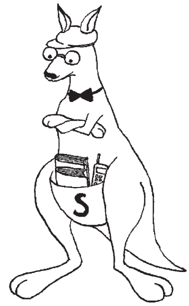
A) 9 **B**) 12 **C**) 16 **D**) 45 **E**) 36

J29. Pavaizduotą ovalą sudaro keturi apskritimų lankai. Kairysis ir dešinysis lankai yra lygūs, o jų spindulys lygus 1. Viršutinis ir apatinis ovalo lankai taip pat lygūs. Kam lygus jų spindulys?
A) 6 **B**) 6,5 **C**) 7 **D**) 7,5 **E**) 8



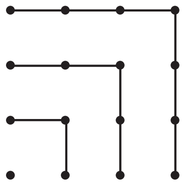
J30. Brūkšninis kodas yra juodų ir baltų juostų seka, kuri prasideda ir baigiasi juoda juosta ir kurioje bet kurios dvi gretimos juostos yra skirtingų spalvų (žr. pavyzdį paveikslėlyje). Kiekvienos juodos ar baltos juostos plotis yra 1 arba 2, o viso brūkšninio kodo plotis turi būti 12. Kiek yra skirtingų brūkšninių kodų?
A) 24 **B**) 132 **C**) 66 **D**) 12 **E**) 116

SENJORAS (XI ir XII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

S1. Iš paveikslėlio matyti, kad $1+3+5+7=4\times 4$. Kam lygi suma $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?
A) 14×14 **B**) 9×9 **C**) $4\times 4\times 4$ **D**) 16×16 **E**) 4×9



S2. Abiejose eilutėse skaičių sumos yra lygios.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	x

Kam lygi x reikšmė?

A) 1010 **B**) 1020 **C**) 1910 **D**) 1990 **E**) 2020

S3. Dviejų kubo formos indų pagrindų plotai yra $1\,\mathrm{dm}^2$ ir $4\,\mathrm{dm}^2$. Didesnįjį indą reikia pripildyti šaltinio vandens, kurį galima semti tik mažesniuoju indu. Kiek kartų mums teks semti vandenį?

A) 2 **B**) 4 **C**) 6 **D**) 8 **E**) 16

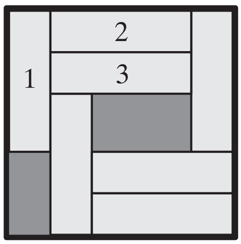
S4. Kiek keturženklių skaičių, kurių visi skaitmenys nelyginiai, dalijasi iš 5?

A) 900 **B**) 625 **C**) 250 **D**) 125 **E**) 100

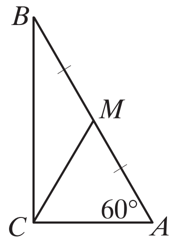
S5. Įmonės vadovas pasakė: „Kiekvienas iš mūsų darbuotojų yra ne jaunesnis nei 25 metų.“ Vėliau paaiškėjo, kad jis buvo neteisus. Tai reiškia, kad:

A) Visi įmonės darbuotojai yra lygiai 25 metų
B) Visi įmonės darbuotojai yra vyresni nei 26 metų
C) Joks įmonės darbuotojas dar neturi 25 metų
D) Kažkuris įmonės darbuotojas yra jaunesnis nei 25 metų
E) Kažkuris įmonės darbuotojas yra lygiai 26 metų

S6. Į kvadratinę dėžutę įdėtos septynios plytelės (žr. pav.). Kiek mažiausiai plytelių reikia perstumti, kad joje atsirastų vietos dar vienai tokiai plytelei?
A) 2 **B**) 3 **C**) 4 **D**) 5 **E**) Tai neįmanoma



S7. M yra stačiojo trikampio ABC įžambinės AB vidurio taškas, o $\angle A = 60°$. Raskite $\angle BMC$.
A) $105°$ **B**) $108°$ **C**) $110°$ **D**) $120°$ **E**) $125°$



S8. Kuris iš nurodytų skaičių gali būti lygus prizmės briaunų skaičiui?

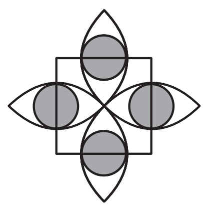
A) 100 **B**) 200 **C**) 2008 **D**) 2009 **E**) 2010

S9. Kiek natūraliųjų sprendinių turi lygtis

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1?$$

A) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 4 **E**) Be galo daug

S10. Kvadrato kraštinė lygi 2, o pusapskritimiai, kurių centrai yra kvadrato viršūnėse, eina per kvadrato centrą (žr. pav.). Užtušuotieji skrituliai, kurių centrai yra kvadrato kraštinių vidurio taškai, liečia pusapskritimius. Kam lygus užtušuotas plotas?
A) $4(3-2\sqrt{2})\pi$ **B**) $\sqrt{2}\pi$ **C**) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ **D**) π **E**) $\frac{1}{4}\pi$

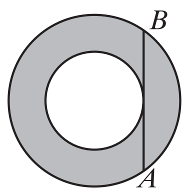


KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Skaičiai $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ yra atitinkamai pirmas, antras ir trečias geometrinės progresijos nariai. Kam lygus ketvirtas progresijos narys?

A) $\sqrt[9]{7}$ **B**) $\sqrt[12]{7}$ **C**) $\sqrt[5]{7}$ **D**) $\sqrt[10]{7}$ **E**) 1

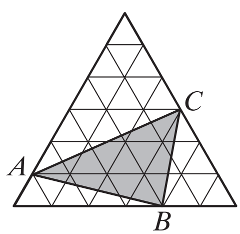
S12. Didesniojo iš dviejų koncentriškų apskritimų styga AB liečia mažesnįjį apskirtimą. Kam lygus nudažytas plotas, jei $AB = 16$?
A) 32π **B**) 63π **C**) 64π **D**) $32\pi^2$
E) Nepakanka informacijos



S13. Sveikieji skaičiai x ir y tenkina lygybę $2x = 5y$. Kuriam iš pateiktų skaičių gali būti lygi suma $x + y$?

A) 2011 **B**) 2010 **C**) 2009 **D**) 2008 **E**) 2007

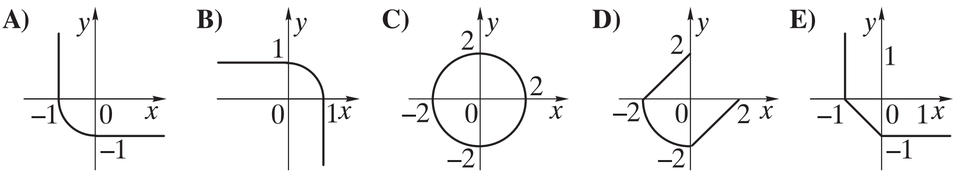
S14. Didysis lygiakraštis trikampis sudarytas iš 36 mažesnių $1\,\text{cm}^2$ ploto lygiakraščių trikampių. Raskite $\triangle ABC$ plotą (cm^2).
A) 11 **B**) 12 **C**) 13 **D**) 14 **E**) 15



S15. Dėžėje yra trijų spalvų rutulių: mėlynų, žalių ir raudonų (bent po vieną kiekvienos spalvos rutulį). Kad ir kuriuos penkis rutulius ištrauktume iš dėžės, tarp jų bus ne mažiau kaip du raudoni rutuliai ir ne mažiau kaip trys vienos spalvos rutuliai. Kiek mėlynų rutulių yra dėžėje?

A) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 4 **E**) Neužtenka informacijos

S16. Kuriame brėžinyje pavaizduota visų lygties $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ sprendinių aibė?



S17. Kiek stačiųjų trikampių galima gauti jungiant tris taisyklingojo keturiolikakampio viršūnes?

A) 42 **B**) 84 **C**) 88 **D**) 98 **E**) 168

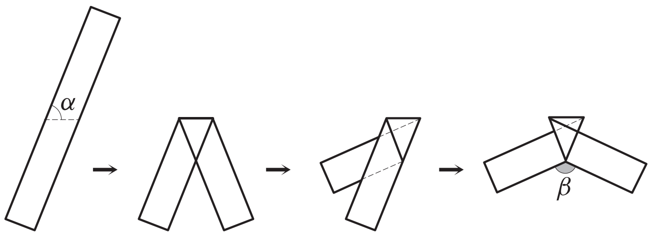
S18. Išraiškoje $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ kiekvieną žvaigždutę reikia pakeisti ženklu „+“ arba ženklu „·“. Didžiausią reikšmę, kurią galima taip gauti, pažymėkime N. Kam lygus mažiausias pirminis N daugiklis?

A) 2 **B**) 3 **C**) 5 **D**) 7 **E**) Kitas skaičius

S19. Trikampio kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai 13, x ir y. Raskite trikampio perimetrą, jei $xy = 105$.

A) 35 **B**) 39 **C**) 51 **D**) 69 **E**) 119

S20. Popierinė juosta perlenkta tris kartus, kaip parodyta paveikslėlyje.

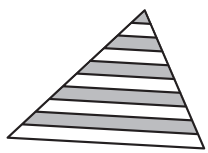


Raskite β, jei $\alpha = 70°$.

A) 140° **B**) 130° **C**) 120° **D**) 110° **E**) 100°

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

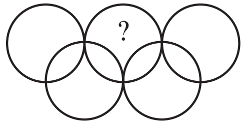
S21. Tiesės, lygiagrečios vienai trikampio kraštinei, dalija kiekvieną iš kitų dviejų pavaizduoto trikampio kraštinių į 10 lygių atkarpų. Kuri trikampio ploto dalis užtušuota?
A) 42,5% **B**) 45% **C**) 46% **D**) 47,5% **E**) 50%



S22. Iš 100 žmonių, dalyvavusių bėgime, jokie du neatbėgo vienu metu. Kiekvienas bėgikas buvo paklaustas, kokią vietą jis užėmė, ir atsakė, nurodydamas vietą nuo 1 iki 100. Visų atsakymų suma lygi 4000. Kiek mažiausiai bėgikų sumelavo?

A) 9 **B**) 10 **C**) 11 **D**) 12 **E**) 13

S23. Susikertantys penki apskritimai riboja devynias sritis. Į jas, po vieną į kiekvieną sritį, yra įrašyti visi skaičiai nuo 1 iki 9 taip, kad bet kuriame skritulyje įrašytų skaičių suma yra 11. Koks skaičius yra įrašytas į sritį, pažymėtą klaustuku?



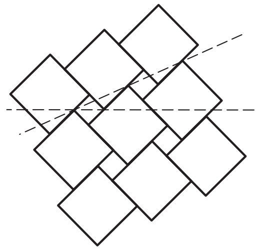
A) 5 **B**) 6 **C**) 7 **D**) 8 **E**) 9

S24. Brūkšninis kodas yra juodų ir baltų juostų seka, kuri prasideda ir baigiasi juoda juosta ir kurioje bet kurios dvi gretimos juostos yra skirtingų spalvų (žr. pavyzdį paveikslėlyje). Kiekvienos juodos ar baltos juostos plotis yra 1 arba 2, o viso brūkšninio kodo plotis turi būti 12. Kiek yra skirtingų brūkšninių kodų?

A) 24 **B**) 132 **C**) 66 **D**) 12 **E**) 116

S25. Siena išklijuota dviejų dydžių kvadratinėmis plytelėmis (žr. paveikslėlį). Punktyrinės linijos sudaro 30° kampą. Raskite didesniosios plytelės kraštinę, jeigu mažesniosios plytelės kraštinė lygi 1.

A) $2\sqrt{3}$ **B**) $2+\sqrt{3}$ **C**) $3+\sqrt{2}$ **D**) $3\sqrt{2}$ **E**) 2



S26. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki 10 yra užrašyti ant lentos po 10 kartų. Mokiniai žaidžia klasėje tokį žaidimą: mokinys ištrina du ant lentos esančius skaičius ir vietoj jų užrašo jų sumą, sumažintą vienetu; tada kitas mokinys pakeičia bet kuriuos du skaičius lentoje vienetu sumažinta jų suma ir t. t. Žaidimas tęsiasi, kol lentoje lieka vienas skaičius. Tas paskutinis skaičius yra:

A) mažesnis nei 440 **B**) 451 **C**) 460 **D**) 488 **E**) didesnis nei 500

S27. Kam lygi reiškinio $\frac{(2+3)(2^2+3^2)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$ reikšmė?

A) 2^{2048} **B**) 2^{4096} **C**) 3^{2048} **D**) 3^{4096} **E**) $3^{2048}+2^{2048}$

S28. Kvadratinė šaknis $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}_{100\text{ kartų}}}$ užrašyta begaline dešimtaine trupmena. Kam lygus 100-asis trupmenos skaitmuo po kablelio?

A) 1 **B**) 2 **C**) 6 **D**) 7 **E**) 9

S29. Funkcija $f(x)$ apibrėžta visoms teigiamosioms x reikšmėms ir tenkina joms lygybę $2f(x)+3f\left(\frac{2010}{x}\right)=5x$. Raskite $f(6)$.

A) 993 **B**) 1 **C**) 2009 **D**) 1013 **E**) 923

S30. Taškai P ir Q priklauso stačiojo trikampio statiniams, kurių ilgiai yra atitinkamai a ir b; K ir H yra atitinkamai iš taškų P ir Q į trikampio įžambinę išvestų statmenų pagrindai. Raskite mažiausią galimą sumos $KP+PQ+QH$ reikšmę.

A) $a+b$ **B**) $\frac{2ab}{a+b}$ **C**) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **D**) $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **E**) $\frac{(a+b)^2}{2ab}$

SPRENDIMAI

JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. D 10001

Skaičius galima dalyti stulpeliu, bet paprasčiau mąstyti taip:

$$20102010 = 20100000 + 2010 = 2010 \cdot 10000 + 2010 = 2010(10000 + 1) = 2010 \cdot 10001.$$

Vadinasi, $20102010 : 2010 = 10001$.
Teisingas atsakymas **D**.

J2. D 20

Taškas, kuriuo Tadas pralenkė Joną, sudaro $90\,\% - 85\,\% = 5\,\%$ visų taškų, todėl būtent 20 taškų sudarys $20 \cdot 5\,\% = 100\,\%$ taškų, kuriuos buvo galima gauti už testą.
Teisingas atsakymas **D**.

J3. C 1910

Uždavinio sąlyga reiškia, kad $1+2+3+\cdots+10+2010 = 11+12+13+\cdots+20+x$. Kam lygi, pvz., kairėje pusėje užrašyta suma, skaičiuoti neverta. Paprasčiau yra pastebėti, kad kiekvienas iš žinomų dešinės pusės dėmenų yra 10 vienetų didesnis už atitinkamą kairės pusės dėmenį, ir pasinaudoti tuo: $2010 = (11-1)+(12-2)+(13-3)+\cdots+(20-10)+x$, arba $2010 = 10 \cdot 10 + x$. Iš šios lygties gauname, kad $x = 2010 - 100 = 1910$.
Teisingas atsakymas **C**.

J4. B $64\,\text{cm}^2$

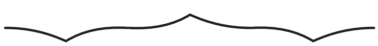
Kubo paviršių sudaro 6 vienodi kvadratai, taigi vieno kvadrato plotas lygus $24 : 6 = 4\,\text{cm}^2$. Šešias pavaizduoto kūno sienas sudaro atitinkamai 4, 4, 2, 2, 2, 2 tokie kvadratai. Vadinasi, šio kūno paviršiaus plotas lygus $(4+4+2+2+2+2) \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64\,\text{cm}^2$.
Teisingas atsakymas **B**.

J5. D 15

Jei Rožei yra n metų, tai ji yra gavus $1 + 2 + \cdots + n$, t.y. pagal aritmetinės progresijos sumos formulę, $\frac{n(n+1)}{2}$ gėlių. Taigi $\frac{n(n+1)}{2} = 120$, arba $n^2 + n - 240 = 0$. Ši kvadratinė lygtis turi du sprendinius: 15 ir -16. Metų skaičių tegali žymėti reikšmė $n = 15$.
Teisingas atsakymas **D**.

J6. D

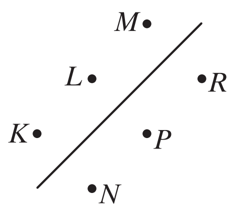
Kiekviename iš paveikslėlių **A–E** matome juostelę, išlinkusią septyniose vietose. Kadangi juostelė pradžioje buvo perlenkta pusiau, tai pirmąją lenkimo liniją žymi vidurinis išlinkimas. Jei atveju **D** pakartotume pirmąjį juostelės lenkimą, tai, nesutapus dviem juostelės dalims, gautume tokį vaizdą:



Antrąją lenkimo liniją vėlgi turi atitikti vidurinis išlinkimas. Bet jei dabar bandysime pakartoti antrąjį juostelės lenkimą, tai dvi juostelės dalys nesutaps (kad sutaptų, reikia, kad du šoniniai išlinkimai būtų nukreipti į priešingas puses – vienas į viršų, kitas į apačią, tačiau mūsų atveju jie abu nukreipti į apačią). Vadinasi, vaizdo **D** lankstant juostelę neįmanoma gauti.
Renkamės atsakymą **D**.

Uždavinį baigiame spręsti, patikrindami likusius variantus kaip ir **D** – mintyse kartodami lenkimus, įsitikiname, kad dvi suglaudžiamos juostelės dalys sutampa po kiekvieno lenkimo.
Teisingas atsakymas **D**.

J7. E 3



Pažymėkime šešis taškus, kaip parodyta brėžinyje. Lengva pastebėti, kad $KLPN$ – kvadratas, $KLRP$ – lygiagretainis ($KL \parallel PR$, $KL = PR$), bet nei rombas, nei tuo labiau kvadratas ($KL \neq LR$), $KLRN$ – trapecija ($KL \parallel NR$, $KN \nparallel LR$). Taigi tris iš ieškomų figūrų jau turime.
Įsitikinsime, kad smailiojo trikampio gauti negalime. Tam reikia perrinkti taškų jungimo atkarpomis galimybes. Nors tokių galimybių daug, visų jų iš eilės perrinkinėti nebūtina. Pastebėsime, kad jei abu taškai K ir N yra trikampio viršūnės, tai kokį iš likusių 4 taškų beparinktume kaip trečiąją viršūnę, trikampis bus statusis. Tą patį galima pasakyti ir apie taškų poras L ir P, M ir R. Vadinasi, lygiai vienas taškas iš kiekvienos taškų poros turėtų būti ieškomo trikampio viršūnė. Belieka tiesiogiai patikrinti $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimybes, kurių kiekį dar galima sumažinti pusiau, pastebėjus, kad kiekvienas nagrinėjamas trikampis su viršūne N yra simetriškas brėžinyje pažymėtos tiesės l atžvilgiu tikrintinam trikampiui su viršūne K. Kadangi joks iš likusių trikampių KLR, KPM, KPR nėra smailusis (o KLM išvis nėra trikampis), tai smailiojo trikampio, jungdami duotus taškus, gauti negalime.
Tuo labiau negalime gauti rombo, kuris nebūtų kvadratas. Toks rombas turėtų du smailiuosius kampus, kurių bet kurio viršūnę sujungę su likusiomis dviem rombo viršūnėmis, gautume lygiašonį smailųjį trikampį (kampai prie pagrindo taip pat būtų smailūs), o kad tokio gauti negalime, jau žinome.
Taigi gauti pavyks tris figūras iš penkių nurodytųjų.
Teisingas atsakymas **E**.

J8. B 9×9

Paveikslėlį galima apibendrinti: $n \times n$ taškų galima suskirstyti į n poaibių, sudarytų iš atitinkamai 1, 3, 5, 7, 9 ir t. t. taškų (seką sudaro iš eilės einantys nelyginiai skaičiai), todėl šių nelyginių skaičių suma bus lygi $n \times n$. Vadinasi, pirmųjų 9 nelyginių skaičių suma lygi 9×9.
Teisingas atsakymas **B**.

Ne ką sunkiau yra tiesiogiai pagal aritmetinės progresijos formulę apskaičiuoti sumą:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 = \frac{1 + 17}{2} \cdot 9 = 9 \cdot 9.$$

Teisingas atsakymas **B**.

J9. D 6

Kirsdama tiltą, Brigita kiekvieną kartą atsiduria kitame krante, nei buvo prieš tai. Kadangi Brigita grįžo į stotį, tai krantą ji keitė lyginį skaičių kartų. Vadinasi, nelyginiai atsakymai, **A**, **C**, **E** netinka. Be to, Brigita perėjo kiekvienu iš penkių tiltų, todėl $n \geqslant 5$ ir netinka atsakymas **B**.
Renkamės atsakymą **D**.

Turime įsitikinti, kad pasirinktas atsakymas $n = 6$ įmanomas. Iš tiesų, Brigita galėjo iš pradžių pereiti visus 5 skirtingus tiltus ir grįžti penktuoju iš jų atgal.
Teisingas atsakymas **D**.

J10. Ⓐ $\sqrt{2}$

! Visos kvadrato $ABCE$ ir lygiakraščių trikampių BCF ir CDE kraštinės yra lygios tarpusavyje, todėl $CD = CF = 1$. Raskime kampą DCF: $\angle DCE = \angle FCB = 60^\circ$ (lygiakraščių trikampių kampai);

$$\angle ECF = \angle ECB - \angle FCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ;$$

$$\angle DCF = \angle DCE + \angle ECF = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Taigi ΔDCF yra statusis. Pritaikysime jam Pitagoro teoremą:

$$DF = \sqrt{DC^2 + CF^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Teisingas atsakymas **A**.

J11. Ⓒ 1980

? Pasiūlytų atsakymų variantai rodo, kad mokytojui yra **A**) 67; **B**) 57; **C**) 30; **D**) 15; **E**) 5 metai. Iš karto galime atmesti absurdiškus variantus **D** ir **E**. **B** netinka, nes 2010 nesidalija iš 57, o **A** netinka, nes kitaip mokytojo tėvui būtų 2010 : 67 = 30 metų ir jis būtų jaunesnis už sūnų.
Todėl renkamės atsakymą **C**.

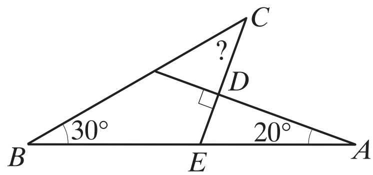
! Atsakymas **C** tinka: mokytojui gali būti 30 metų, o jo tėvui 2010 : 30 = 67 metai.
Įsitikinsime, kad kitų galimybių nėra. Tam išskaidykime mokytojo ir jo tėvo metų sandaugą pirminiai daugikliais:

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67.$$

Jei mokytojo metų skaičius dalus iš 67, tai jo tėvas turi daugiausiai 2010 : 67 = 30 metų – mažiau nei sūnus, tad taip negali būti ir mokytojo metų skaičius yra skaičiaus $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ daliklis. Jei tas skaičius nelygus 30, tai jis yra daugiausiai 30 : 2 = 15 – mokytojas būtų per jaunas. Vadinasi, jam yra 30 metų ir jis gimė $2010 - 30 = 1980$ metais.
Teisingas atsakymas **C**.

J12. Ⓓ 40°

! Pažymėkime taškus, kaip pavaizduota brėžinyje. Reikia rasti $\angle BCE$.
ΔADE statusis, todėl $\angle AED = 90^\circ - \angle DAE = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$. $\angle BED + \angle AED = 180^\circ$, taigi $\angle BED = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Iš ΔBCE kampų sumos randame $\angle BCE = 180^\circ - \angle CBE - \angle BEC = 180^\circ - 30^\circ - \angle BED = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ = 40^\circ$.
Teisingas atsakymas **D**.



J13. Ⓑ 2009

! Skaičius 2 dalijasi tik iš savęs ir iš 1, todėl jis tegali būti skaitmens 2 ir tam tikro kiekio skaitmenų 1 sandauga $2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$. Be to, tiems skaitmenims galioja lygybė $2 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 2010$, arba $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 2008$, t. y. turime 2008 skaitmenis 1 ir vieną skaitmenį 2. 2009-ženkliai skaičiai, sudaryti iš šių skaitmenų, skiriasi tik skaitmens 2 užimama pozicija (2009 galimybės), ir, žinoma, visi šie skaičiai tinka. Taigi iš viso turime 2009 skaičius.
Teisingas atsakymas **B**.

J14. Ⓑ 2

Iš A būtinai pateksime į **1**. Dėl schemos simetriškumo nėra skirtumo, ar iš to skrituliuko **1** eisime į viršų, ar į dešinę. Tas pats galioja ir centriniam skrituliukui **3**. Taigi galime susitarti iš šių skrituliukų visada eiti į viršų. Tada lieka tik du keliai:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & B \\ & 2 \arrow[u] & & & \\ A \arrow[r] & 1 \arrow[u] & & & \end{tikzcd}$$

ir

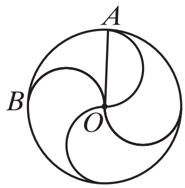
$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & B \\ & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[u] & & \\ A \arrow[r] & 1 \arrow[u] & & & \end{tikzcd}$$

Jie duoda dvi skirtingas sumas $1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$ ir $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$.
Teisingas atsakymas **B**.

J15. Ⓔ Sekmadienis

Išsiaiškinkime, kurios mėnesio dienos buvo antradieniai. Tam pirmojo mėnesio antradienio dienos numerį pažymėkime x. Tuomet kitas mėnesio antradienis bus po 7 dienų, t. y. $(x + 7)$-ąją mėnesio dieną, dar kitas — $(x + 14)$-ąją ir t. t. Šeštasis antradienis turėtų būti $(x + 35)$-ąją dieną, bet jokį mėnesį tiek dienų nėra, taigi iš viso turime daugiausiai 5 antradienius. Antra vertus, jei antradieniai būtų tik keturi, tai tik du iš numerių x, $x + 7$, $x + 14$, $x + 21$ būtų lyginiai, o mums reikia trijų. Taigi šį mėnesį buvo 5 antradieniai, išpuolę dienomis su numeriais x, $x + 7$, $x + 14$, $x + 21$, $x + 28$. Kadangi $x + 28 \leqslant 31$, tai $x \leqslant 3$. Bet $x = 1$ arba $x = 3$ netinka, nes šiais atvejais tik du iš 5 antradienių išpultų lyginėmis dienomis. Vadinasi, $x = 2$, ir $x + 21 = 23$-oji diena buvo antradienis. Tada 21-oji diena buvo sekmadienis.
Teisingas atsakymas **E**.

J16. Ⓒ 6π



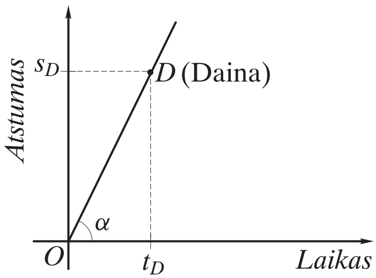
Skritulio centrą pažymėkime O, o dviejų iš keturių lankų antruosius galus — A ir B (žr. brėžinį). Apskritimo, kurio lankas yra OA, spindulys yra 2 cm, taigi skersmuo — 4 cm. Bet 4 cm yra ir atkarpos OA ilgis (nes ši atkarpa — didžiojo skritulio spindulys). Vadinasi, apskritimo lankas OA remiasi į to apskritimo skersmenį. Tai reiškia, kad lankas OA yra pusapskritimis, lygiai kaip kiti trys tokie patys lankai, o kiekvieno iš šių lankų ilgis yra pusė atitinkamo apskritimo ilgio, t. y.

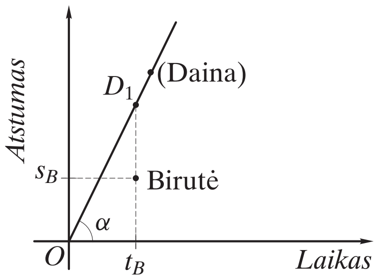
$$\smile OA = \smile OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi \text{ (cm)}.$$

Ieškomą figūros OAB perimetrą sudaro $\smile OA$ ir $\smile OB$ ilgiai ir dar $\smile AB$ ilgis. Kadangi keturios skritulio dalys yra lygios, tai ir keturi didžiojo apskritimo lankai lygūs, ir kiekvieno iš jų ilgis lygus ketvirtadaliui viso apskritimo ilgio, t. y. $|\smile AB| = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 = 2\pi$ (cm). Taigi ieškomas perimetras lygus $2\pi + 2\pi + 2\pi = 6\pi$ (cm).
Teisingas atsakymas **C**.

J17. Ⓓ Daina

Iš grafiko matome, kad, tarkime, Česlovas greitesnis nei Eimantas ir Aušra, nes per trumpesnį nei jų laiką nubėgo didesnį nei jie atstumą. Bet kaip palyginti Česlovą, Dainą ir Birutę? Česlovas nubėgo didesnį atstumą nei Daina, bet jam prireikė ir daugiau laiko.





Prisiminkime, kad (vidutinis) greitis apskaičiuojamas kaip atstumo ir laiko santykis: $v = \frac{s}{t}$. Grafike iš koordinačių pradžios O išveskime spindulį per, sakykime, Dainos rezultatą rodantį tašką $D(t_D; s_D)$ (žr. brėžinį). Tada Dainos greitis $v_D = \frac{s_D}{t_D} = \operatorname{tg}\alpha$, kur α — spindulio OD su laiko ašimi sudaromas kampas. Iš čia aišku, kad jei taškas D būtų kitoje to paties spindulio vietoje, greitis v_D nepasikeistų (juk jis priklauso tik nuo kampo α, kuris taškui D judant spinduliu nekinta).
Palyginkime grafiškai Dainos ir Birutės greičius. Spindulyje OD pažymėkime tašką D_1, kurio laiko koordinatė t_B sutampa su Birutės sugaištu laiku. Taškas D_1 yra spindulyje, todėl jo žymimas greitis sutampa su Dainos, laikas sutampa su Birutės laiku, o atstumas — didesnis nei Birutės (iš grafiko matome, kad D_1 yra *aukščiau* Birutės taško). Vadinasi, judant Dainos greičiu Birutės sugaištą laiką, bus įveiktas didesnis atstumas nei tas, kurį įveikė Birutė, judėdama savo greičiu. Todėl Daina greitesnė nei Birutė. Panašiai galima palyginti bet kuriuos du mokinius: jei per vieno iš jų tašką iš koordinačių pradžios išvedus spindulį kito taškas lieka žemiau spindulio, tai pirmasis mokinys greitesnis. Kitaip tariant, greitesnis yra tas, kurio spindulys statesnis. Taip gauname, kad greičiausia iš visų buvo Daina: jos spindulys stačiausias ir likę keturi taškai yra žemiau to spindulio.
Teisingas atsakymas **D**.

J18. B 3

Pradinį plotą pažymėkime S, o gautos figūros baltos dalies plotą — S_1. Tada naujos figūros plotas bus $S_1 + 1$, o pradinio trikampio — $S = 2S_1 + 1$ (užtušuota dalis ir dviguba nenudažyta dalis sudaro visą trikampį). Taigi $S = 1{,}5(S_1 + 1)$ ir $S = 2S_1 + 1$. Vadinasi, $1{,}5(S_1 + 1) = 2S_1 + 1$. Išsprendę lygtį gauname $S_1 = 1$, $S = 2S_1 + 1 = 3$.
Teisingas atsakymas **B**.

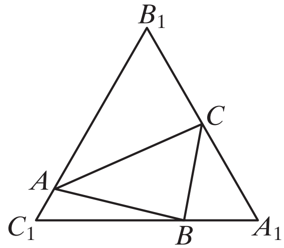
Uždavinį galima išspręsti ir nesudarant lygčių.
Kadangi trikampio plotas $\frac{3}{2}$ karto didesnis nei naujos figūros plotas, tai naujos figūros plotas sudaro $\frac{2}{3}$ pradinio, t. y. jis sumažėjo trečdaliu. Bet šis skirtumas, kuriuo sumažėjo plotas, lygus naujos figūros baltos dalies plotui. Vadinasi, kai mes dar kartą atimame baltos dalies plotą, t. y. paliekame tik užtušuotąją dalį, tai iš likusių dviejų trečdalių atimame dar vieną ir mums lieka vienas pradinio ploto trečdalis, lygus 1. Todėl pradinis plotas lygus $3 \cdot 1 = 3$.
Teisingas atsakymas **B**.

J19. C 1,1

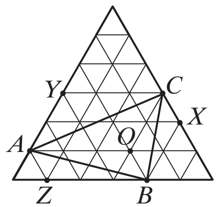
Kaskart, kai į vežimėlių eilę įstumiame naują vežimėlį, eilės ilgis padidėja tiek pat. Kai į 10 vežimėlių eilę įstatome dar 10, tai tą eilę po tiek pat pailginam 10 kartų, o bendroje sumoje — $4{,}9 - 2{,}9 = 2$ metrais. Vadinasi, kaskart įstačius vieną vežimėlį eilė pailgėja $2 : 10 = 0{,}2$ metro. Kai į vieną laisvą vežimėlį įstatome devynis, tai pailginam eilę $0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8$ metro, bei gauname 2,9 metro ilgio eilę. Taigi pradinis vieno vežimėlio „eilės“ (t. y. paties vežimėlio) ilgis lygus $2{,}9 - 1{,}8 = 1{,}1$ metro.
Teisingas atsakymas **C**.

J20. Ⓐ 11

! Pažymėkime didžiojo trikampio viršūnes, kaip pavaizduota brėžinyje. Raskime ΔA_1BC plotą. Tam pažymėkime vienetinio trikampėlio kraštinės ilgį a (cm). Pagal trikampio ploto formulę trikampėlio plotas lygus $\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2}{2}\sin 60^\circ = 1\,(\mathrm{cm}^2)$. Pagal tokią pačią formulę ΔA_1BC plotas lygus $\frac{1}{2}A_1B\cdot A_1C\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 3a\cdot \sin 60^\circ = 6\cdot\frac{a^2}{2}\sin 60^\circ = 6\cdot 1 = 6\,(\mathrm{cm}^2)$. Analogiškai randame, kad ΔAB_1C plotas yra $15\,\mathrm{cm}^2$, o ΔABC_1 — $4\,\mathrm{cm}^2$. Tada ΔABC plotas lygus $36-6-15-4 = 11\,(\mathrm{cm}^2)$. Teisingas atsakymas **A**.



!! Galima spręsti ir kitaip, nesinaudojant ploto formulėmis. Pažymėkime taškus O, X, Y, Z, kaip parodyta brėžinyje. Pastebėkime, kad keturkampiai $AYCO$, $XBOC$, $AOBZ$ yra lygiagretainiai. Kadangi AC — lygiagretainio $AYCO$ įstrižainė, tai ΔAOC plotas lygus pusei šio lygiagretainio ploto, kurį savo ruožtu galima apskaičiuoti be formulių — trikampėliais. Lygiagretainį sudaro 12 trikampėlių, tad jo plotas lygus $12\,\mathrm{cm}^2$, o trikampio AOC plotas — $12:2 = 6\,(\mathrm{cm}^2)$. Panašiai randame ΔOBC ir ΔABO plotus — 2 ir $3\,\mathrm{cm}^2$. Gauname ΔABC plotą: $6+2+3 = 11\,(\mathrm{cm}^2)$. Teisingas atsakymas **A**.



J21. Ⓑ 6

! Atkarpos CD vidurio tašką pažymėkime N. Kadangi CD — stačiojo trikampio CMD įžambinė, tai jos vidurys N bus apie šį trikampį apibrėžto apskritimo centras, o to apskritimo spindulys lygus

$$MN = NC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = MB = 1$$

(pasinaudojom tuo, kad M yra AB vidurio taškas ir kad trapecija $ABCD$ lygiašonė). MN yra duotos trapecijos vidurio linija, todėl

$$MN = \frac{AD+BC}{2} \quad \text{ir} \quad AD+BC = 2MN = 2.$$

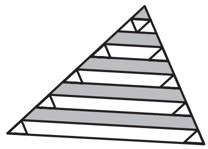
Trapecijos perimetras lygus

$$(AD+BC)+AB+CD = 2+2AB = 2+2\cdot 2MB = 2+4 = 6.$$

Teisingas atsakymas **B**.

J22. Ⓒ 45 %

! Kiekviena iš tiesių dalija pradinį trikampį į trapeciją ir trikampį, panašų į pradinį (vienas kampas sutampa ir dar yra dvi poros lygių atitinkamųjų kampų). Panašumo koeficientai bus $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, …, $\frac{9}{10}$ (pagal tai, kokią didžiojo trikampio kraštinės dalį atkerta lygiagrečios tiesės). Todėl gautųjų trikampių plotai sudarys atitinkamai $\left(\frac{1}{10}\right)^2, \left(\frac{2}{10}\right)^2, \left(\frac{3}{10}\right)^2, \ldots, \left(\frac{9}{10}\right)^2$ pradinio trikampio ploto (t. y. sudarys $1\,\%, 4\,\%, 9\,\%, \ldots, 81\,\%$ pradinio ploto). Taigi viršutinis pilkas trikampis sudarys 1 % pradinio ploto, po juo esanti pilka juosta — $9\,\% - 4\,\% = 5\,\%$, trečioji pilka juosta — $25\,\% - 16\,\% = 9\,\%$, ketvirtoji — $49\,\% - 36\,\% = 13\,\%$, penktoji — $81\,\% - 64\,\% = 17\,\%$. Sumoje turime $1\,\% + 5\,\% + 9\,\% + 13\,\% + 17\,\% = 45\,\%$ viso ploto.
Teisingas atsakymas **C**.



Yra kitas „gudresnis“ sprendimo būdas, kuris taptų daug efektyvesnis už pirmąjį, jei trikampis būtų padalytas į daugiau juostų.
Nuo kiekvienos baltos juostos iš šonų nukirskime du trikampėlius, lygius viršutiniam užtušuotam trikampėliui (su kraštinėmis, lygiagrečiomis atitinkamoms to trikampėlio kraštinėms). Nesunku įsitikinti, kad likusi vidurinė kiekvienos baltos juostos dalis lygi (ir todėl lygiaplotė) virš jos esančiai užtušuotai daliai. Kiekvienas iš 10 baltų trikampėlių, kaip ir viršutinis užtušuotasis, sudaro 1 % ploto, o likusi didžiojo trikampio dalis — 90 %. Lygiai pusė tos likusios dalies užtušuota, todėl užtušuota 90 % : 2 = 45 % viso trikampio ploto.
Teisingas atsakymas **C**.

J23. Ⓒ 55

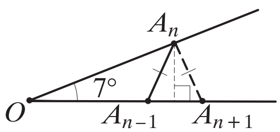
Jei n yra lyginis, tai $n^n = \left(n^{\frac{n}{2}}\right)^2$ yra tikslus kvadratas.
Jei n yra nelyginis, tai $n^{n-1} = \left(n^{\frac{n-1}{2}}\right)^2$ yra tikslus kvadratas, o $n^n = n \cdot \left(n^{\frac{n-1}{2}}\right)^2$ bus tikslus kvadratas tada ir tik tada, kai tikslus kvadratas bus daugiklis n. Taigi n^n bus tikslus kvadratas tais atvejais, kai n yra lyginis arba n yra nelyginis tikslus kvadratas. Nuo 1 iki 100 yra 50 lyginių skaičių, o tarp likusių nelyginių skaičių penki $(1, 9, 25, 49, 81)$ yra tikslūs kvadratai. Vadinasi, tinka $50 + 5 = 55$ skaičiai.
Teisingas atsakymas **C**.

J24. Ⓑ 7

Iš keturių galvakojų pasakytų vienas kitam prieštaraujančių teiginių bent trys klaidingi, taigi tarp keturių daugiakojų bent trys sumelavo ir yra septynkojai. Todėl kartu galvakojai turi bent $7+7+7+6 = 27$ kojas. Vadinasi, raudonasis galvakojis sumelavo ir turi septynias kojas. (Situacija įmanoma: žaliasis galvakojis gali turėti 6 kojas, o likę trys — po 7.)
Teisingas atsakymas **B**.

J25. Ⓒ 13

Tarkime, mums jau pavyko atidėti n atkarpų (paskutinioji iš jų $A_{n-1}A_n$; žr. brėžinį).



Kada mums pavyks atidėti $(n + 1)$-ąją?
Pastebėsime, kad trikampis $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ turi būti lygiašonis ($A_{n-1}A_n = A_nA_{n+1}$), o taškas A_{n+1} turi būti atidėtas spindulyje OA_{n-1} į kitą pusę nuo A_{n-1} nei taškas O. Tada $\angle A_{n+1}A_{n-1}A_n$ turi būti smailusis (kaip lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo), bet $\angle OA_{n-1}A_n = 180° - \angle A_{n+1}A_{n-1}A_n > 90°$. Iš kitos pusės, jei $\angle OA_{n-1}A_n > 90°$, tai taškas A_{n+1}, simetriškas taškui A_{n-1} statmens iš A_n į OA_{n-1} atžvilgiu, tiks: tada $A_nA_{n-1} = A_nA_{n+1}$ dėl simetrijos to statmens atžvilgiu, o A_{n+1} yra kitoje pusėje nuo statmens nei taškas A_{n-1}, todėl ir kitoje pusėje nuo taško A_{n-1} nei taškas O.
Išsiaiškinkime, kaip kinta $\angle OA_{n-1}A_n$ didėjant n ir kada atkarpas dar galima atidėti. Kai $n \geqslant 2$, tai $\angle OA_nA_{n+1} = 180° - \angle A_nOA_{n+1} - \angle OA_{n+1}A_n = 180° - 7° - \angle A_{n-1}A_{n+1}A_n = 173° - \angle A_nA_{n-1}A_{n+1} = 173° - (180° - \angle A_nA_{n-1}O) = \angle OA_{n-1}A_n - 7°$ ($\Delta A_{n-1}A_nA_{n+1}$ lygiašonis). Taigi matome, kad kampas, kuris pradžioje (kai $n = 1$) lygus $\angle OA_1A_2 = 180° - \angle A_1OA_2 - \angle OA_2A_1 = 180° - 2 \cdot 7°$, didinant n vienetu, mažėja $7°$, o kai jis tampa mažesnis ar lygus $90°$, tenka sustoti — daugiau atkarpų nebeatidėsime. Taigi $\angle OA_1A_2 = 180° - 2 \cdot 7°$, $\angle OA_2A_3 = 180° - 3 \cdot 7°$, $\angle OA_3A_4 = 180° - 4 \cdot 7°, \ldots, \angle OA_{11}A_{12} = 180° - 12 \cdot 7° = 96° > 90°$, taigi A_{13} dar galima atidėti, bet $\angle OA_{12}A_{13} = 180° - 13 \cdot 7° = 89° < 90°$, tad A_{14} atidėti nebegalima. Vadinasi, galima atidėti 13 atkarpų $OA_1, A_1A_2, \ldots, A_{12}A_{13}$.
Teisingas atsakymas **C**.

J26. A -2006

Įsitikinkime, kad lyginiai sekos nariai $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sudaro aritmetinę progresiją. Pagal uždavinio sąlygą kiekvienam $n \geqslant 4$ galioja lygybė $a_n = a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-1}$. Taigi

$$a_{2k+1} = a_{2k-1} + a_{2k-2} - a_{2k} \quad \text{ir} \quad a_{2k+2} = a_{2k} + a_{2k-1} - a_{2k+1},$$

kai $k \geqslant 2$. Iš antrosios lygybės atėmę pirmąją, gauname

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k-1} - a_{2k+1} - \big(a_{2k-1} + a_{2k-2} - a_{2k}\big)$$

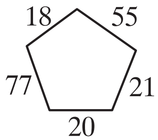
arba $a_{2k+2} - a_{2k} = a_{2k} - a_{2k-2}$, kai $k \geqslant 2$. Taigi $a_4 - a_2 = a_6 - a_4 = a_8 - a_6 = \ldots$; kadangi skirtumas tarp gretimų lyginių sekos narių visada tas pats, tai $a_2, a_4, a_6 \ldots$ yra aritmetinė progresija, kurios skirtumas $d = a_4 - a_2 = 0 - 2 = -2$. 1005-asis progresijos narys

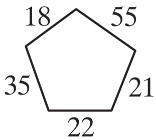
$$a_{2010} = a_2 + d \cdot (1005 - 1) = 2 + (-2) \cdot 1004 = -2006.$$

Teisingas atsakymas **A**.

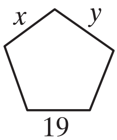
J27. C 19

Skaičiai **A**, **B**, **D** ir **E** gali būti parašyti:





Skaičius 19 parašytas būti negali. Iš tiesų, jei prie vienos iš penkiakampių kraštinių užrašytume 19 (žr. pav.),

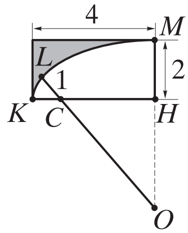


tai $\mathrm{DBD}(x, 19) > 1$ ir $\mathrm{DBD}(y, 19) > 1$, bet tada x ir y turi dalytis iš 19, o tai reiškia, kad $\mathrm{DBD}(x, y)$ dalijasi iš 19, taigi $\mathrm{DBD}(x, y) > 1$. To negali būti, nes skaičiai x ir y užrašyti prie gretimų penkiakampio kraštinių.
Teisingas atsakymas **C**.

J28. D 45

Jei pirmasis ir trečiasis skaitmenys yra skirtingo lyginumo, tai jų aritmetinis vidurkis (lygus pusei skaitmenų sumos) nėra sveikasis skaičius. Taigi pirmasis ir trečiasis skaitmenys yra arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai.
Bet kuriai vienodo lyginumo pirmojo ir trečiojo skaitmenų porai (a, c) yra lygiai vienas vidurinis skaitmuo $b = \frac{a+c}{2}$ ir atitinkamai lygiai vienas triženklis skaičius. Taigi uždavinio sąlygą tenkinančių skaičių yra lygiai tiek, kiek yra tokių porų (a, c). Kiekvienai iš pirmojo skaitmens keturių lyginių reikšmių 2, 4, 6, 8 į porą tinka bet kuri iš trečiojo skaitmens lyginių reikšmių 0, 2, 4, 6, 8, taigi gauname $4 \cdot 5 = 20$ atvejų. Analogiškai su nelyginiais skaitmenimis gauname $5 \cdot 5 = 25$ atvejus (ir pirmasis, ir trečiasis skaitmuo gali įgyti bet kurią iš penkių reikšmių 1, 3, 5, 7, 9). Iš viso turime $20 + 25 = 45$ atvejus.
Teisingas atsakymas **D**.

J29. A 6



Vertikalioji ir horizontalioji simetrijos ašys dalija ovalą į keturias lygias dalis. Nagrinėkime vieną iš jų (žr. brėžinį). Raidėmis K ir M brėžinyje pažymėkime pasirinktos ovalo dalies galai, H — simetrijos ašių sankirta, L — bendras dviejų apskritimų lankų taškas, o C ir O — atitinkamai mažesniojo ir didesniojo apskritimų centrai. Ovalo liestinė taške L yra kartu ir abiejų apskritimų liestinė, todėl šių apskritimų spinduliai OL ir CL yra statmeni minėtajai liestinei. Tai reiškia, kad taškai L, C ir O yra vienoje tiesėje.
Ieškomą didesniojo apskritimo spindulį pažymėkime R. Tada $OC = OL - CL = R - 1$; $OH = OM - HM = R - 2$; $CH = KH - KC = 4 - 1 = 3$. Trikampiui OHC pritaikykime Pitagoro teoremą: $OC^2 = OH^2 + CH^2$, arba $(R-1)^2 = (R-2)^2 + 3^2$. Atskliaudę ir sutraukę panašiuosius narius, gauname lygtį $2R = 12$. Vadinasi, $R = 6$.
Teisingas atsakymas **A**.

J30. E 116

Nustatykime, kiek juostų gali sudaryti kodą. Kadangi kodas prasideda ir baigiasi tos pačios spalvos juosta, tai juostų skaičius nelyginis. Be to, jei turėtume 5 ar mažiau juostų, tai jų bendras plotis neviršytų $5 \cdot 2 = 10 < 12$. Jei turėtume 13 ar daugiau juostų, tai jų bendras plotis būtų bent $13 \cdot 1 = 13 > 12$. Vadinasi, juostų tegalime turėti 7, 9 arba 11.
Tarkime, kad juostų yra 7. Kad jų seka būtų brūkšniniu kodu, juostų pločių suma turi būti lygi 12. Nesunku pastebėti, kad taip bus, jei penkios juostos bus pločio 2 ir dvi — pločio 1 (o kai pločio 2 juostų tarp turimų septynių daugiau ar mažiau, tai juostų seka atitinkamai platesnė ar siauresnė, nei reikia). Iš eilės einančias septynias juostas sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki 7. Lygiai dvi iš jų turi būti pločio 1 ir to pakanka, kad juostų seka būtų kodu.
Keliais skirtingais būdais šias dvi juostas galime parinkti? Galime skaičiuoti taip: pirma, vieną iš juostų galime parinkti septyniais būdais, o tada kiekvienu iš septynių atvejų antrai juostai parinkti lieka šešios galimybės. Taip gauname $7 \cdot 6 = 42$ būdus. Tik šiuo atveju nereikia pamiršti, kad taip kiekvieną juostų porą parinkome du kartus: tarkime, juostas 2 ir 5 galime parinkti, iš pradžių iš 7 juostų pasirinkdami juostą 2, o tada iš šešių juostų pasirinkdami juostą 5. Bet galime pirmiau pasirinkti juostą 5, o tik tada — juostą 2. Todėl turime ne 42, bet $42 : 2 = 21$ juostų, kurios brūkšniniame kode gali būti pločio 1, porą. Vadinasi, yra 21 brūkšninis kodas iš 7 juostų.
Panašiai samprotaujame 9 juostų kodo atveju. Iš eilės sunumeruojame juostas. Trys juostos turi būti pločio 2, o likusios šešios — pločio 1. Brūkšninių kodų yra tiek, keliais būdais iš 9 juostų galime išrinkti tris. Vieną iš juostų galime pasirinkti 9 būdais, tada antrą — 8 ir pagaliau trečią — 7. Gauname $9 \cdot 8 \cdot 7$ būdų, tačiau kiekvieną juostų trejetą galime parinkti šešiais būdais. Tarkime, juostas 2, 4 ir 9 galime parinkti tokia eilės tvarka: 3, 4, 9; 3, 9, 4; 4, 3, 9; 4, 9, 3; 9, 3, 4; 9, 4, 3. Vadinasi, ilgio 2 juostų trejetų (ir juos atitinkančių kodų) yra $9 \cdot 8 \cdot 7 : 6 = 84$.
Jei turime 11 juostų, tereikia pasirinkti tą vienintelę iš jų, kuri būtų pločio 2. Tai galima padaryti 11 būdų.
Taigi iš viso kodų yra $21 + 84 + 11 = 116$.
Teisingas atsakymas **E**.

Gerai žinomas matematinis faktas yra, kad m skirtingų elementų iš n elementų aibės ($m \leqslant n$) galima išrinkti $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ būdų (čia $k!$ reiškia sandaugą $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, kai $k \geqslant 1$, ir skaičių 1, kai $k = 0$).
Pasinaudoję šia formule, iš karto gauname, kad 3 juostas iš 9 galima parinkti $C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ būdais, o 2 iš 7 — parinkti $C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$ būdu. Toliau samprotaujame kaip pirmame sprendime.

SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. B 9×9

Žr. Junioro 8 uždavinio sprendimą.

S2. C 1910

Žr. Junioro 3 uždavinio sprendimą.

S3. D 8

Didesniojo kubo pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi $\sqrt{4} = 2\,(\mathrm{dm})$. Tada šio kubo tūris yra $2^3 = 8\,(\mathrm{dm}^3)$. Analogiškai, mažesniojo kubo tūris lygus $1\,\mathrm{dm}^3$. Vandenį nešti teks tiek kartų, kiek $1\,\mathrm{dm}^3$ tūris telpa $8\,\mathrm{dm}^3$ tūryje, t. y. 8 kartus.
Teisingas atsakymas **D**.

S4. D 125

Jei skaičius dalijasi iš 5, tai jo paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5. Tas skaitmuo turi būti nelyginis, todėl jis lygus 5. Jei likę trys skaičiaus skaitmenys bus bet kokie nelyginiai, tai toks skaičius tenkins uždavinio sąlygą. Pirmas skaitmuo gali būti bet kuris iš 5 skaičių 1, 3, 5, 7, 9; lygiai taip 5 galimybės yra ir antrajam, ir trečiajam skaitmenims. Iš viso turime $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ galimybes.
Teisingas atsakymas **D**.

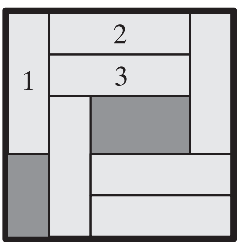
S5. D Kažkuris įmonės darbuotojas yra jaunesnis nei 25 metų

Iš vadovo neteisumo išplaukia, kad ne kiekvienas darbuotojas turi bent 25 metus; vadinasi, kažkuris darbuotojas tiek metų neturi, o tai ir pasakyta atsakyme **D**.

Įsitikinkime, kad likę atsakymai iš pateiktos informacijos neišplaukia.
Teiginiai **A**, **B** ir **E** yra suderinami su vadovo teiginiu (gali galioti vienu metu su juo), todėl niekaip negali išplaukti iš vadovo teiginio klaidingumo — jie gali būti klaidingi kaip ir vadovo teiginys.
Teiginys **C** su vadovo teiginiu nesuderinamas, bet iš vadovo teiginio klaidingumo neišplaukia, nes įmanoma situacija, kai klaidingas yra tiek vadovo teiginys, tiek teiginys **C** (kai yra bent vienas darbuotojas, neturintis 25 metų, ir yra bent vienas, jau turintis).
Teisingas atsakymas **D**.

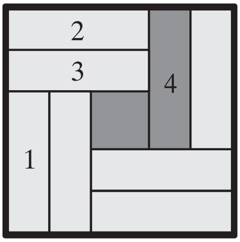
S6. B 3

Pažymėkime plyteles, kaip parodyta paveikslėlyje.



Pirmuoju ėjimu tegalime pastumti plytelę 1 žemyn. Tuomet antruoju ėjimu tegalime pastumti plytelę 2 arba 3 į kairę (taip pat galime vėl stumti aukštyn ar žemyn plytelę 1, bet tokiu atveju į naują poziciją galėjome ją pastumti jau pirmuoju ėjimu). Po jokio iš šių galimų ėjimų vietos dar vienai plytelei neatsiras.

Taigi dviejų plytelių pastūmimo nepakanka. O tris plyteles pastūmę, tikslą pasiekti galime: pastumkime plytelę 1 žemyn iki galo, o tada plyteles 2 ir 3 kairėn iki galo. Naujai plytelei atsiras vietos 4 srityje:



Teisingas atsakymas **B**.

S7. Ⓓ 120°

AB yra apie statųjį trikampį ABC apibrėžto apskritimo skersmuo, o AB vidurys M — to apskritimo centras. Tada $MA = MB = MC$ kaip to paties apskritimo spinduliai.
ΔAMC lygiašonis ($MA = MC$), todėl $\angle MCA = \angle MAC = 60^\circ$, o ir trečiasis trikampio kampas $\angle AMC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Taigi $\angle BMC = 180^\circ - \angle AMC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Teisingas atsakymas **D**.

S8. Ⓔ 2010

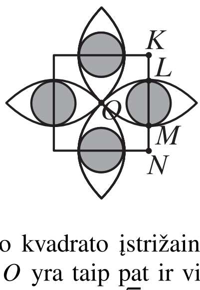
Prizmės briaunos yra pagrindų — vienodų daugiakampių — kraštinės bei atkarpos, jungiančios atitinkamas tų daugiakampių viršūnes. Jei prizmės pagrindai yra n-kampiai, tai jie turi po n kraštinių, o jų atitinkamas viršūnes jungiančių atkarpų taip pat bus n. Taigi iš viso prizmė turės $n+n+n = 3n$ briaunų. Iš pateiktų atsakymų tinka tik 2010 (**E**), nes tik jis dalijasi iš 3. Šis briaunų skaičius įmanomas — tiek briaunų turi prizmė, kurios pagrindai turi po $\frac{2010}{3} = 670$ viršūnių.
Teisingas atsakymas **E**.

S9. Ⓓ 4

Jei $x = 1$, tai $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 + (y-2)^2 > 1$. Sprendinių nėra.
Jei $x \geqslant 5$, tai $x - 3 \geqslant 2$ ir $(x-3)^2 \geqslant 4$, todėl $(x-3)^2 + (y-2)^2 \geqslant 4 + (y-2)^2 > 1$.
Jei $x = 2$ arba $x = 4$, tai gauname $(x-3)^2 = 1$ ir $(y-2)^2 = 0$, iš čia $y = 2$.
Jei $x = 3$, tai $(x-3)^2 = 0$ ir $(y-2)^2 = 1$, iš čia $y = 2 + 1 = 3$ arba $y = 2 - 1 = 1$.
Gauti keturi sprendiniai (2; 2), (4; 2), (3; 1) ir (3; 3) tenkina lygtį.
Teisingas atsakymas **D**.

S10. Ⓐ $4(3 - 2\sqrt{2})\pi$

Pažymėkime taškus K, L, M, N, O, kaip parodyta brėžinyje.



Duotojo kvadrato įstrižainė lygi $2\sqrt{2}$, o atkarpa NO yra pusė kvadrato įstrižainės, t. y. $\sqrt{2}$. Tačiau NO yra taip pat ir vieno iš pusapskritimių spindulys. Analogiškai ir kitų trijų pusapskritimių spinduliai lygūs $\sqrt{2}$, o $KN = 2$ kaip kvadrato kraštinė, todėl $KL = KN - NL = 2 - \sqrt{2}$; $MN = KN - KM = 2 - \sqrt{2}$; $LM = KN - KL - MN = 2 - (2 - \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$.

Atkarpai LM priklauso užtušuoptojo skritulėlio centras, todėl LM — skritulėlio skersmuo, o skritulėlio spindulys lygus $\frac{LM}{2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$. Užtušuotojo skritulėlio plotas lygus $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = (3-2\sqrt{2})\pi$. Analogiškai gaunama, kad ir kitų užtušuotų skritulėlių plotas toks pats. Vadinasi, užtušuotos dalies plotas lygus $4(3-2\sqrt{2})\pi$.
Teisingas atsakymas **A**.

S11. E 1

! Randame progresijos daugiklį

$$d = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{6}}.$$

Tada ketvirtasis progresijos narys lygus

$$\sqrt[6]{7}\cdot d = 7^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}} = 7^0 = 1.$$

Dėl visa ko patikriname, ar progresijos formulę tenkina trečiasis narys:

$$\sqrt[3]{7}\cdot d = 7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7}.$$

Teisingas atsakymas **E**.

S12. C 64π

! Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad nepakanka informacijos — juk nežinome nė vieno iš dviejų apskritimų didumo, o skaičius duotas tik vienas (16). Nepaisant to, pamėginkime pažymėti apskritimų spindulius R ir r ($R > r$), ir pažiūrėkime, kas iš to išeis.
Tegu mažesnysis apskritimas liečia stygą AB taške C, o apskritimų centrą pažymėkime O. Iš Pitagoro teoremos stačiajam trikampiui OCB gauname $R^2 = OB^2 = OC^2 + CB^2 = r^2 + CB^2$ ir $CB^2 = R^2 - r^2$. Analogiškai gauname, kad $CA^2 = R^2 - r^2$. Taigi $CA = CB$ ir C yra atkarpos AB vidurio taškas, todėl $CA = CB = \frac{AB}{2} = 8$ bei $R^2 - r^2 = CB^2 = 64$. Mūsų ieškomas nudažytas plotas lygus skritulių plotų skirtumui $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = 64\pi$.
Teisingas atsakymas **C**.

S13. C 2009

? Kadangi $2x = 5y$, tai x dalijasi iš 5. Patogu iš karto užrašyti, kad $x = 5z$, kur z — kažkoks sveikasis skaičius. Tada $5y = 2x = 10z$ ir $y = 2z$. Gauname $x + y = 5z + 2z = 7z$, t. y. $x + y$ dalijasi iš 7. Iš atsakymų tik 2009 (**C**) dalijasi iš 7, todėl renkamės **C**.

! Lengva patikrinti, kad 2009 tikrai galime gauti, kai $z = 287$, $x = 5\cdot 287$, $y = 2\cdot 287$.
Teisingas atsakymas **C**.

S14. A 11
Žr. Junioro 20 uždavinio sprendimą.

S15. A 1

? Iš sąlygos aišku, kad dėžėje yra bent du raudoni rutuliai ir bent po vieną žalią ir mėlyną. Jei mėlynų rutulių būtų bent du, tai ištraukę du raudonus, du mėlynus ir vieną žalią rutulį — iš viso penkis, neturėtume trijų vienspalvių rutulių. Todėl mėlynas rutulys turi būti vienas.
Renkamės atsakymą **A**.

! Ar uždavinio situacija įmanoma? Žalių rutulių (kaip ir mėlynų) taip pat tegali būti vienas. Aišku, kad tinka situacija, kai raudonų rutulių yra trys, o kitų spalvų rutulių — po vieną.
Teisingas atsakymas **A**.

S16. Ⓐ

? Jei būtų teisingas brėžinys **B**, tai skaičių poros $(x;\, y) = (1;\, 0)$ ir $(x;\, y) = (0;\, 1)$, pavaizduotos jame, turėtų būti lygties sprendiniai, bet taip nėra.
Panašiai netinka **C** ir **D**, nes $(x;\, y) = (2;\, 0)$ nėra lygties sprendinys.
Mums tenka rinktis tarp labai panašių brėžinių **A** ir **E**. Kad nustatytume, kuris iš jų teisingas, patikrinkime kokį nors galimą lygties sprendinį, viename brėžinyje pavaizduotą, o kitame — ne. Pavyzdžiui, brėžinyje **E** pavaizduotas galimas sprendinys $(x;\, y) = \left(-\frac{1}{2};\, -\frac{1}{2}\right)$. Jis lygties netenkina, taigi ir brėžinys **E** neteisingas.
Renkamės atsakymą **A**.

! Įsitikinkime, kad atsakymas **A** tikrai teisingas. Prisiminkime, kad bet kokiam realiajam skaičiui z jo modulis $|z|$ sutampa su z, kai $z \geqslant 0$, ir yra lygus $-z$, kai $z < 0$. Tokiu būdu mums reikia išnagrinėti keturis atvejus: 1) $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$; 2) $x \geqslant 0,\ y < 0$; 3) $x < 0,\ y \geqslant 0$; 4) $x < 0,\ y < 0$.
1) Šiuo atveju $|x| = x$, $|y| = y$, todėl $\left(x - |x|\right)^2 + \left(y - |y|\right)^2 = (x - x)^2 + (y - y)^2 = 0 \neq 4$, sprendinių nėra. Vadinasi, I koordinačių sistemos ketvirtyje taškų nebus pažymėta.
2) $|x| = x$, $|y| = -y$, todėl $\left(x - |x|\right)^2 + \left(y - |y|\right)^2 = (x - x)^2 + (y + y)^2 = 4y^2$. Lygtis ekvivalenti lygybei $4y^2 = 4$, o pastaroji, turint omenyje sąlygą $y < 0$, ekvivalenti lygybei $y = -1$. Vadinasi, II koordinačių sistemos ketvirtyje lygties sprendinius vaizduos tame ketvirtyje esantis tiesės $y = -1$ spindulys.
3) Panašiai kaip ir atveju 2) pradinė lygtis ekvivalenti lygybei $x = -1$. Taškai, kurių pirmoji koordinatė x lygi -1, sudaro vertikalią tiesę. Taigi sprendinius vaizduos šios tiesės spindulys, priklausantis IV ketvirčiui.
4) Dabar $|x| = -x$, $|y| = -y$ ir lygtis atrodys $(x + x)^2 + (y + y)^2 = 4$, arba $x^2 + y^2 = 1$. Tokios lygties sprendinius vaizduoja vienetinio spindulio apskritimas su centru koordinačių pradžioje. Šio apskritimo taškai $(x;\, y)$, kuriems $x, y < 0$, sudaro apskritimo lanką, esantį III koordinačių sistemos ketvirtyje.
Visus lygties sprendinius vaizduos figūra, sudaryta iš dviejų spindulių ir apskritimo lanko, gautų 2), 3) ir 4) punktuose, pavaizduota brėžinyje **A**.
Teisingas atsakymas **A**.

S17. Ⓑ 84

! Apie taisyklingąjį keturiolikakampį galima apibrėžti apskritimą. Šį apskritimą pažymėkime c. Pasirinkime bet kurias tris keturkampio viršūnes X, Y, Z. Kada kampas XYZ bus statusis? Šis kampas yra įbrėžtas į apskritimą c; jis bus statusis tada ir tik tada, kai remsis į apskritimo skersmenį, t. y. kai XZ bus apskritimo c skersmuo. Vadinasi, reikiamą statųjį trikampį gausime, kai dvi iš trijų pasirinktųjų keturiolikakampio viršūnių yra apskritimo c skersmens galai, t. y. kai tos dvi viršūnės bus priešingos keturiolikakampio viršūnės.
Keturiolikakampyje yra septynios priešingų viršūnių poros. Kiekviena iš šių 7 porų drauge su bet kuria iš likusių $14 - 2 = 12$ viršūnių bus reikiamo stačiojo trikampio viršūnėmis. Vadinasi, iš viso yra $7 \cdot 12 = 84$ statieji trikampiai.
Teisingas atsakymas **B**.

S18. Ⓔ Kitas skaičius

! Natūralu tikėtis, kad rašyti daugybos ženklus yra naudingiau nei pliusus, todėl dažną aplanko mintis, kad $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$, tačiau taip nėra, nes skaičių 1 geriau pridėti: $1 + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots 10$. Visgi likusius skaičius geriausia yra sudauginti, tad $N = 1 + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$. Įrodysime, kad taip ir yra.
Pastebėkime, kad įstačius vietoj žvaigždučių „+“ ar „·“, duotas reiškinys virsta užrašytųjų skaičių ir/arba jų sandaugų suma (galima ir vieno dėmens „suma“ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$). Tos sumos, kuria užrašomas skaičius N, dėmenis pažymėkime eilės tvarka $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ($N = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$, $k \geqslant 1$). Dėmuo P_1 gali būti lygus 1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, …, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9$ arba $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$. Jei $P_1 \neq 1$, tai $N = 1 \cdot 2 * \ldots * 10$. Tačiau tuomet pakeitę ženklą tarp 1 ir 2 į „+“, gausime skaičių

$1 + 2 * \ldots * 10 = 1 + P_1 + P_2 + \cdots + P_k > N$, o tai prieštarauja prielaidai, kad N yra didžiausia reiškinio reikšmė. Vadinasi, $P_1 = 1$, o P_2 gali būti lygus $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, \ldots, 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10$. Tarkime, kad $P_2 \neq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10$. Tada $k \geqslant 3$ ir egzistuoja P_3. $P_3 \geqslant 3$, nes P_3 yra arba vienas iš skaičių $3, 4, 5, \ldots, 10$, arba kelių iš šių skaičių sandauga (skaičius 2 jau „užimtas" dėmens P_2). Kadangi N yra didžiausia reiškinio reikšmė, tai pliusą tarp P_2 ir P_3 pakeitę į „·", skaičiaus N nepadidinsime, t. y. $P_2P_3 \leqslant P_2 + P_3$, arba $P_2(P_3 - 1) \leqslant P_3$. $P_2 \geqslant 2$, todėl $P_3 \geqslant 2(P_3 - 1)$; iš to išplaukia nelygybė $P_3 \geqslant 2P_3 - 2$, arba $2 \geqslant P_3 \geqslant 3$. Taip būti negali; vadinasi, $P_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10$. N nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5, nei iš 7, todėl jo mažiausias pirminis daliklis didesnis nei 7. Teisingas atsakymas **E**.

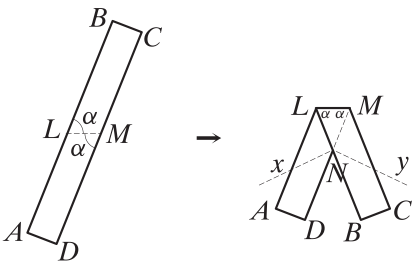
!! Skaičių teorijoje yra gerai žinoma tokia teorema:
Vilsono teorema. Tegu duotas natūralusis skaičius $p > 1$. Tada skaičius $(p - 1)! + 1$ dalijasi iš p tada ir tik tada, kai p yra pirminis skaičius.
Remiantis šia teorema, $N = 10! + 1$ dalijasi iš 11. Taigi mažiausias N pirminis daliklis lygus 11.

S19. Ⓐ 35

! Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad raide x pažymėta trumpsenioji iš dviejų nežinomų trikampio kraštinių, t. y. $x \leqslant y$. Tada $105 = xy \geqslant x^2$, todėl $x \leqslant \sqrt{105} < 11$. Kadangi skaičius x sveikasis, tai $x \leqslant 10$. Be to, x yra skaičiaus 105 daliklis, o 105 turi keturis daliklius, mažesnius už 10: 1, 3, 5, 7.
Tačiau jei $x \leqslant 5$, tai $y = \frac{105}{x} \geqslant \frac{105}{5} = 21$. Trikampio kraštinių ilgiai privalo tenkinti trikampio nelygybę (dviejų iš jų suma didesnė už trečiąjį): $x + 13 \geqslant y$. Tačiau $x + 13 \leqslant 5 + 13 = 18$, o $y \geqslant 21$. Taip būti negali. Vadinasi, $x = 7$. Tada $y = \frac{105}{7} = 15$, o trikampio perimetras yra $13 + x + y = 35$.
Teisingas atsakymas **A**.

S20. Ⓒ 120°

! Po kiekvieno perlenkimo, užlenkta juostos dalis tampa simetriška savo pradinei padėčiai lenkimo tiesės atžvilgiu. Juostos taškus pažymėkime, kaip parodyta brėžinyje:



$\angle BLM = \angle LMD = \alpha = 70^\circ$ kaip priešiniai (paveikslėlio kairėje). Todėl $\angle LNM = 180^\circ - \angle MLN - \angle LMN = 180^\circ - \angle BLM - \angle LMD = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$ (žr. dešinį paveikslėlį). Kampai LNM ir DNB kryžminiai, todėl $\angle DNB = 40^\circ$.
Antroji lenkimo linija yra tiesė ND, todėl dėl simetrijos spindulys NB ir spindulys x, į kurį jis pereina po lenkimo, su tiese ND sudaro lygius kampus, t. y. x su tiese ND sudaro 40° kampą.
Analogiškai 40° kampą su tiese NB sudaro spindulys y, į kurį pereina spindulys ND po trečiojo lenkimo.
Vadinasi, kampas β, kurį sudaro spinduliai x ir y, lygus $40^\circ + 40^\circ + 40^\circ = 120^\circ$.
Teisingas atsakymas **C**.

S21. Ⓑ 45 %
Žr. Junioro 22 uždavinio sprendimą.

S22. (D) 12

! Pirmąją vietą užėmusio bėglio atsakymą, kelintą vietą jis užėmė, pažymėkime a_1, antrąją vietą užėmusio — a_2, ir t. t.
Nagrinėkime sumą

$$S = (1 - a_1) + (2 - a_2) + \cdots + (100 - a_{100}).$$

S reikšmę nesunku suskaičiuoti:

$$S = (1 + 2 + \cdots + 100) - \big(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}\big) = 5050 - 4000 = 1050.$$

Tarkime, kad sumoje S bent 89 dėmenys lygūs 0. Likusių dėmenų suma neviršija

$$(100 - 1) + (99 - 1) + \cdots + (90 - 1) = \frac{100 + 90}{2} \cdot 11 - 11 = 1034 < 1050$$

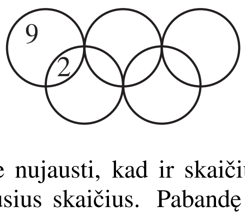
(paėmėme 11 didžiausių įmanomų dėmenų). Gavome prieštarą, todėl sumelavusių bėgikų yra mažiausiai 12.
12 bėgikų minimumas pasiekiamas. Pavyzdžiui, sakyti, kad užėmė pirmąją vietą, galėjo bėgikai, iš tikrųjų užėmę 17, 90, 91, 92, . . . , 100-ąją vietas, o likę bėgikai galėjo pasakyti tiesą, tada atsakymų suma lygi

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 16 + 18 + 19 + 20 + \cdots + 89 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{12\ \text{kartų}} = 4000.$$

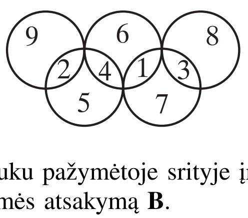
Teisingas atsakymas **D**.

S23. (B) 6

? Pastebėkime, kad neturime labai daug galimybių, kur įrašyti skaičių 9. Į tris sritis padalytam skrituliui 9 priklausyti negali (kitaip to skritulio skaičių suma būtų bent $9 + 1 + 2 = 12 > 11$). Vadinasi, 9 yra arba kairiausioje, arba dešiniausioje srityje. Dėl simetrijos mums nėra skirtumo, į kurią iš šių sričių įrašysime 9. Įrašykime šį skaičių į kairiąją sritį (žr. pav.). Greta 9 neišvengiamai atsirado 2.

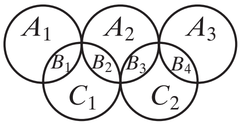


Galime nujausti, kad ir skaičių 8 labiau apsimoka rašyti į kraštinę sritį, o į skritulių sankirtas — mažiausius skaičius. Pabandę įvairiais būdais įrašinėti skaičius, nesunkiai gauname gerą variantą (žr. pav.):



Klaustuku pažymėtoje srityje įrašytas skaičius 6.
Renkamės atsakymą **B**.

! Įrodysime, kad kitų atsakymų gauti negalime. Sužymėkime srityse įrašytus skaičius raidėmis (žr. pav.):



Visų skaičių suma lygi

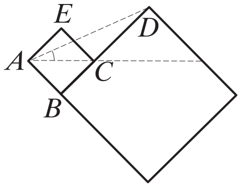
$$A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + C_1 + C_2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45.$$

Sritys, į kurias įrašytos raidės A ir B, kartu sudaro tris viršutinius skritulius, todėl $A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 3 \cdot 11 = 33$. Vadinasi, $C_1 + C_2 = 45 - 33 = 12$. Panašiai iš sričių, pažymėtų raidėmis B ir C, susidaro du apatiniai skrituliai, todėl $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + C_1 + C_2 = 2 \cdot 11 = 22$, o $A_1 + A_2 + A_3 = 45 - 22 = 23$ bei $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 45 - 12 - 23 = 10$. Bet $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \geqslant 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ir lygybė įgijama tik tada, kai skaičiai B_1, B_2, B_3, B_4 yra tam tikra tvarka paimti skaičiai $1, 2, 3, 4$. Tada C_1 ir C_2 priklauso aibei $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Turint omenyje, kad $C_1 + C_2 = 12$, C_1 tegali būti 5 arba 7 (kaip ir C_2). **?** dalyje jau pasirinkome $A_1 = 9$, $B_1 = 2$. Jei $C_1 = 7$, tai $B_2 = 11 - B_1 - C_1 = 2$, bet B_1 jau yra lygus 2, taigi $C_1 = 5$, $C_2 = 12 - C_1 = 7$, $B_2 = 11 - B_1 - C_1 = 4$. Mums lieka parinkti A_2, A_3, B_3, B_4. Bet B_3 ir B_4 yra 1 ir 3 arba 3 ir 1, taigi A_2 ir A_3 yra 6 ir 8 arba 8 ir 6. Patikriname šias galimybes — mums tinka tik viena iš jų, pavaizduota 2 pav.
Teisingas atsakymas **B**.

S24. Ⓔ 116
Žr. Junioro 30 uždavinio sprendimą.

S25. Ⓑ $2 + \sqrt{3}$

! Taškus pažymėkime, kaip pavaizduota brėžinyje.



Tegu ieškoma kraštinė lygi x. Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiui ABD: $AD^2 = AB^2 + BD^2$. $AB = 1$, o $BD = x$, todėl $AD = \sqrt{x^2 + 1}$. Kampas ACE, sudaromas mažesniosios plytelės kraštinės ir įstrižainės, lygus 45°, todėl

$$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ.$$

Pritaikykime sinusų teoremą trikampiui ACD: $\frac{\sin \angle ACD}{AD} = \frac{\sin \angle CAD}{CD}$. Duota, kad $\angle CAD = 30^\circ$, o $CD = BD - BC = x - 1$. Taigi gauname, kad

$$\frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sin 30^\circ}{x - 1}, \quad \text{arba} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}.$$

Abi lygybės puses padauginę iš 2, pakėlę kvadratu ir sutraukę panašius narius, gauname lygtį $x^2 - 4x + 1 = 0$, kurios šaknys yra $2 - \sqrt{3}$ ir $2 + \sqrt{3}$. Pirmoji šaknis netinka, nes didesniosois plokštelės kraštinė ilgesnė nei mažesniosios: $x > 1$, bet $2 - \sqrt{3} < 1$. Vadinasi, $x = 2 + \sqrt{3}$.
Teisingas atsakymas **B**.

S26. B 451

Po kiekvieno iš mokinių atliktų veiksmų lentoje sumažėja vienu skaičiumi. Pražioje buvo užrašyta 100 skaičių, todėl vienas skaičius liks po 99-ojo mokinio veiksmų. Be to, kiekvienas mokinys visų lentoje užrašytų skaičių sumą sumažina vienetu. Vadinasi, po 99-ojo mokinio veiksmų užrašytųjų skaičių suma (t. y. pats likęs vienintelis skaičius) bus 99 vienetais mažesnė nei pradinė suma, kuri lygi $10 \cdot (1+2+3+\cdots+10) = 10 \cdot \frac{11 \cdot 10}{2} = 550$. Taigi paskutinis skaičius lygus $550 - 99 = 451$. Teisingas atsakymas **B**.

S27. C 3^{2048}

Sandaugą $P = (2+3)(2^2+3^2)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})$ galima apskaičiuoti, pasinaudojus senu gerai žinomu matematiniu triuku. Mes nepakeisime sandaugos, jei padauginsime ją iš kairės iš skaičiaus $3-2=1$:

$$P = (3-2)\cdot(3+2)\big(3^2+2^2\big)\cdots\big(3^{1024}+2^{1024}\big)\big(3^{2048}+2^{2048}\big).$$

Pirmiems dviems sandaugos dauginamiesiems pritaikykime kvadratų skirtumų formulę: $(3-2)(3+2) = 3^2-2^2$, taigi

$$P = \big(3^2-2^2\big)\big(3^2+2^2\big)\big(3^4+2^4\big)\cdots\big(3^{1024}+2^{1024}\big)\big(3^{2048}+2^{2048}\big).$$

Matome, kad kvadratų skirtumo formulę dviems pirmiesiems sandaugos dauginamiesiems galime pritaikyti ir vėl. Tada du pirmieji sandaugos P dauginamieji bus 3^4-2^4 ir 3^4+2^4, jiems tą pačią formulę vėl galima pritaikyti, ir t. t. Pagaliau gausime, kad $P = (3^{2048}-2^{2048})(3^{2048}+2^{2048}) = 3^{4096}-2^{4096}$ — padidinus dauginamųjų kiekį dar vienu dauginamuoju, sandauga susitraukė iki vieno skirtumo it teleskopas.
Pradinis reiškinys lygus

$$\frac{P+2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{3^{4096}-2^{4096}+2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{3^{4096}}{3^{2048}} = 3^{2048}.$$

Teisingas atsakymas **C**.

S28. C 6

Kad įvertintume šaknį, pirma įvertinkime pošaknį: $0{,}44\ldots4 = 4\cdot0{,}11\ldots1 = \frac{4}{9}\cdot0{,}99\ldots9 \approx \frac{4}{9}\cdot1 = \frac{4}{9}$. Taigi $\sqrt{0{,}44\ldots4} \approx \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ Galima spėti, kad $\sqrt{0{,}44\ldots4}$ yra tiek artimas skaičiui 0,666..., kad jo 100-asis skaitmuo sutampa su skaičiaus 0,666... 100-uoju skaitmeniu 6. Bet mūsų samprotavimai kol kas nėra matematiškai griežti. Įverčio teisingumą pagrindžiame nelygybėmis:

$$\sqrt{0{,}44\ldots4} = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot0{,}99\ldots9} = \frac{2}{3}\sqrt{0{,}99\ldots9} < \frac{2}{3},$$

nes ištraukę šaknį iš teigiamo skaičiaus, mažesnio už 1, gausime skaičių, mažesnį už 1.
Antra vertus, ištraukus šaknį iš teigiamo skaičiaus, mažesnio už 1, gausime skaičių, didesnį už pradinį: jei $0 < x < 1$, tai $\sqrt{x} < 1$, todėl $\sqrt{x} > \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$. Vadinasi, $\sqrt{0{,}99\ldots9} > 0{,}99\ldots9$, bei $\sqrt{0{,}44\ldots4} = \frac{2}{3}\sqrt{0{,}99\ldots9} > \frac{2}{3}\cdot0{,}99\ldots9 = 2\cdot0{,}33\ldots3 = 0{,}66\ldots6$.
Taigi, pradinis skaičius tenkina nelygybes

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots > \sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}_{100\text{ kartų}}} > 0,\underbrace{66\ldots6}_{100\text{ kartų}}.$$

Vadinasi, pirmieji 100 skaičiaus $\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}_{100\text{ kartų}}}$ skaitmenų po kablelio yra šešetai.

Teisingas atsakymas **C**.

S29. Ⓐ 993

! Kad duotoje lygybėje po funkcijos ženklu atsirastų skaičius 6, vietoj x galima įsistatyti 6 arba $\frac{2010}{6} = 335$. Pamėginkime įsistatyti abi šias reikšmes:
kai $x = 6$, tai $2f(6) + 3f(335) = 30$;
kai $x = 335$, tai $2f(335) + 3f(6) = 5 \cdot 335$.
Gautose lygybėse matome du nežinomuosius dydžius: $a = f(6)$ ir $b = f(335)$. Kad rastume juos, tereikia išspręsti dviejų lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais: $\begin{cases} 2a + 3b = 30, \\ 2b + 3a = 1675. \end{cases}$ Pirmąją lygtį padauginkime iš 3, o antrąją — iš 2:

$$\begin{cases} 6a + 9b = 90, \\ 6a + 4b = 3350. \end{cases}$$

Atėmę antrąją lygtį iš pirmosios randame b: $5b = 9b - 4b = 90 - 3350$, arba

$$b = 9 \cdot 10 : 5 - 335 \cdot 10 : 5 = 9 \cdot 2 - 335 \cdot 2 = 18 - 670 = -652.$$

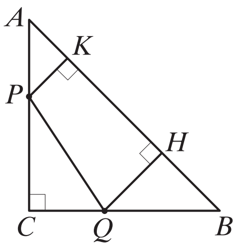
Tada $2a = 30 - 3b = 30 + 3 \cdot 652$, o

$$a = 30 : 2 + 3 \cdot 652 : 2 = 15 + 3 \cdot 326 = 15 + 978 = 993.$$

Taigi $f(6) = a = 993$.
Teisingas atsakymas **A**.

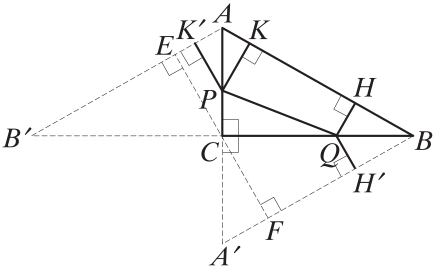
S30. Ⓒ $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

? Bendru atveju šį uždavinį išspręsti gana sunku, tačiau norint pasirinkti atsakymą, užtenka išspręsti jį kuriuo nors atskiru atveju.
Pvz., kai $a = b = 1$, uždavinys tampa gerokai lengvesnis. Turime lygiašonį statųjį trikampį, kurio viršūnes pažymėkime A, B, C (žr. brėžinį). Turime $AC = BC = 1$ ir $AB = \sqrt{2}$.



Nesunku pastebėti, kad stačiojo trikampio AKP vienas kampas KAP lygus 45°, todėl ir kitas kampas APK yra 45°, taigi ΔAKP lygiašonis ir $KP = AK$. Analogiškai $QH = HB$. Be to, KH yra atstumas tarp lygiagrečių tiesių KP ir QH, todėl atkarpa, jungianti du tų tiesių taškus P ir Q, yra ne trumpesnė už tą atstumą: $PQ \geqslant KH$. Vadinasi, $KP + PQ + QH \geqslant AK + KH + HB = AB = \sqrt{2}$. Kad tai tikrai būtų mažiausia galima sumos $KP + PQ + QH$ reikšmė, dar reikia įsitikinti, kad šią reikšmę suma gali įgyti, t. y. kad įmanoma taip parinkti taškus P ir Q, kad $KP + PQ + QH = \sqrt{2} = AK + KH + HB = KP + KH + HB$. Matome, kad lygybė galios, jei tik $PQ = KH$, bet taip gali būti: tereikia parinkti taškus P ir Q taip, kad PQ būtų lygiagreti KH. Kai $PQ \parallel KH$, $PQHK$ yra lygiagretainis, todėl $PQ = KH$ ir $KP + PQ + QH = \sqrt{2}$.
Pateikti atsakymai, kai $a = b = 1$, virsta
A) 2, **B**) 1, **C**) $\sqrt{2}$, **D**) $2\sqrt{2}$, **E**) 2.
Renkamės atsakymą **C**.

! Išspręskime uždavinį bendru atveju. Įrodysime, kad mažiausia galima duotos sumos reikšmė yra $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pažymėkime trikampio viršūnes A, B, C (žr. brėžinį).



Tegu trikampis $AB'C$ yra simetriškas trikampiui ABC tiesės AC atžvilgiu, o trikampis $A'BC$ — tiesės BC atžvilgiu; pažymėkime, be to, K' tašką, simetrišką taškui K tiesės AC atžvilgiu, o H' — tašką, simetrišką taškui H tiesės BC atžvilgiu. Dėl simetrijos $KP = K'P$ bei $QH = QH'$. Todėl $KP + PQ + QH = K'P + PQ + QH'$; be to, $K'P + PQ + QH'$ (laužtės $K'PQH'$ ilgis) yra ne mažesnis už tos laužtės galus jungiančios atkarpos $K'H'$ ilgį, o šis savo ruožtu ne mažesnis už atstumą tarp lygiagrečių tiesių AB' ir $A'B$, kurių taškus jungia atkarpa $K'H'$ ($AB' \parallel A'B$ pagal lygius priešinius kampus $AB'B$ ir $A'BB'$). Vadinasi, suma $KP+PQ+QH$ ne mažesnė už atstumą tarp tiesių AB' ir $A'B$. Kam lygus šis atstumas? Jis lygus rombo $ABA'B'$ aukštinės EF, einančios per tašką C, ilgiui, o šis savo ruožtu — dvigubam ΔABC aukštinės, nuleistos į įžambinę AB, ilgiui. Pažymėkime tą ilgį h. Jį nesunku rasti: viena vertus, trikampio ABC plotas lygus $\frac{1}{2}ab$, kita vertus,

$$\frac{1}{2}hAB = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2}.$$

Taigi

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{ir} \quad h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Tada ieškomas atstumas lygus $2h = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, bei

$$KP + PQ + QH \geqslant \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Lieka įsitikinti, kad suma gali įgyti reikšmę $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Taip bus, jei taškai K', P, Q, H' atsidurs vienoje tiesėje: tada $KP + PQ + QH = K'P + PQ + QH' = K'H'$, o $K'H' = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, nes yra statmena tiek AB', tiek $A'B$, t. y. lygi atstumui tarp šių lygiagrečių tiesių.
K', P, Q, H' gali būti vienoje tiesėje. Tereikia parinkti taškus P ir Q, kad $PC : QC = BC : CA$. Tuomet $\Delta PCQ \sim \Delta BCA$ pagal dvi proporcingas kraštinių poras ir (statųjį) kampą tarp jų. Iš panašumo išplaukia, kad $\angle CPQ = \angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \angle CAB' = 90^\circ - \angle PAK' = 90^\circ - (90^\circ - \angle APK') = \angle APK'$. Kadangi $\angle CPQ = \angle APK'$, tai taškai K', P, Q yra vienoje tiesėje. Analogiškai, taškai P, Q ir H' yra vienoje tiesėje.
Tai ir reikėjo įrodyti.

ATSAKYMAI

Klausimo Nr.	Grupė	
	J	**S**
1	D	B
2	D	C
3	C	D
4	B	D
5	D	D
6	D	B
7	E	D
8	B	E
9	D	D
10	A	A
11	C	B
12	D	C
13	B	C
14	B	A
15	E	A
16	C	A
17	D	B
18	B	E
19	C	A
20	A	C
21	B	B
22	C	D
23	C	B
24	B	E
25	C	B
26	A	B
27	C	C
28	D	C
29	A	A
30	E	C

KENGŪRA 2010. IX – XII klasės
Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai
Aivaras Novikas

2011 02 02. 2,5 sp. l. Užs. Nr. 16
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Petro ofsetas“
Žalgirio g. 90, LT-09303 Vilnius