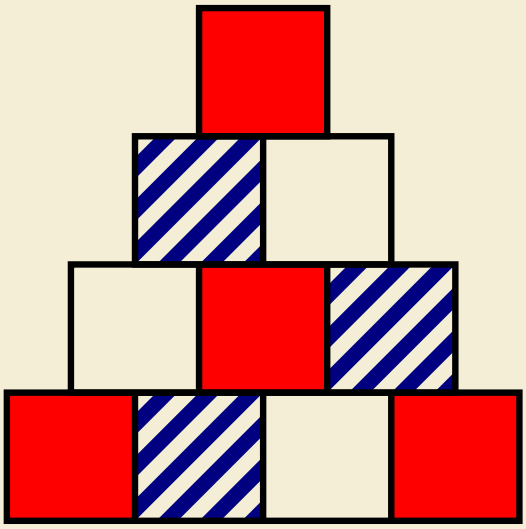
Kengūra 2014

Užduotys ir sprendimai



Nykštukas

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2014

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Mačys

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

© Juozas Mačys, 2014
© Kengūros organizavimo komitetas, 2014

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašas **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Nykštuko užduočių sprendimai **13**

Atsakymai **24**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 56000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2014 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

50 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2014 metų kovo 20 dieną keliavo ir gausiai sprendė 1–2 klasių (*Nykštuko* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Aivaras Novikas
Romualdas Kašuba

Nykštukas, 1 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Nykštukas, 2 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

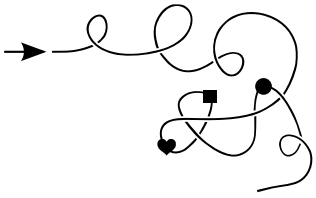
2014 m. Nykštuko užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Boružė tūps ant gėlytės su penkiais žiedlapiais ir trimis lapeliais. Ant kurios gėlytės tūps boružė?

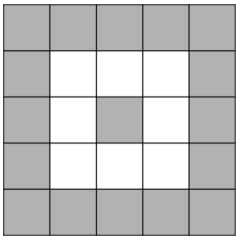
A) **B)** **C)** **D)** **E)**

2. Kuria tvarka prieisi suvertus ant siūlo karoliukus, eidamas siūlu rodyklės nurodyta kryptimi?

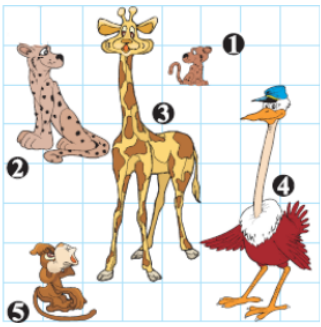


A) ♥, ■, ● **B)** ♥, ●, ■ **C)** ■, ♥, ● **D)** ●, ♥, ■ **E)** ●, ■, ♥

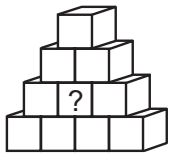
3. Keliais pilkųjų kvadratėlių čia yra daugiau nei baltųjų?
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10



4. Surikiuok visus gyvūnėlius pagal jų paveikslėlių aukštų nuo žemiausiojo iki aukščiausiojo. Kuris gyvūnėlis atsidurs pačiame rikiuotės viduryje?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

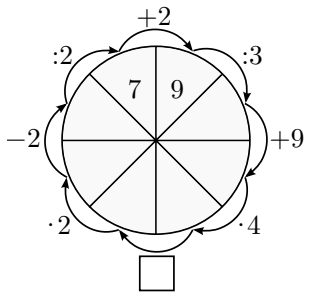


5. Urtė turi 10 kubinių trinkelių: 1 geltoną, 2 žalias, 3 mėlynas ir 4 raudonas. Iš jų ji sustatė bokštą taip, kad jokios dvi tos pačios spalvos trinkelės nesiliestų. Kurios spalvos yra klaustuku pažymėta trinkelė?
A) Raudona **B)** Mėlyna **C)** Žalia **D)** Geltona
E) Neįmanoma nustatyti



6. Ką reikia įrašyti į kvadratėlį, kad veiksmai diagramoje būtų atlikti teisingai?

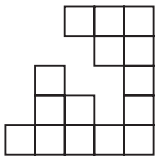
A) -38 **B)** $:8$ **C)** -45 **D)** $\cdot\, 6$ **E)** $:6$



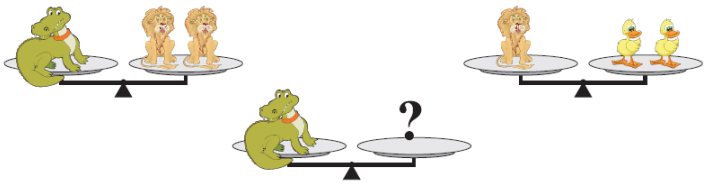
Klausimai po 4 taškus

7. Iš 25 vienodų kvadratėlių buvo sudėtas kvadratas. Birutė kelis kvadratėlius nuėmė (žr. paveikslėlį). Kiek kvadratėlių ji nuėmė?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12



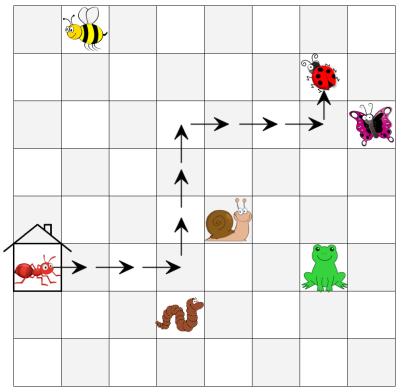
8. Ūla svėrė savo žaisliukus: krokodilą, vienodus liūtukus ir vienodas antytes. Kelios antytės sveria tiek pat, kiek ir krokodilas?



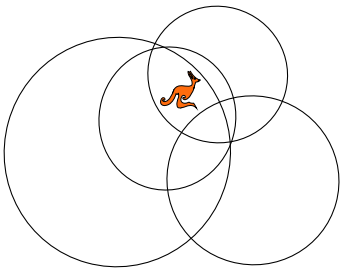
A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

9. Skruzdėlytė , eidama iš namelio rodyklių kryptimi: $\rightarrow 3, \uparrow 3, \rightarrow 3, \uparrow 1$, priėjo boružę (žr. paveikslėlį). Kokį gyvūnėlį skruzdėlytė prieis, eidama pagal rodykles $\rightarrow 2, \downarrow 2, \rightarrow 3, \uparrow 3, \rightarrow 2, \uparrow 2$?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

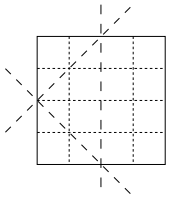


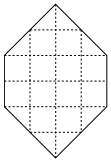
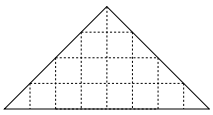
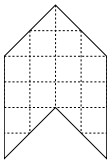
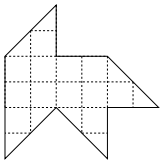
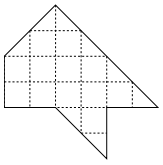
10. Keliuose skrituliuose yra kengūra?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

11. Kvadratas padalytas į 4 dalis (žr. paveikslėlį greta). Kurios iš nurodytų figūrų neįmanoma sudėti iš tų 4 dalių?



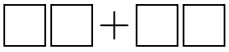
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

12. Stačiakampis popieriaus lapelis buvo perkirptas į dvi dalis. Viena iš jų pavaizduota šalia esančiame paveikslėlyje. Kuris iš žemiau pavaizduotų gabalų yra to lapelio antroji dalis?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

Klausimai po 5 taškus

13. Į kvadratėlius įrašomi skaitmenys 2, 3, 4, 5 po vieną kartą, tada apskaičiuojama gautųjų dviženklių skaičių suma. Kokia didžiausia gali būti ta suma?

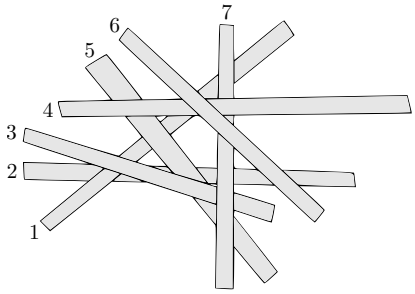


A) 68 **B)** 77 **C)** 86 **D)** 95 **E)** 97

14. Kiek yra skaičių, didesnių už 10, bet ne didesnių už 31, kurie užrašomi vien tik skaitmenimis 1, 2, 3? (Skaitmenys tuose skaičiuose gali kartotis.)

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

15. Ant stalo viena ant kitos guli septynios sunumeruotos plokštelės. Paulius gali paimti plokštelę tik tada, kai ant jos neguli jokia kita. Jam pavyko nuimti nuo stalo visas plokšteles. Kuria tvarka Paulius jas nuiminėjo?

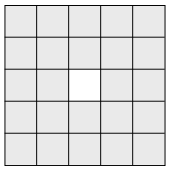


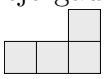
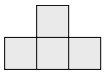
A) 6, 4, 7, 1, 5, 3, 2 **B)** 6, 4, 7, 3, 5, 1, 2 **C)** 6, 4, 7, 3, 1, 5, 2
D) 6, 4, 3, 7, 5, 1, 2 **E)** 6, 7, 4, 3, 5, 1, 2

16. Kiek varlių sugavo visi trys pelikanai kartu? Remkitės paveikslėlio duomenimis.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 12

17. Paveikslėlyje šalia pavaizduota pilka kvadratinė popierinė kortelė su iškirptu viduriniu langeliu. Mikas sukarpė tą kortelę į keletą vienodų dalių. Kurios iš žemiau pavaizduotų dalių jis tikrai negalėjo gauti?



A) **B)** **C)** **D)**  **E)** 

18. Triušis Pūkis kasdien sugraužia arba 10 morkų, arba 2 kopūstus. Praeitą savaitę jis sugraužė 6 kopūstus. Kiek morkų sugraužė Pūkis praeitą savaitę?

A) 20 **B)** 30 **C)** 34 **D)** 40 **E)** 50

Nykštuko užduočių sprendimai

1. (B)

! Nesunku peržiūrėti paeiliui visas gėlytes ir nustatyti, kad tinka tik gėlytė **B**. Bet galima tai atlikti ir šiek tiek išradingiau. Pradėkime nuo žiedlapių: 5 žiedlapius turi tik **B** ir **D**. Bet **D** turi tik 3 lapelius, taigi lieka tik **B**.

Galima pradėti ir nuo lapelių: 3 lapelius turi tik **B** ir **E**, bet **E** turi tik 4 žiedlapius. Vėl lieka tik **B**.

Teisingas atsakymas **B**.

2. (A) ♥, ●, ■

! Svarbu nepamesti iš akių kelio – tada matome, kad iš pradžių bus širdelė, po to kvadratėlis, o paskutinis skrituliukas.

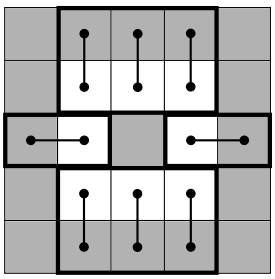
Teisingas atsakymas **A**.

3. (D) 9

! Nesunku suskaičiuoti, kad pilkųjų kvadratėlių yra 17, o baltųjų – 8. Kadangi $17 - 8 = 9$, tai pilkųjų kvadratėlių yra devyniais daugiau.

Teisingas atsakymas **D**.

!! Uždavinį galima spręsti ir kitaip. Išskirkime paveikslėlyje 4 figūras, kurių kiekviena turi vienodai pilkųjų ir baltųjų langelių (du stačiakampius 3×2 ir du stačiakampius 2×1).



Neišskirti lieka $4 \cdot 2 + 1 = 9$ pilkieji langeliai. Todėl pilkųjų kvadratėlių ir pradiniame paveikslėlyje devyniais daugiau.

Spręsdami iš uždavinį, mes faktiškai suskirstėme kvadratėlius į pilkų ir baltų kvadratėlių poras. Likę nesuporuoti kvadratėliai ir pasako, kokių iš jų daugiau.

Toks poravimo būdas labai dažnai taikomas matematikoje ir vadinamas abipusės atitikties metodu.

4. (B) 2

! Sunkoka netgi pasakyti, kokie čia gyvūnai pavaizduoti. Padeda mums tai, kad jų įvardyti ir nereikia – užtenka kalbėti apie jų numerius.

Beje, sunku būtų kalbėti ir apie tų gyvūnų tikrąjį ūgį – reikia galvoti tik apie kiekvieno gyvūno paveikslėlio aukštį. 1 paveikslėlio aukštis – vienas langelis, 2 paveikslėlio – trys langeliai, 3 paveikslėlio – septyni langeliai, 4 paveikslėlio – šeši langeliai, 5 paveikslėlio – du langeliai. Išrikiavę paveikslėlius pagal aukštį didėjimo tvarka, turėsime 3, 4, 2, 5, 1. Viduryje atsidūrė 2 paveikslėlis, nurodytas atsakyme **B**.

Beje, jei galvotume apie pavaizduotų gyvūnų tikrąjį ūgį, tai panašu, kad žirafa būtų aukščiausia, po to būtų strutis, tada leopardas. Ir šiuo atveju trečias gyvūnas atsidurtų rikiuotės viduryje.

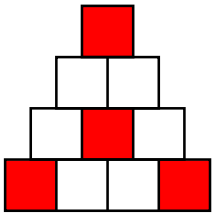
Teisingas atsakymas **B**.

5. (A) Raudonas

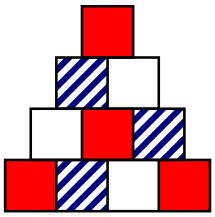
? Uždavinys sunkus vien tuo, kad atsakymų čia nepatikrinsi. Paspėliojus greitai pavyksta sudėlioti trinkeles reikalaujamu būdu. Klaustuko vietoje, teisingai sudėliojus reikalaujamu būdu, atsiduria raudona trinkelė.

Kadangi *Kengūros* užduotyse tik vienas atsakymas teisingas, tai renkamės atsakymą **A**.

! Dėliojant vis dėlto reikia turėti kokį nors planą, kokią nors mintį. Čia ta mintis galėtų būti tokia: kadangi raudonųjų trinkelių daugiausia, tai ir pradėti verta nuo jų. Jas, matyt, dėti reikia kuo toliau viena nuo kitos, todėl neboga mintis iš karto dėti jas trijuose kampuose. Kevirtąją raudoną trinkelę natūralu dėti į „centrą“, į klaustuko vietą (paveikslėliuose trinkeles vaizduosime kvadratėliais, dažnai ir kalbėsime apie juos):



Dar reikia nepamiršti, kad teisingai būtina išdėlioti ir kitų spalvų trinkeles. Natūralu iš pradžių „išmėtyti“ tris mėlynąsias – sudėti jas „trikampiu“:



Į likusias tris vietas žaliasias ir geltonąją trinkeles galima dėti bet kaip.

Sudėjome trinkeles reikalaujamu būdu, ir klaustuko vietoje stovi raudonoji trinkelė. O gal kitaip sudėliojus ten atsirastų kitos spalvos trinkelė? Ne, kengūriniai atsakymai tokie, kad iš jų tik vienas teisingas, ir jeigu jis teisingas sudėliojus trinkeles vienu būdu, tai jis teisingas ir sudėliojus kitais reikalaujamais būdais (trumpiau – teisingas visada).

Renkamės atsakymą **A**.

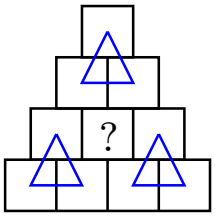
!! Kaip jau įprasta, dviem ar net trimis šauktukais pažymėti sprendimai labiau skirti mokytojui ar tėveliams. Mokinys, jei tai nuobodu ar per sudėtinga, gali ir nesistengti jų perskaityti.

Pabandysime įrodyti, kad nors ir kaip sudėtume trinkeles, klaustuku pažymėtoji trinkelė bus raudona. Kitaip sakant, mes galime įsivaizduoti, kad sprendžiame uždavinį, kai pasirenkamų atsakymų nėra. Jį suformuluoti galima taip:

Trinkelės sudėtos taip, kad dvi vienodos spalvos trinkelės neliečia viena kitos. Kokios spalvos gali būti pažymėtoji trinkelė?

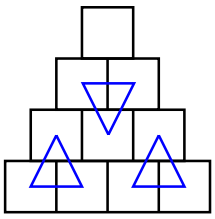
Uždavinio sprendimo mintis galėtų būti tokia: Sakykime, kad mums pavyko sudėti kvadratus reikalaujamu būdu. Suskirstykime kvadratus į tokias sritis, kad kiekvienoje gali atsidurti tik vienas kiekvienos spalvos kvadratas. Apčiuopti tokią sritį nesunku – tai tokia trijulė: Kadangi kiekvienas kvadratas liečia kitus du, tai visi jie skirtingų spalvų.

Dabar išskirkime iš paveikslėlio tris trijules taip, kaip pavaizduota:



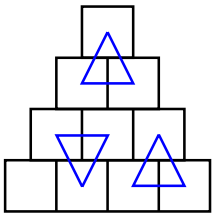
Kadangi kiekvienoje trijulėje bus po 1 raudoną, tai jose turime 3 raudonus kvadratėlius. Vadinasi, klaustuku pažymėtasis kvadratas būtinai raudonas.

Dabar viršutinę trijulę apverskime galva į apačią:



Kadangi dabar liko laisvas viršutinis langelis, tai jis raudonas.

Panašiai įrodome, kad apatinis kairysis kvadratėlis raudonas – užtenka apversti kairiąją trijulę:



Ir jau visiškai panašiai įrodome (simetrija!), kad apatinis dešinysis kvadratėlis raudonas.

Ką gi įrodėme? Ogi štai ką: jeigu įmanoma sukrauti kvadratėlius reikiamu būdu, tai pažymėtasis kvadratėlis (ir visi trys „kampiniai“) bus raudoni. Dar reikia įsitikinti, kad likusius kvadratėlius galima sudėlioti teisingai. Bet tai mes jau padarėme anksčiau.

Beje, čia gimsta dar vienas (sunkokas) uždavinys:

Kiek skirtingų paveikslėlių galima gauti sukraunant kvadratėlius reikalaujamu būdu?

(Pagalvokite ir nustatykite, ar tikrai jų daugiau kaip 10.)

6. **E** :6

? Prastas sprendimas būtų tiesiog tikrinti atsakymus. Pavyzdžiui, imame atsakymą **A**, t.y. įsivaizduojame, kad į kvadratėlį įrašėme -38. Tada iš eilės atliekame veiksmus, pradėję nuo 7 ir eidami pagal laikrodžio rodyklę (galima pradėti ir nuo 9):

$7+2=9$, $9:3=3$, $3+9=12$, $12\cdot 4=48$, $48-38=10$, $10\cdot 2=20$, $20-2=18$, $18:2=9$.

Kadangi turėjome gauti 7, tai atsakymas **A** netinka. Tikriname atsakymą **B** (t.y. : 8): užtenka pradėti jau nuo 48. Tada,

$$48:8=6,\quad 6\cdot 2=12,\quad 12-2=10,\quad 10:2=5,$$

B netinka. Tikriname **C** (t.y. -45):

$$48-45=3,\quad 3\cdot 2=6,\quad 6-2=4,\quad 4:2=2,$$

C netinka. Tikriname **D** (t.y. $\cdot 6$):

$$48\cdot 6=288,\quad 288\cdot 2=576,\quad 576-2=574,\quad 574:2=287,$$

D netinka. Tikriname **E** (t.y. : 6):

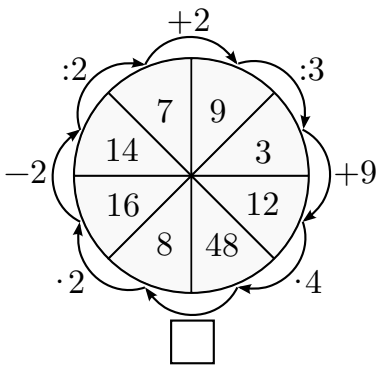
$$48:6=8,\quad 8\cdot 2=16,\quad 16-2=14,\quad 14:2=7.$$

Valio, tinka! Teisingas tik atsakymas **E**.

! Tikrinti atsakymus – būdas nuobodus, ilgas, galima ir apsirikti.

Gudrybė čia tokia: eiti ne tik pagal laikrodžio rodyklę (tada nustatome skaičius dešiniojoje apatinėje skritulio išpjovoje), o ir prieš laikrodžio rodyklę (tada nustatome skaičius kariojoje apatinėje išpjovoje). Beje, būdas „eiti nuo galo“ padeda labai dažnai.

Paeiliui pildydami dešiniąsias išpjovas, gavome 3, 12, 48. Bet pasirodo, kad nesunku užpildyti ir kariąsias išpjovas. Pavyzdžiui, jei skaičių dalydami iš 2 gavome 7, tai tas skaičius yra $7\cdot 2=17$. Jei atėmę iš kažkokio skaičiaus 2 gavome 14, tai tas „kažkoks“ skaičius yra $14+2=16$. Pagaliau, jei kairįjį apatinį skaičių padauginę iš 2 gavome 16, tai kairysis apatinis skaičius yra $16:2=8$:



Dabar reikia atlikti veiksmą, kad iš 48 gautume 8. Štai čia ir paaiškėja, kad patikrinti atsakymus vis dėlto verta: netinka **A** (atėmę 38 iš 48 gausime 10), netinka **B** (48 padaliję iš 8 gausime 6), netinka **C** (atėmę 45 iš 48 gausime 3), netinka **D** (padauginę 48 iš 8 negausime 8), ir pagaliau tinka **E**, nes padaliję 48 iš 6 gausime kaip tik 8.

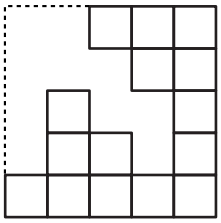
Teisingas atsakymas **E**.

!! Kas atsitiktų, jeigu nebūtų pasirenkamųjų atsakymų, ir spręstume tą patį uždavinį? Vis tiek reikėtų rasti veiksmą, kad iš 48 gautume 8. Aišku, kad vienas veiksmas – tai dalyti iš 6. Kitas tinkamas veiksmas – atimti 40 (būtent todėl tokio nėra tarp pasirenkamųjų atsakymų). Beje, jeigu leidžiama naudoti trupmenas, tai taip pat galima būtų dauginti iš $\frac{1}{6}$. Trumpai sakant, atsakymas būtų ne vienintelis.

7. (**D**) 10

! Žinoma, galime papildyti paveikslėlį kvadratėliais iki didžiojo kvadrato ir suskaičiuoti, kiek kvadratėlių pripiešėme.

Bet paprasčiau spręsti taip: Atstatome kvadrato 5×5 kraštines:



Matome, kad apatinė kvadratėlių aibė nepaliesta. Lygindami su ja, matome, kad antroje (einant iš apačios į viršų) eilėje nuimti 2 kvadratėliai, trečioje – 3 kvadratėliai, ketvirtoje – 3 kvadratėliai, penktoje – 2 kvadratėliai. Vadinasi, iš viso nuimti $2+3+3+2=10$ kvadratėlių.

Teisingas atsakymas **D**.

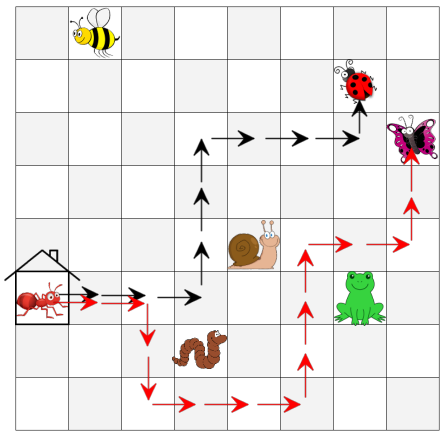
8. (**B**) 4

! Iš paveikslėlių matome, kad krokodilas sveria kaip 2 liūtukai, o liūtukas sveria kaip 2 antytės. Vadinas, krokodilas sveria kiek ir $2 \cdot 2 = 4$ antytės.

Teisingas atsakymas **B**.

9. (**A**)

! Sąlygos paveikslėlyje nusižymime rodyklėmis nurodytą kelią.

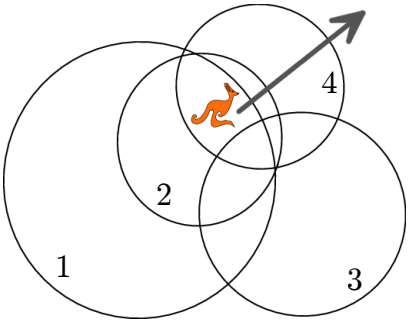


Matome, kad prieiname peteliškę (**A**).

Teisingas atsakymas **A**.

10. (C) 3

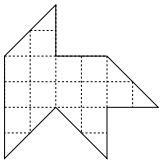
! Kad būtų lengviau susišnekėti, sunumeruokime skritulius.



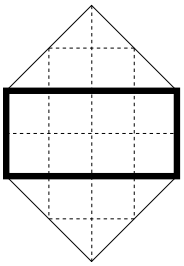
Įsižiūrėjus nesunku pasakyti, kad kengūra yra 1, 2, 3 skrituliuose, bet ne 4 skritulyje.

!! Jeigu kengūra eitų pagal išvestą rodyklę, tai kiekvieną iš apskritimų 1, 2, 3 ji kirstų 1 kartą. Baigusi kelionę, ji atsidurtų visų keturių apskritimų išorėje. Vadinasi, iš pradžių ji buvo skrituliuose 1, 2, 3.

Teisingas atsakymas C.

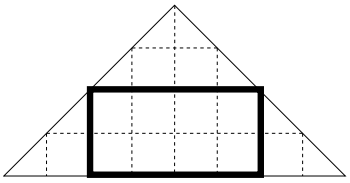
11. (D) 

! Neblogas būdas tikrinti atsakymus. Ar galima iš nurodytų dalių sudėti figūrą **A**? Pasakykime kitaip: ar galima figūrą **A** padalyti į nurodytus stačiakampį, trikampį ir du trikampėlius? Nuo ko gi pradėti? Žinoma, nuo didžiausios dalies – stačiakampio 2×4. Iškirpkime jį, kaip parodyta:



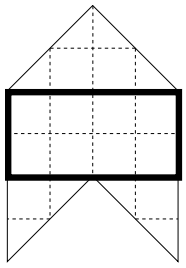
Tada iš karto turime trikampį su ilgąja kraštine 4, o trikampėlius (su kraštinėmis 2 ir 2) gausime perkirpę vieną iš trikampių pusiau. Vadinasi, iš nurodytų dalių figūrą **A** sudėti galima.

Iš paveikslėlio **B** vėl iškerpame stačiakampį:



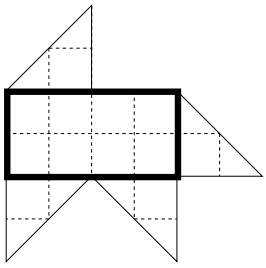
Dabar jau iš karto gavome visas 4 reikiamas dalis. Vadinasi, ir figūrą **B** sudėti galima.

Lygiai tas pat atsitinka su paveikslėliu **C**, iškirpus stačiakampį:



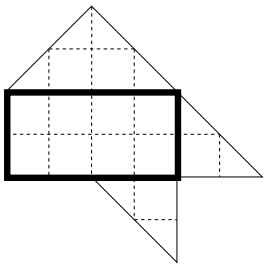
Figūrą **C** sudėti galima.

Iškerpame stačiakampį iš figūros **D**:



Deja, figūra subyrėjo į 5 dalis – o mums reikia keturių. Bet kyla toks klausimas: o gal mes prastai kerpame, ir galima sukarpyti **D** į keturias reikiamas dalis? Klausimas sunkėlesnis, ir mes šitą atvejį atidėkime.

Imkime figūrą **E**. Iš jos iškirpus stačiakampį, figūra vėl subyra į 4 reikiamas dalis.

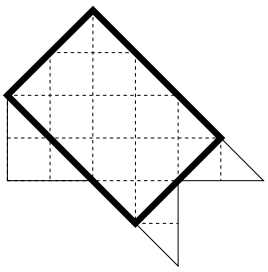


Vadinasi, figūras **A**, **B**, **C**, ir **E** tikrai galima sudėti, o figūrą **D** – dar nežinia. Bet kadangi *Kengūros* konkurse teisingas tik vienas atsakymas, tai galima drąsiai teigti, kad figūros **D** sudėti negalima.

Renkamės atsakymą **D**.

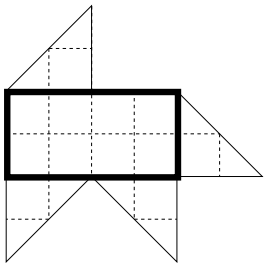
!! Grįžkime prie figūros **D** – ar tikrai jos sudėti negalima? Kitaip sakant, ar negalima jos sukarpyti į 4 reikiamas dalis? Pavyzdžiui, jeigu stačiakampį kerpame tik per langelių kraštines, tai panašu, kad yra tik tas jau nurodytas būdas, ir nieko neišeina.

O gal kerpant ne per kraštines galima reikiamą stačiakampį iškirtpti? Juk, pavyzdžiui, galima iškirpti palyginti nemažą stačiakampį:



O jeigu dar vos vos sumažintume jį, tai stačiakampį iškirpus figūra **D** net nesubyrėtų – būtų tik dvi nesubyrėjusios dalys. Žodžiu, viskas tada ne taip paprasta.

Samprotauti galima būtų taip. Aišku, kad karpant nė gabalėlio negalima išmesti – tai gerai matyti iš šio paveikslėlio:



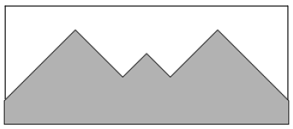
Jame matome 4 smailius „ragus“. Joks ragas (bent jau jo smailusis galas) nepriklauso stačiakampiui. Jokie du ragai nepriklauso tam pačiam trikampiui. Vadinasi, kad ir kaip kirptume, gausime mažiausiai 5 dalis, o jų turi būti keturios.

Vadinasi, tikrai figūros **D** sudėti negalima.

12. (C)

! Apsukę antrąją dalį ir pridėję prie pirmosios, turime gauti stačiakampį, t.y. figūrą be plyšių. Vadinasi, pirmosios dalies iškarpą turi atitikti antrosios dalies „dantis“. Kadangi dantų turi būti 3, tai gabalai **A**, **B** ir **E** netinka (**A** turi 2 dantis, **B** ir **E** – po 4). Lieka gabalai **C** ir **D**. Bet vidurinis dantis turi būti mažiausias iš tų trijų, taigi gali tikti tik **C**.

Atsakymą jau galime rinktis, bet tikrumo dėlei papildykime gabalą **C** iki stačiakampio.



Matome, kad pripieštoji dalis tikrai labai panaši į duotąją.

Teisingas atsakymas **C**.

13. (D) 95

! Kadangi bet kurių dviejų skaitmenų suma mažesnė už 10, tai vienetus galima sudėti atskirai, dešimtis – atskirai. Dešimčių skaitmuo turi būti didžiausias, vadinasi, tai $9 = 4+5$. Vienetams lieka $5 = 2 + 3$. Beje, taip įrašyti skaitmenis į langelius galima net keturiais būdais: $42 + 53$, $43 + 52$, $52 + 43$, $53 + 42$.

Teisingas atsakymas **D**.

14. (D) 7

! Reikia nagrinėti skaičius nuo 11 iki 37 (aišku, 31 tinka – jis nėra didesnis už 31, 10 netinka – jis nėra didesnis už 10). Nesunku visus juo patikrinti iš eilės.

Skaičius 11 tinka (jis neturi „netikusių“ skaitmenų 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9), 12 tinka, 13 tinka, 14 netinka (turi blogą skaitmenį), taip pat netinka 15, 16, 17, 18, 19, 20. Skaičiai 21, 22, 23 tinka, skaičiai 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 netinka. Skaičius 31 vėl tinka. Vadinasi tinka skaičiai 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31 – iš viso 7.

Teisingas atsakymas **D**.

!! Paaiškinsime kitą būdą, kuris tinka ir tada, kai skaičių labai daug. Sakykime, kad reikia išspręsti uždavinį, kai sąlygoje stovi ne 10 ir 31, o 100 ir 333). Išsirašinėti visus skaičius nuo 101 iki 333 nuobodu, o ir apsirikti nesunku. Kalbėkime taip: turime surašyti triženklius skaičius, kurių kiekvienas skaitmuo arba 1, arba 2, arba 3. Pagalvokime, keliais būdais galime parašyti pirmąjį skaitmenį. Aišku, kad yra 3 būdai: rašyti 1, rašyti 2, rašyti 3. Tiek pat būdų yra parašyti antrąjį skaitmenį – 3 būdai. Ir trečiąjį skaitmenį parašyti galima 3 būdais.

O dabar svarbiausia – suvokti, kad būdų parašyti tinkamą triženklį skaičių yra ne $3+3+3=9$, o $3\cdot 3\cdot 3=27$.

Iš tikrųjų, parašyti pirmąjį skaičių yra 3 būdai. Kad ir kokį jį parašytue, kiekvienam iš tų trijų atvejų antrąjį skaitmenį galima parašyti 3 būdais – taigi iš viso pirmą ir antrą skaitmenis parašyti kartu yra $3\cdot 3=9$ būdai.

Pasirinkus bet kurią vieną iš tų 9 galimybių, trečiąjį skaitmenį parašyti vėl yra 3 būdai. Taigi visą triženklį skaičių galima sudaryti $9\cdot 3=27$ būdais.

Grįžkime prie Kengūros uždavinio. Reikia rasti, kiek yra skaičių nuo 11 iki 31, kiekvieno kurių užraše nebūtų kitų skaitmenų, kaip 1, 2, 3.

Mažiausias iš vienetų, dvejetų ir trejetų sudarytas skaičius yra 11, didžiausias 33. Raskime, kiek yra tinkamų skaičių nuo 11 iki 33. Pirmą skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais, antrą – taip pat 3 būdais. Vadinasi, nuo 11 iki 33 yra $3\cdot 3=9$ reikiami skaičiai. Bet iš jų reikia atmesti 32 ir 33 – jie juk didesni už 31. Vadinasi, lieka 7 skaičiai, kaip anksčiau ir suskaičiavome.

15. (B) 6, 4, 7, 3, 5, 1, 2

! Įsižiūrėję į paveikslėlį, matome, kad iš pradžių galima nuimti tik 6-tą plokštelę. Tada imame 4-tą plokštelę (virš jos buvo vienintelė 6-ta). Dabar laisva 7-ta plokštelė – taigi liko rinktis iš atsakymų **A**, **B**, **C** – jie prasideda numeriais 6, 4, 7.

Matome, kad virš 3-osios plokštelės iš pradžių buvo tik 7-ta plokštelė – vadinasi, dabar ji laisva. Taigi dabar nuimame 3-ą plokštelę (lieka atsakymai **B** ir **C**).

Liko trys plokštelės – 5-ta, 2-a ir 1-a. Bet virš plokštelės 2 yra plokštelė 1, o virš šios – plotkštelė 5. Taigi dabar jas imame tokia tvarka: 5, 1, 2. Vadinasi, plokštelės buvo nuimtos nuo stalo tokia tvarka: 6, 4, 7, 3, 5, 1, 2.

Teisingas atsakymas **B**.

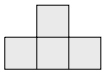
16. (D) 9

! Pelikanas Peli pagavo ne mažiau kaip 2 varles. Pelikanas Kanu pagavo ne daugiau kaip 4 varles. Pelikanas Lika pagavo daugiau varlių nei Peli, bet mažiau nei Kanu. Vadinasi, Likos pagautų varlių skaičius didesnis už 2, bet mažesnis už 4. Toks skaičius tėra vienintelis – tai 3.

Taigi, Lika pagavo 3 varles. Todėl Peli pagavo mažiau kaip 3, bet ne mažiau kaip 2 – vadinasi, Peli pagavo 2 varles. Kanu pagavo daugiau kaip 3, bet ne daugiau kaip 4 varles, vadinasi, Kanu pagavo 4 varles.

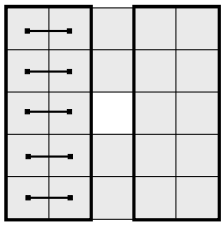
Visi trys pelikanai pagavo $2+3+4=9$ varles.

Teisingas atsakymas **D**.

17. (E) 

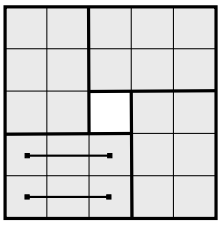
! Bandykime perrinkti atsakymus.

Sukrauti kvadratą (su skyle centre) iš atsakymo **A** plytelių 2×1 lengva. Pavyzdžiui, užtenka sukrauti penkias plyteles vieną ant kitos – gausime stačiakampį 2×5:



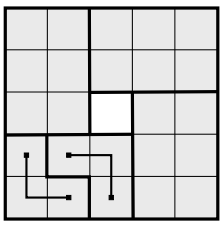
Tokį pat stačiakampį krauname dešinėje. Dabar užtenka tarp jų įsprausti po plytelę apačioje ir viršuje.

Iš atsakymo **B** plytelių 3×1 iš pradžių sudedame 2 viena ant kitos – gauname stačiakampį 3×2:

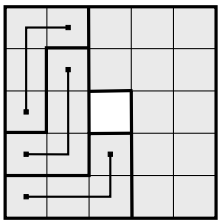


Iš 4 tokių stačiakampių sudarome reikiamą figūrą. (Beje, iš plytelių **A** taip pat buvo galima sudarinėti stačiakampius 3×2.)

Iš atsakymo **C** dviejų plytelių taip pat sudedame stačiakampį 3×2, o iš 4 tokių stačiakampių – reikiamą figūrą.



Kiek sunkiau sudėti figūrą iš plytelių **D**. Padalykime figūrą į dvi vienodas dalis. Pasirodo, kad vieną tokią pusę (joje 12 kvadratėlių) lengva sudėti iš trijų plytelių. Kitą pusę sudedame panašiai.

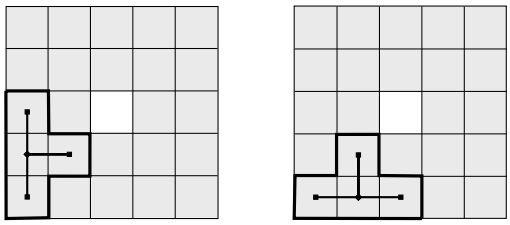


Kadangi atsakymai **A**, **B**, **C** ir **D** neteisingi (iš tų plytelių įmanoma sudėti pradinį kvadratą), tai penktasis atsakymas (pagal Kengūros konkurso taisykles) teisingas.

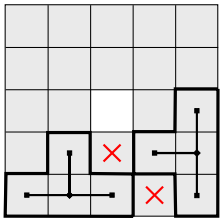
Renkamės atsakymą **E**.

!! Įrodysime, kad duotosios figūros negalima sukarpyti į vienodas korteles **E**. Kadangi figūrą sudaro 24 kvadratėliai, o kortelė **E** turi 4 kvadratėlius, tai sukarpę turėtume $24 : 4 = 6$ korteles **E**. Jeigu jomis kaip nors (tegu ir kitaip, negu prieš kerpant) pavyktų uždengti figūrą, tuščių laukelių neliks (jų juk 24).

Pradėkime nuo kairiojo apatinio kvadratėlio. Jį uždengti kortele galima tik dviem būdais:



Matematikoje sakoma, kad jie simetriški (visiškai tokie pat), todėl užtenka nagrinėti vieną iš jų (pavyzdžiui, dešinįjį). Matome, kad trys kvadratėliai būtinai eina figūros didžiąja kraštine. O dabar uždenkime dešinį apatinį kampą. Apatinėje kraštinėje laisvi liko tik 2 langeliai, taigi 3 kortelės langeliai glaudžiami prie dešiniosios šoninės kraštinės:



Bet tada nė vieno iš kryžiuku pažymėtų langelių uždengti nebepavyks. Vadinasi, sukarpyti figūros į vienodas korteles **E** neįmanoma.

Teisingas atsakymas **E**.

18. (**D**) 40

! Pūkis pereitą savaitę sugraužė 6 kopūstus. Kadangi per dieną jis sugraužia 2 kopūstus, tai kopūstus jis graužė $6 : 2 = 3$ dienas. Todėl morkas jis graužė $7 - 3 = 4$ dienas. Vadinasi, tą savaitę jis sugraužė $4 \cdot 10 = 40$ morkų.

Teisingas atsakymas **D**.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	B
2	A
3	D
4	B
5	A
6	E
7	D
8	B
9	A
10	C
11	D
12	C
13	D
14	D
15	B
16	D
17	E
18	D