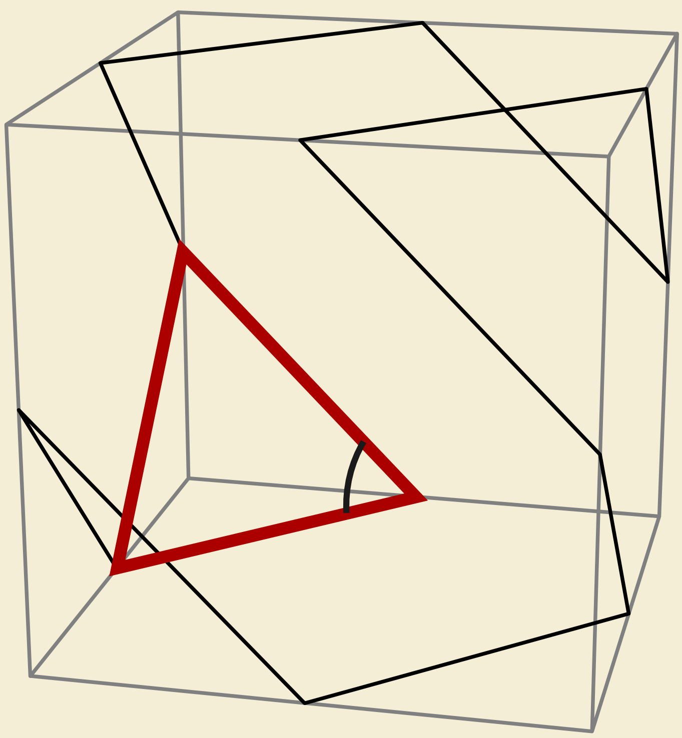
Kengūra 2014

Uždduotys ir sprendimai



Senjoras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2014

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 56000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2014 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2014 metų kovo 20 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Aivaras Novikas
Romualdas Kašuba

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
Klasė	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

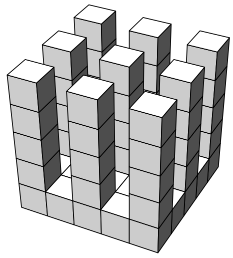
PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2014 m. Senjoro užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus



1. Kubas sudarytas iš $5 \times 5 \times 5$ vienodų kubelių. Išėmus dalį kubelių, gauta nauja figūra – vienodi stulpeliai ant bendro pagrindo (žr. pav.). Kiek kubelių pašalinta?
A) 56 **B)** 60 **C)** 64 **D)** 68 **E)** 80

2. Šiandien Ignas, Agnė ir Ugnė švenčia savo gimtadienius. Jų amžių suma yra 44 metai. Kokia bus jų amžių (metais) suma kitą kartą, kai tos sumos skaitmenys ir vėl sutaps?
A) 55 **B)** 66 **C)** 77 **D)** 88 **E)** 99

3. Jei $a^b = \frac{1}{2}$, tai kam lygu a^{-3b}?
A) $\frac{1}{8}$ **B)** 8 **C)** -8 **D)** 6 **E)** $\frac{1}{6}$

4. Trijose skirtingo dydžio pintinėse guli iš viso 48 siūlų kamuoliai. Mažojoje ir didžiojoje pintinėse kartu sudėjus yra dvigubai daugiau kamuolių nei vidutinėje. Mažojoje pintinėje kamuolių perpus mažiau nei vidutinėje. Kiek siūlų kamuolių didžiojoje pintinėje?
A) 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 32

5. Raskite trupmenos $\dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$ reikšmę.
A) 2^{2011} **B)** 2^{2012} **C)** 2^{2013} **D)** 1 **E)** 2

6. Teiginys „Kiekvienas išsprendė daugiau kaip 20 uždavinių“ klaidingas. Tai reiškia, kad teisingas toks priešingas teiginys:
A) Niekas neišsprendė daugiau kaip 20 uždavinių
B) Kažkas išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį
C) Kiekvienas išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį
D) Kažkas išsprendė lygiai 20 uždavinių
E) Kažkas išsprendė daugiau kaip 20 uždavinių

7. Kelių skaitmenų skaičius yra sandauga $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?
A) 22 **B)** 55 **C)** 77 **D)** 110 **E)** 111

8. Dvi priešingos kvadrato viršūnės yra Ox ašies taškai $(-1;0)$ ir $(5;0)$. Kuris taškas taip pat yra šio kvadrato viršūnė?
A) $(2;0)$ **B)** $(2;3)$ **C)** $(2;-6)$ **D)** $(3;5)$ **E)** $(3;-1)$

9. Kurio iš šių daugianarių skaidinyje niekada nebus dvinario $x+1$?
A) x^2+3x+2 **B)** x^4-x^2 **C)** $2x^2+3x+1$ **D)** $-x^2+3x+4$ **E)** x^3+x

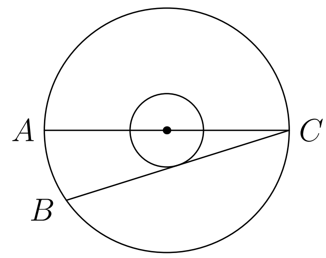
10. Šiemet metus žyminčio skaičiaus 2014 visi skaitmenys skirtingi ir paskutinis skaitmuo didesnis už kitų trijų skaitmenų sumą. Prieš kiek metų taip buvo nutikę paskutinį kartą?
A) 5 **B)** 215 **C)** 305 **D)** 395 **E)** 485

Klausimai po 4 taškus

11. Dėžė yra stačiakampis gretasienis $a \times b \times c$, kurio kraštinės nelygios: $a < b < c$. Padidinus vieną iš dėžės kraštinių a, b arba c teigiamu skaičiumi d, tūris padidės. Kuriuo atveju dėžės tūris padidės labiausiai?
A) Padidinus a **B)** Padidinus b **C)** Padidinus c
D) Tūris padidės tiek pat kiekvienu atveju **E)** Tai priklauso nuo a, b, c, d reikšmių

12. Keturios komandos A, B, C ir D dalyvavo futbolo varžybose. Už pergalę kiekvienose rungtynėse skiriami 3 taškai, už pralaimėjimą – 0 taškų, o lygiosiomis sužaidusios komandos gauna po 1 tašką. Kiekviena komanda sužaidė po trejas rungtynes (po vienerias su kiekviena kita komanda). Komanda A surinko 7 taškus, o komandos B ir C – po 4. Kiek taškų surinko komanda D?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

13. Koncentriškų apskritimų spindulių santykis yra $1:3$ (žr. pav.). AC yra didžiojo apskritimo skersmuo, styga BC liečia mažąjį apskritimą, $AB = 12$. Raskite didžiojo apskritimo spindulį.
A) 13 **B)** 18 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 26

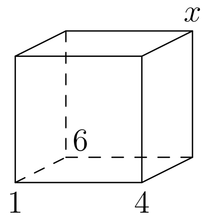


14. Kiek natūraliųjų skaičių trejetų (a,b,c) tenkina nelygybes $a > b > c > 1$ ir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 1$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Be galo daug

15. Realieji skaičiai a, b, c nelygūs nuliui. Lukas sugalvojo tokį natūralųjį skaičių n, kad skaičiai $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ bei $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ būtų to paties ženklo. Tai reiškia, kad neabejotinai galioja tokia nelygybė:
A) $a>0$ **B)** $b>0$ **C)** $c>0$ **D)** $a<0$ **E)** $b<0$

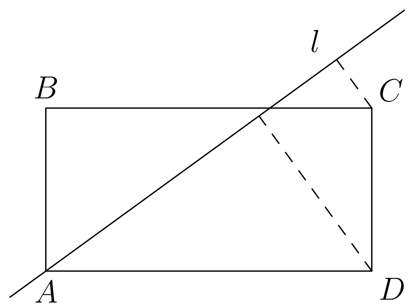
16. Šešiose savaitėse yra $n!$ sekundžių. Raskite n.
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

17. Kubo viršūnės sunumeruotos nuo 1-os iki 8-os (žr. pav.). Bet kurios sienos viršūnėse įrašytų skaičių suma yra ta pati. Raskite x.
A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8



18. Sūrelio „Kengūriukas“ pakuotė informuoja: „Riebalų kiekis 24%, riebalų kiekis sausoje masėje 64%“. Kurią sūrelio dalį sudaro vanduo?
A) 88% **B)** 62,5% **C)** 49% **D)** 42% **E)** 37,5%

19. Tiesė l eina per stačiakampio viršūnę A (žr. pav.). Atstumas nuo viršūnės C iki l yra 2, atstumas nuo viršūnės D iki l yra 6. Be to, $AD = 2AB$. Raskite AD.



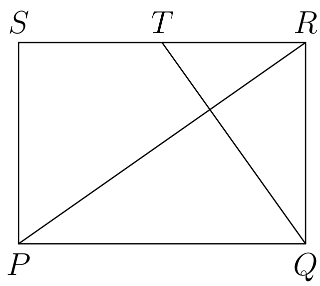
A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** $4\sqrt{3}$

20. Tiesinė funkcija $f(x) = ax + b$ tenkina lygybes $f(f(f(1))) = 29$ ir $f(f(f(0))) = 2$. Raskite a.
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Klausimai po 5 taškus

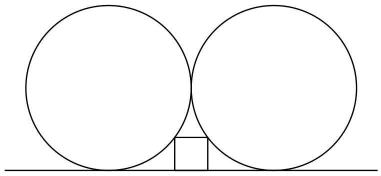
21. Plebėjas Decijus liepė savo sūnums ištirti 10 skirtingų natūraliųjų skaičių dalumą. Kvintui patiko, kad lygiai 5 iš tų skaičių dalijasi iš 5. Septimas nustatė, kad lygiai 7 iš jų dalijasi iš 7. O mažasis Maksencijus įsiminė tik didžiausią skaičių M. Kokia yra mažiausia galima M reikšmė?
A) 105 **B)** 77 **C)** 75 **D)** 63 **E)** Kitas skaičius

22. Stačiakampio $PQRS$ kraštinę RS taškas T dalija pusiau. Atkarpos QT ir PR statmenos (žr. pav.). Raskite $PQ : QR$.
A) $2 : 1$ **B)** $\sqrt{3} : 1$ **C)** $3 : 2$ **D)** $\sqrt{2} : 1$ **E)** $5 : 4$



23. Sukčius pardavėjas parduoda 9 auksines kengūros statulėles. Kai kurios statulėlės tik paauksuotos. Pardavėjas žino: atsitiktinai renkantis tris statulėles, tikimybė, kad nė viena iš jų nebus auksinė, lygi $\frac{2}{3}$. Kelios statulėlės suklastotos?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

24. Kvadrato viršūnės priklauso tarpusavyje besiliečiantiems vienetinio spindulio apskritimams ir tiesei (žr. pav.). Koks yra kvadrato kraštinės ilgis?
A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

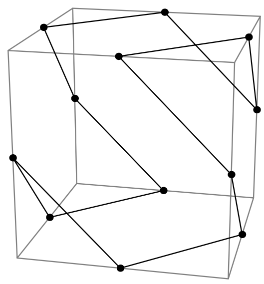


25. Skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių kaip 100, sandauga nesidalija iš 54. Kiek daugiausiai skaičių galėjo būti sudauginta?
A) 8 **B)** 17 **C)** 68 **D)** 69 **E)** 90

26. Du taisyklingieji daugiakampiai, 15-kampis $ABCD\ldots$ ir n-kampis $ABZY\ldots$, turi bendrą kraštinę AB ir yra skirtingose jos pusėse. Be to, $AB = CZ = 1$. Raskite n.
A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

27. Lygybėse $k = \sqrt[n]{2014 + m} = \sqrt[n]{1024}+1$ skaičiai k, m, n yra natūralieji. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti skaičius m?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Be galo daug

28. Sujungus kubo briaunų vidurio taškus gautas erdvinis daugiakampis (žr. pav.). Daugiakampio kampais laikomi kampai, kuriuos sudaro jo gretimos kraštinės. Kam lygi šio daugiakampio kampų suma?
A) 720° **B)** 1080° **C)** 1200° **D)** 1440° **E)** 1800°



29. Funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tenkina lygybes $f(4) = 6$ ir $xf(x) = (x-3)f(x+1)$ bet kuriai sveikajai x reikšmei. Raskite $f(4)f(7)f(10)\ldots f(2011)f(2014)$.
A) 2013 **B)** 2014 **C)** $2013 \cdot 2014$ **D)** 2013! **E)** 2014!

30. Stebuklingoje saloje gyveno 17 ožių, 55 vilkai ir 6 liūtai. Vilkai ėda ožius, o liūtai – tiek vilkus, tiek ožius. Tačiau ožį suėdęs liūtas virsta vilku, ožį suėdęs vilkas – liūtu, o vilką suėdęs liūtas – ožiu. Po kurio laiko saloje likę gyvūnai jau nebegalėjo ėsti vienas kito. Kiek daugiausiai gyvūnų galėjo likti saloje?
A) 1 **B)** 6 **C)** 17 **D)** 23 **E)** 35

Senjoro užduočių sprendimai

1. C 64

! Nepulkime iš karto skaičiuoti, kiek kubelių pašalinta, nes paveikslėlyje lengviau pamatyti, kiek jų liko. Pradžioje kubelių buvo $5^3 = 125$. O liko pagrindas 5×5 bei 9 stulpeliai po 4 kubelius. Taigi liko $5^2 + 9 \cdot 4 = 25 + 36 = 61$ kubelis. Vadinasi, buvo pašalinti $125 - 61 = 64$ kubeliai.

2. C 77

! Nors galbūt iš karto atrodo, kad atsakymas yra 55, neskubėkime. Kasmet kiekvieno žmogaus amžius padidėja 1 metais, todėl trijų amžių suma padidės 3 metais. Po metų amžių suma bus 47, o ne 45. Kai kurie skaičiai (pvz., 45 ir 46) negalimi. Dviejų sumų skirtumas turi būti 3, 6, 9, 12 ir t. t. Jis turi būti skaičiaus 3 kartotinis. Skirtumai $55 - 44 = 11$ ir $66 - 44 = 22$ negalimi. O mažiausias iš likusių skaičių 77 yra galimas, tokią amžių sumą gausime po 11 metų: $44 + 3 \cdot 11 = 77$.

3. B 8

! Prisiminkime, kas nutinka keliant skaičių laipsniu du kartus: $(x^y)^z = x^{yz}$. Vieną reiškinį išreikškime per kitą ir suprastinkime:

$$a^{-3b} = (a^b)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)\cdot(-3)} = 2^3 = 8.$$

4. C 24

! Galima būtų kamuolių skaičius pintinėse pasižymėti raidėmis ir sudaryti nesudėtingą trijų tiesinių lygčių sistemą. Bet ir tai nebūtina. Jei dvi dalys visų 48 kamuolių yra didžiojoje ir mažojoje pintinėse ir viena vidutinėje (viena iš trijų!), tai vidutinėje yra trečdalis visų kamuolių, t. y. $48 : 3 = 16$ kamuolių. Mažojoje pintinėje jų perpus mažiau: $16 : 2 = 8$. Todėl didžiojoje pintinėje yra $48 - 16 - 8 = 24$ kamuoliai.

5. (E) 2

! Pastebėkime, kad

$$2^{2014} - 2^{2013} = 2^{2013}(2^{2014-2013} - 1) = 2^{2013}(2-1) = 2^{2013}.$$

Analogiškai galime rasti ir apatinį skirtumą. Bet jį suskaičiuosime kiek kitaip atlikdami veiksmus:

$$2^{2013} - 2^{2012} = 2 \cdot 2^{2012} - 2^{2012} = 2^{2012} + 2^{2012} - 2^{2012} = 2^{2012}.$$

Taigi ieškoma reikšmė lygi

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \frac{2^{2013}}{2^{2012}} = 2^{2013-2012} = 2.$$

6. (B) Kažkas išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį

! Teiginys **E** net neprieštarauja duotajam, todėl, žinoma, nėra priešingas. Kiti teiginiai duotajam prieštarauja, tačiau priešingas tėra vienas iš jų – tas, kuris tik paneigia duotąjį, bet nieko daugiau nei tas paneigimas nepasako. Juk kitaip nebūtų galima sakyti „Tai reiškia, kad...“.

Jei kažkas vienas išsprendė 21 uždavinį, o visi kiti po lygiai 19 uždavinių, tai bus klaidingas tiek duotasis teiginys, tiek teiginiai **A**, **C**, **D**. Vadinasi, šie teiginiai prieštarauja ne vien duotajam, bet paneigia ir tam tikrų kitų situacijų galimybę. Jie nėra priešingi.

Duotasis teiginys ir teiginys **B** priešingi. Jie prieštarauja vienas kitam, ir jei klaidingas vienas, tai **neišvengiamai** teisingas kitas: arba visi sprendusieji pasižymi tam tikra savybe (išsprendė daugiau kaip 21 uždavinį), arba kažkas ja nepasižymi (tiek uždavinių neišsprendė, t.y. išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį).

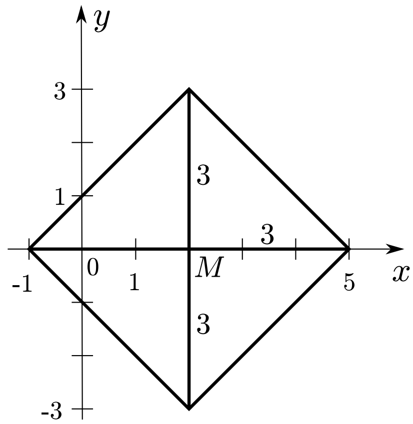
7. (E) 111

! Prisiminkime, kas nutinka keliant skaičių laipsniu du kartus: $(x^y)^z = x^{yz}$. Tuo remdamiesi pertvarkome sandaugą:

$$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{22\cdot 5} \cdot 5^{55\cdot 2} = 2^{110} \cdot 5^{110} = (2\cdot 5)^{110} = 10^{110}.$$

Skaičių 10^{110} sudaro skaitmenys: vienas vienetas ir tiek nulių, kokiu laipsniu pakeltas skaičius 10, t. y. 110 nulių. Iš viso gauname $1 + 110 = 111$ skaitmenų.

8. (B) $(2;3)$



! Turime vienos iš kvadrato įstrižainių galus. Neverta nagrinėti kvadrato kraštinių, jų padėties ar ilgių. Pakaks ir jo įstrižainių. Raskime kvadrato centrą, dalijantį abi įstrižaines pusiau. Kadangi duotieji įstrižainės galai yra Ox ašyje, tai ir centras bus joje, per vidurį tarp tų galų. Jo x koordinatė lygi atitinkamų koordinačių vidurkiui $\frac{(-1)+5}{2} = 2$. Turime tašką $M(2;0)$.

Viena įstrižainė yra Ox ašyje, horizontali. Kita yra jai statmena, todėl vertikali, lygiagreti Oy ašiai. Vertikalioje tiesėje esantys taškai turi tą pačią x koordinatę. Ieškomos kitos dvi kvadrato viršūnės bus vienoje tokioje tiesėje su tašku M ir todėl turės pavidalą $(2;?)$. Dešinės viršūnės atstumas iki centro lygus $5-2=3$ (žr. pav.) Visų viršūnių atstumas iki kvadrato centro turi būti toks pats. Taško, iškilusio virš Ox ašies per 3, y koordinatė lygi 3, o jam simetriško, esančio po ašimi, turi būti lygi -3. Gauname viršūnes $(2;3)$ ir $(2;-3)$. Tarp atsakymų randame pirmąją iš jų.

9. (E) x^3+x

? Jei daugianariui q galioja lygybė $q(x) = (x+1)\cdot p(x)$, tai į ją įsistatę $x=-1$, gausime, kad $q(-1) = 0\cdot p(-1) = 0$. Patikrinkime, ar pateikti atsakymai pasižymi šia savybe. Ja nepasižymi atsakymas **E**: $x^3+x = (-1)^3+(-1) = -2 \neq 0$. Vadinasi, šio daugianario reikiamu būdu neišskaidysime.

Žinoma, atsakymo **E** teisingumą galima nuspėti ir iš karto: $x^3+x = x(x^2+1)$ turi dalytis iš $x+1$, bet intuityviai aišku, kad x^2+1 (kitaip nei x^2-1), o tuo labiau x iš $x+1$ nesidalija.

! Patikrinkime, kad daugianariai **A**-**D** gali būti išskaidyti reikiamu būdu. Trys iš jų yra kvadratiniai trinariai, todėl galime rasti jų šaknis ir išskaidyti trinarius į tiesinius daugiklius.

A) Trinaris turi šaknis -1 ir -2, todėl išsiskaido reikiamu būdu $x^2+3x+2 = (x-(-1))(x-(-2)) = (x+1)(x+2)$. Taigi $p(x) = x+2$ (žr. **?** dalį).

B) Šiuo atveju daugianaris nekvadratinis, bet išskaidyti jį visai lengva: $x^4-x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$. Taigi $p(x) = x^2(x-1) = x^3-x^2$.

C) Trinaris turi šaknis -1 ir $-\frac{1}{2}$, todėl išsiskaido reikiamu būdu $2x^2+3x+1 = 2(x-(-1))(x-(-\frac{1}{2})) = 2(x+1)(x+\frac{1}{2})$. Taigi $p(x) = 2(x+\frac{1}{2}) = 2x+1$.

D) Trinaris turi šaknis -1 ir 4, todėl išsiskaido reikiamu būdu $-x^2+3x+4 = -(x-(-1))(x-4) = -(x+1)(x-4)$. Taigi $p(x) = -(x-4) = -x+4$.

Beje, pastebėsime, kad visų šaknų ir pačių išskaidymų būtų galima neieškoti, žinant tokį faktą: bet kuris daugianaris, turintis šaknį a, dalijasi iš $x-a$. Daugianariai **A**-**D** turi šaknį -1, t. y. įgyja reikšmę 0, kai $x=-1$, todėl iš $x+1$ privalo dalytis, o dalmuo kiekvienu atveju būtų $p(x)$.

10. (C) 305

? Tikrinkime atsakymus nuo mažiausio.

A $2014 - 5 = 2009$ netinka, nes sutampa du skaitmenys 0, o turi būti skirtingi.

B $2014 - 215 = 1799$ netinka, nes ir vėl du skaitmenys 9 sutampa.

C $2014 - 305 = 1709$ tinka, nes šio metų skaičiaus visi skaitmenys skirtingi ir $1+7+0 < 9$.

Kiti du atsakymai mums jau gali nerūpėti. Net jei gautume tinkamus metų skaičius, tai būtų metai, ankstesni nei 1709-ieji, todėl niekaip negalėtų būti metais, kai uždavinio sąlyga buvo tenkinama paskutinį kartą prieš 2014-uosius.

! Įrodysime, kad po 1709 metų uždavinio sąlyga nebuvo tenkinama iki pat 2014 metų. Perrinkime skaičius nuo didžiausio.

- Skaičiai 2013, 2012, 2011, 2010 netinka, nes jų paskutinis skaitmuo ne didesnis nei kitų trijų skaitmenų suma.
- Skaičiai $2009, 2008, \ldots, 2000$ netinka, nes sutampa jų antras ir trečias skaitmenys.
- Skaičiai $1999, 1998, \ldots, 1800$ netinka, nes jų pirmųjų trijų skaitmenų suma ne mažesnė nei $1 + 8 + 0 = 9$, todėl ketvirtasis skaitmuo, mažesnis nei 10, ne didesnis nei ši suma.
- Skaičiai $1799, 1798, \ldots, 1710$ netinka, nes jų pirmųjų trijų skaitmenų suma ir vėl ne mažesnė nei $1 + 7 + 1 = 9$, todėl ketvirtasis skaitmuo ir vėl ne didesnis nei ši suma.

Taip sustojame ties skaičiumi 1709, kai trijų skaitmenų suma pagaliau sumažėja iki 8, o paskutinis skaitmuo pašoka iki 9.

11. (A) Padidinus a

! Pradinis dėžės tūris lygus abc. Padidinus a, tūris bus $(a + d)bc = abc + dbc$. Jis padidės $abc + dbc - abc = dbc$. Kitais dviem atvejais analogiškai gauname tūrio pokyčius dac ir dab. Pažymėję $dabc = P$, tuos pokyčius galime užrašyti taip: $dbc = dabc/a = P/a$, $dac = dabc/b = P/b$, $dab = dabc/c = P/c$. Kadangi $a < b < c$, tai su bet kokia (teigiama) P reikšme turime $1/a > 1/b > 1/c$ ir $P/a > P/b > P/c$. Matome, kad didžiausias tūrio pokytis visada bus $P/a = dbc$, gaunamas padidinus a.

(Žinoma, tūrio pokyčius buvo galima palyginti ir tiesiogiai. Pvz., $dbc > dac$, nes $b > a$ ir todėl $b \cdot dc > a \cdot dc$.)

12. (B) 1

? Nesunku nuspėti, kad komandų taškai, gauti atskirose rungtynėse, pasiskirsto taip: $7 = 3+3+1$ (komanda A) ir $4 = 3 + 1 + 0$ (komandos B ir C). Nesunku sugalvoti ir varžybų rezultatų lentelę, atitinkančią tokį taškų pasiskirstymą. Tarkime, A su B sužaidė rezultatu $3 : 0$, A su C – $3 : 0$, B su C – $1 : 1$. Komandos D rezultatai nustatomi vienareikšmiškai. Komanda A turi pelnyti dar 1 tašką, o komandos B ir C − po 3. Todėl komandos sužaidė taip: A su D – $1 : 1$, B su D – $3 : 0$, C su D – $3 : 0$. Komanda D pelnė $1 + 0 + 0 = 1$ tašką.

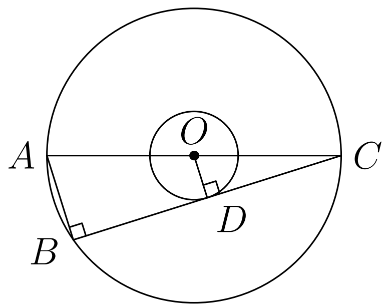
! Kad uždavinio situacija galima, jau įsitikinome **?** dalyje. Mums belieka įrodyti, kad kitokio rezultato nei 1 taškas komanda D negalėjo pasiekti.

Komanda A, gavusi 7 taškus, laimėjo bent 2 iš savo 3 rungtynių. Juk kitaip ji būtų gavusi 3 taškus už daugiausiai vienerias rungtynes, o kitose 2 rungtynėse − daugiausiai po 1 tašką. Tad iš viso − daugiausiai $3 + 1 + 1 = 5$ taškus, o ne 7. Komandos A taškai, gauti už atskiras rungtynes, pasiskirsto taip: $7 = 3 + 3+?$. Žinoma, $? = 1$.

Panašiai mąstykime apie komandas B ir C. Jei kuri viena iš jų nebūtų laimėjusi nė vienų rungtynių (visas rungtynes sužaidusi geriausiu atveju lygiosiomis), tai gautų daugiausiai $1 + 1 + 1 = 3$ taškus. Todėl 4 taškai pasiskirsto taip: $4 = 3+?+?$ ir $?+? = 1$. Neišvengiamai turime išskaidymą $4 = 3 + 1 + 0$.

Jei užsirašysime kiekvienos komandos kiekvienų rungtynių rezultatą, gausime tokius skaičius: 3, 3, 1 (A), 3, 1, 0 (B), 3, 1, 0 (C), ?, ?, ? (D). Nežinome, kaip žaidė D, bet galime nustatyti, remdamiesi žinomais rezultatais. Kiekvienose rungtynėse komandos gauna 3 ir 0 taškų arba 1 ir 1 tašką. Tad rezultatų aibėje trejetų ir nulių turi būti po lygiai, o vienetų − lyginis skaičius. Jau turime 4 trejetus ir tik 2 nulius, todėl turi būti dar 2 nuliai. O vienetų turime 3, todėl turi būti dar bent vienas. Vadinasi, komandos D pelnyti taškai yra 0, 0 ir 1. Ji surinko $0 + 0 + 1 = 1$ tašką.

13. (B) 18



! Jei jau brėžinyje turime apskritimo liestinę, tai bandykime pasinaudoti jos statmenumu apskritimo spinduliui, kurį pažymėkime OD (žr. pav.).

Svarbiausias dėsningumas, kurį reikia pastebėti, yra tas, kad duoto ilgio atkarpa AB taip pat statmena tai pačiai liestinei BC. Kampas ABC yra statusis, nes remiasi į didžiojo apskritimo $180°$ lanką (pusapskritimį, atskirtą skersmens). Du stačiuosius kampus nesunku ir tiesiog nuspėti iš brėžinio.

Taigi atkarpos AB ir OD abi statmenos skersmeniui. O tai reiškia, kad trikampiai ABC ir ODC panašūs kaip turintys lygius kampus (kampas ACB bendras, du kampai statūs, tad ir likę du kampai turi būti lygūs: $\angle CAB = 90° - \angle ACB = \angle COD$). Panašumo koeficientas lygus $\frac{CO}{CA} = \frac{CO}{2CO} = \frac{1}{2}$ (skersmuo CA lygus dvigubam spinduliui CO).

Šio panašumo užtenka, kad iš karto rastume mažojo apskritimo spindulį: $OD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$. Belieka prisiminti dar nepanaudotą santykį $1 : 3$. Didžiojo apskritimo spindulys trigubai ilgesnis ir lygus $6 \cdot 3 = 18$.

14. **C** 2

! Aišku, kad jei a, b, c pakankamai dideli, tai reiškinio $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ reikšmė bus maža, o mums rūpi, kad ji būtų didesnė už 1. Bandykime statytis kuo mažesnes a, b ir c reikšmes. Taip nesunkiai gausime trejetus $(4,3,2)$ ir $(5,3,2)$:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3+4+6}{12}=\frac{13}{12}>1 \quad \text{ir} \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{6+10+15}{30}=\frac{31}{30}>1.$$

Jei $c=2, b=3$ ir $a \geq 6$, tai $\frac{1}{a}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \leq \frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1+2+3}{6}=1$. Todėl šios reikšmės netinka. Mėgindami padidinti b arba c nieko gero negausime. Bandykime įrodyti, kad šie skaičiai ir negali būti didesni.

Duota, kad $c \geq 2$. Jei $c \geq 3$, tai $b \geq 4$, $a \geq 5$ ir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. Vadinasi, mums tinka tik $c=2$.

Kadangi $b>c$, tai $b \geq 3$. Jei $b \geq 4$, tai $a \geq 5$ ir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$. Vadinasi, mums tinka tik $b=3$.

Visus atvejus, kai $c=2$ ir $b=3$ (ir todėl $a \geq 4$) išnagrinėjome pačioje pradžioje. Taigi tie du trejetai, kuriuos radome, yra vieninteliai galimi.

15. **D** $a<0$

! Duoti reiškiniai sudėtingi, tačiau mums terūpi jų ženklai. Reiškiniuose matome lyginius ir nelyginius laipsnius. Keliant skaičių lyginiu laipsniu gaunamas teigiamas skaičius, o nelyginiu – to paties ženklo skaičius kaip pradinis. Todėl reiškinį $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ galime pakeisti paprastesniu reiškiniu $-2bc^{3n}$, o reiškinį $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ – reiškiniu abc^{3n}. Ženklai nuo to nepasikeis. Iš tiesų nelyginį laipsnį $(-2)^{2n+3}$ galime pakeisti pačiu skaičiumi -2, lyginį laipsnį a^{2n+2} išvis pašalinti kaip teigiamą skaičių, ir t. t. Skaičių $c^{3n+2}=c^{3n}\cdot c^{2}$ ir $c^{3n-2}=c^{3n}\cdot c^{-4}$ ženklai sutaps su c^{3n} ženklu.

Reiškinių $-2bc^{3n}=(-2)\cdot bc^{3n}$ ir $a\cdot bc^{3n}$ ženklai sutaps tada ir tik tada, kai sutaps -2 ir a ženklai, t. y. kai a yra neigiamas ($a<0$, kaip nurodyta atsakyme **D**). Pastebėkime, kad b ir c gali būti bet kokie, todėl kiti atsakymai negali būti teisingi.

!! Atsakymą galima rasti nagrinėjant tik vieną reiškinį vietoj dviejų. Juk du skaičiai bus to paties ženklo tada ir tik tada, kai jų sandauga teigiama. Taigi mums duota, kad

$$(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}\cdot(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}=$$

$$=(-2)^{2n+3}(-3)^{2n+2}a^{6n+3}b^{4n+4}c^{6n-2}=((-2)^{n+1}(-3)^{n+1}a^{3n+1}b^{2n+2}c^{3n-1})^{2}\cdot(-2a)$$

yra teigiamas skačius, t. y. kad $-2a>0$ ir $a<0$.

16. (**D**) 10

! 6 savaitėse yra $6 \cdot 7$ dienų, $6 \cdot 7 \cdot 24$ valandų, $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60$ minučių ir $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ sekundžių.

Matome, kad $n!$ dalijasi iš $60^2 = 5^2 \cdot 12^2$, bet nesidalija iš 11. Jei $n < 10$, tai $n!$ dalijasi iš 5, bet kito skaičiaus, dalaus iš 5 (10 ar didesnio), sandaugoje $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ nėra ir ji nesidalija iš 5^2. Jei $n > 10$, tai sandaugoje $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ yra skaičius 11. Vadinasi, $n = 10$.

!! Skaičių $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ iš eilės dalykime iš 1, 2, 3 ir t. t., kol gausime dalmenį 1. Paskutinis skaičius, iš kurio padalysime, bus n.

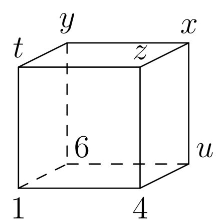
Po pirmų 7 veiksmų gausime

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60}{24 \cdot 5} = \frac{60 \cdot 60}{5} = 12 \cdot 60 = 720.$$

Toliau gauname $720 : 8 = 90$ ir $90 : 9 = 10$. Vadinasi, $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$.

17. (**A**) 2

! Nežinomus skaičius pažymėkime y, z, t, u (žr. pav.).



Nagrinėkime tas sienas, kurių skaičių sumas sulyginus ir lygybę suprastinus lieka x ir kuo mažiau kitų nežinomų skaičių. Naudinga ši lygybė: $1+4+z+t = x+y+z+t$. Suprastinkime ją: $x + y = 5$. Koks gali būti x? Reikšmės $x \geq 5$ per didelės, o skaičiai 1 ir 4 jau panaudoti. Todėl $x = 2$ arba $x = 3$.

Užrašykime dar vieną panašią lygybę: $1 + 6 + 4 + u = x + z + 4 + u$ arba $x + z = 7$. Jei $x = 3$, tai $z = 7 - x = 4$, bet ši reikšmė jau panaudota. Vadinasi, $x = 2$.

Nors to neprašoma, baikime spręsti uždavinį rasdami visus nežinomuosius ir tuo įrodydami, kad kubo viršūnes įmanoma sunumeruoti nurodytu būdu: $y = 5 - x = 3$, $z = 7 - x = 5$. Kadangi $1 + 6 + y + t = 1 + 6 + 4 + u$, tai $t = u + 1$. Lieka reikšmės 7 ir 8, tad $t = 8$ ir $u = 7$. Kiekvienos sienos skaičių suma lygi 18.

Pastebėsime, kad kaip benumeruotume viršūnes (net nepaisydami paveikslėlio) kitos sumos niekaip negautume, nes dviguba tokia suma turi būti lygi dviejų priešingų sienų visų viršūnių skaičių sumai, t. y. visų 8 skirtingų skaičių sumai $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$.

18. (B) 62,5%

! Laikykime, kad turime sūrelio kiekį a (ar gramų, ar kilogramų, ar kubinių metrų visai nesvarbu; net galėtume iš karto imti $a = 1$ – bet koks sūrelio kiekio vienetas). Riebalų kiekis jame yra $0{,}24a$. Tarkime, vandens kiekis jame yra xa, t. y. vanduo sudaro x-ąją sūrelio dalį. Sausos sūrelio masės kiekis bus $a - xa = (1-x)a$. Riebalų kiekis joje bus $0{,}64(1-x)a$. Tačiau riebalų kiekis sūrelyje nesikeičia: $0{,}24a = 0{,}64(1-x)a$. Išprastinkime a ir raskime x:

$$0{,}24 = 0{,}64(1-x) = 0{,}64 - 0{,}64x,$$

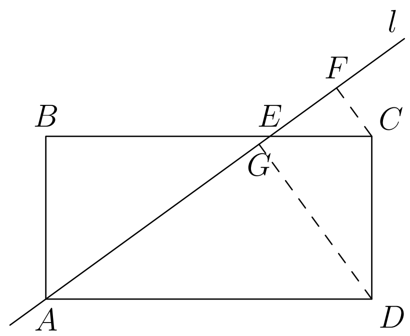
$$0{,}64x = 0{,}64 - 0{,}24 = 0{,}4,$$
$$x = \frac{0{,}4}{0{,}64} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}.$$

Vandens dalis sūrelyje lygi $\frac{5}{8} \cdot 100\%$. Jau dabar galime pasirinkti vieną iš atsakymų: $\frac{5}{8}$ yra tik šiek tiek daugiau nei $\frac{1}{2}$, todėl $\frac{5}{8} \cdot 100\%$ nėra daug daugiau nei 50% ir iš atsakymų **A** ir **B** turėtume rinktis **B**.

Bet apskaičiuokime tikslią reikšmę: $\frac{5}{8} \cdot 100 = \frac{5 \cdot 100}{8} = \frac{5 \cdot 25}{2} = \frac{125}{2} = 62{,}5(\%)$.

19. (A) 10

! Pažymėkime $AD = BC = x$, taip pat pažymėkime taškus E, F, G, kaip parodyta paveikslėlyje.



Tada $AB = \frac{AD}{2} = \frac{x}{2}$. Jei du statūs trikampiai turi po tokį patį smailųjį kampą α, tai jie turi lygius kampus (α, $90°$ ir $90° - \alpha$) ir todėl yra panašūs. Nesunku pastebėti tris panašius stačiuosius trikampius. Į akis krinta poromis lygiagrečių atkarpų ir tiesės l ribojami trikampiai AGD ir EFC. Jie turi po tokį patį smailųjį kampą $\angle GAD = \angle FEC$ (kampai lygūs kaip atitinkamieji: l kerta lygiagrečias tieses BC ir AD). Taip pat panašūs ir statieji trikampiai AGD bei EBA, nes $\angle GAD = \angle BEA$ kaip priešiniai kampai (l kerta lygiagrečias tieses BC ir AD).

Panašumas mums reikalingas atkarpų ilgiams apskaičiuoti. Dėl AGD ir EFC panašumo $EC : AD = CF : DG = 2 : 6 = \frac{1}{3}$ ir $EC = \frac{1}{3}AD = \frac{x}{3}$. Todėl $BE = BC - EC = x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$. Dėl AGD bei EBA panašumo $AG : DG = EB : AB = \frac{2x}{3} : \frac{x}{2} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$. Todėl $AG = \frac{4}{3}DG = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8$.

Žinome abu stačiojo trikampio AGD statinius. Pagal Pitagoro teoremą $x^2 = AD^2 = AG^2 + DG^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Randame $x = \sqrt{100} = 10$.

20. (C) 3

! Kad rastume $f(f(f(1)))$, turime į funkciją f įsistatyti argumento reikšmę $f(f(1))$. Kad rastume $f(f(1))$, reikia reikšmės $x = f(1)$. Dėmesingai prastindami iš eilės skaičiuokime funkcijos reikšmes:

$$f(1) = a + b, f(f(1)) = af(1) + b = a(a + b) + b = a^2 + ab + b,$$

$$29 = f(f(f(1))) = af(f(1)) + b = a(a^2 + ab + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b;$$

$$f(0) = b, f(f(0)) = af(0) + b = ab + b,$$

$$2 = f(f(f(0))) = af(f(0)) + b = a(ab + b) + b = a^2b + ab + b.$$

Belieka pastebėti, kad atėmus iš vienos reikšmės kitą nežinomasis b susiprastina:

$$27 = 29 - 2 = f(f(f(1))) - f(f(f(0))) = a^3 + a^2b + ab + b - (a^2b + ab + b) = a^3.$$

Taigi $a^3 = 27$ ir todėl $a = 3$. (Pastebėsime, kad tinka funkcija $f(x) = 3x + \frac{2}{13}$.)

!! Pastebėkime, kad įsistatę vieną tiesinę funkciją $f_2(x) = k_2x + b_2$ į kitą $f_1(x) = k_1x + b_1$ visada ir vėl gausime tiesinę funkciją: $f_1(f_2(x)) = k_1f_2(x)+b_1 = k_1(k_2x+b_2)+b_1 = k_1k_2x+(k_1b_2+b_1)$. Matome, kad naujas krypties koeficientas lygus dviejų pradinių sandaugai k_1k_2.

Taigi funkcijos $f(f(x))$ krypties koeficientas yra $a \cdot a = a^2$, o $f(f(f(x)))$ krypties koeficientas yra $a^2 \cdot a = a^3$, t. y. $f(f(f(x))) = a^3x + b_0$. Neradome b_0, bet jo ir nereikia:

$$27 = f(f(f(1))) - f(f(f(0))) = a^3 \cdot 1 + b_0 - (a^3 \cdot 0 + b_0) = a^3 + b_0 - b_0 = a^3.$$

Vėlgi $a^3 = 27$ ir $a = 3$.

21. (E) Kitas skaičius

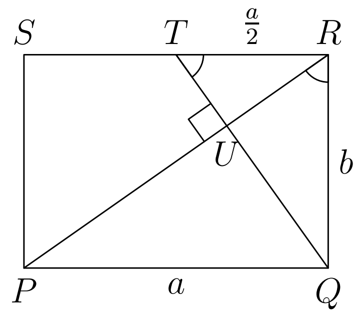
! Dalūs iš 5 skaičiai galėtų būti (jei stengsimės imti kuo mažesnius) $5, 10, 15, 20, 25$, o dalūs iš 7 galėtų būti $7, 14, \ldots, 49$. Bet tarp 10 skaičių turi būti dalių ir iš 5, ir iš 7 (t. y. iš $5 \cdot 7 = 35$). Juk kitaip jų būtų mažiausiai $5 + 7 = 12$, o ne 10. Vadinasi, turėtų būti tokių skaičių kaip $35, 70, 105, \ldots$ Galime nujausti, kad šie skaičiai yra svarbūs. Juk ieškodami skaičių, dalių tik iš 5 ar 7, kilsime iki 49, bet jei yra bent du skaičiai, dalūs iš 35, tai $M \geq 70$, o jei bent trys, tai net $M \geq 105$. Geriau kad tokių skaičių būtų kuo mažiau.

Kiek mažiausiai skaičių gali dalytis iš 35? Yra 5 skaičiai, dalūs iš 5. Taigi yra lygiai 5 skaičiai, nedalūs iš 5. Skaičių, kurie nedalūs iš 5 ir dalūs iš 7, negali būti daugiau – jų yra *daugiausiai* 5. Todėl iš 7 ir kartu iš 5 dalijasi mažiausiai $7 - 5 = 2$ skaičiai. Kaip minėjome, tokiu atveju $M \geq 70$.

Kad skaičių, dalių iš 35, gali būti mažiausiai du, nėra sunku ir tiesiog nuspėti: jei vienas žmogus norės 5 iš 10 išrikiuotų monetų, o kitas norės 7 monetų, ir norėdami kuo mažiau pyktis jie ims jas iš skirtingų pusių, tai susiginčys dėl dviejų.

Yra galima situacija, kai skaičių, dalių iš 35, yra lygiai du ir $M = 70$. Tie du skaičiai be abejonės turi būti 35 ir 70. Turi būti dar $5 - 2 = 3$ skaičiai, dalūs iš 5, bei $7 - 2 = 5$ skaičiai, dalūs iš 7. Juos, žinoma, imkime kuo mažesnius: 5, 10, 15 ir 7, 14, 21, 28, 42 (praleidome 35, nes jis jau pasirinktas). Skaičiai 5, 10, 15, 7, 14, 21, 28, 42, 35, 70 tenkina uždavinio sąlygą ir $M = 70$. Kadangi $M \geq 70$, tai 70 yra mažiausia galima M reikšmė.

22. (D) $\sqrt{2} : 1$



! Atkarpų PR ir TQ sankirtos tašką pažymėkime U (žr. pav.). Taip pat pažymėkime $PQ = a$, $QR = b$. Tada $RT = PQ/2 = \frac{a}{2}$. Reikia rasti $a : b$.

Brėžinyje galima pastebėti lygių kampų ir panašių stačiųjų trikampių. Jei du statūs trikampiai turi po tokį patį smailųjį kampą α, tai jie turi lygius kampus (α, $90°$ ir $90° - \alpha$) ir todėl yra panašūs. Čia užtenka pasinaudoti dviejų tokių trikampių panašumu.

Kampai TRP ir RPQ lygūs kaip priešiniai (įstrižainė PR sudaro juos su lygiagrečiomis kraštinėmis PQ ir SR). Pasinaudokime tuo, kad trikampiai TUR ir PQR statieji: $\angle RTQ = \angle RTU = 90° - \angle TRU = 90° - \angle TRP = 90° - \angle RPQ = \angle PRQ$. Taigi statieji trikampiai TRQ ir RQP turi po tokį patį smailųjį kampą RTQ ir PRQ, todėl yra panašūs. Panašių trikampių kraštinės proporcingos:

$$RQ : RT = PQ : RQ, \ \ b : \frac{a}{2} = a : b, \ \ \frac{2b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Iš gautos lygybės galime išsireikšti ieškomą santykį $a : b$:

$$2b^2 = a^2, \ \ \sqrt{2}b = a, \ \ a : b = \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1.$$

23. (E) 8

! Tarkime, suklastota a statulėlių. Iš 9 kengūrų pasirinkti 3 yra $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ būdai (derinių skaičius). O 3 statulėles iš a suklastotų galima pasirinkti $C_a^3 = \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{a(a-1)(a-2)}{6}$ būdų (žinoma, $a \geq 3$). Visi būdai lygiai tikėtini, todėl tikimybė lygi nagrinėjamą įvykį (visos 3 statulėlės suklastotos) atitinkančių būdų ir visų būdų skaičių santykiui. Gauname lygtį

$$\frac{a(a-1)(a-2)}{6} : 84 = \frac{2}{3}, \quad \frac{a(a-1)(a-2)}{6} = 84 \cdot \frac{2}{3} = 56.$$

Reiškinys kairėje gautos lygybės pusėje didėja, kai a didėja, nes didėja kiekvienas iš 3 teigiamų dauginamųjų skaitiklyje. Todėl lygtis gali turėti tik vieną sprendinį. O jam nustatyti dabar tereikia įsistatyti į lygtį teisingą a reikšmę (žinoma, verta tikrinti tas, kurios pateiktos atsakymuose). Lygtį tenkina $a = 8$:

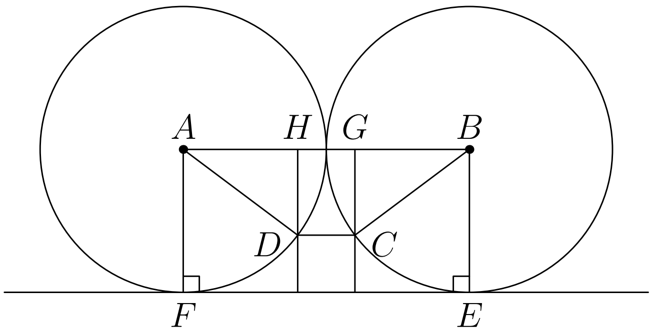
$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Tai ir yra ieškomas atsakymas.

24. Ⓐ $\frac{2}{5}$

! Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x.

Pasinaudokime tuo, kad tiesė ir apskritimai liečiasi, o kvadrato viršūnės jiems priklauso, nubrėždami atitinkamus apskritimų spindulius. Pažymėkime taškus A, B, C, D, E, F, kaip parodyta paveikslėlyje.



Nesunku nuspėti, kad $ABEF$ yra stačiakampis. Nesunku ir įrodyti: kraštinės AF ir BE statmenos EF, todėl lygiagrečios tarpusavyje, be to, abi yra ilgio 1, tad keturkampis yra lygiagretainis. Du jo kampai E ir F yra statūs, todėl jiems lygūs kiti du kampai taip pat statūs.

Nesunku nuspėti, kad $ABCD$ yra lygiašonė trapecija. Iš tiesų: stačiakampio kraštinė AB ir kvadrato kraštinė CD abi lygiagrečios su EF, todėl lygiagrečios tarpusavyje. Taigi turime trapeciją. Šoninės kraštinės AD ir BC lygios: jos yra apskritimų spinduliai ir jų ilgis yra 1.

Iš trapecijos viršūnių išveskime aukštines DH ir CG. Taip gausime vienodus (dėl lygiašonės trapecijos simetriškumo) stačiuosius trikampius AHD ir BGC bei stačiakampį $CDHG$. Išreikškime trikampio AHD kraštines per x.

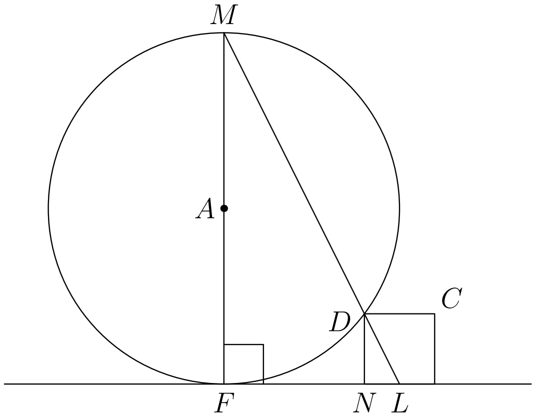
- $AD = 1$ kaip apskritimo spindulys.
- Taip pat ir $AF = 1$. Toks yra atstumas tarp lygiagrečių atkarpų AB ir EF. Jis yra atstumo nuo EF iki CD, lygaus x, ir atstumo nuo CD iki AB, lygaus DH, suma: $1 = x + DH$ ir $DH = 1 - x$.
- Atkarpa AB sudaryta iš dar dviejų spindulių ir jos ilgis yra $1+1 = 2$. Taškai G ir H dalija ją į tris dalis: $HG(= CD = x)$, AH ir $BG(= AH)$. Todėl $2 = AH+HG+BG = 2AH+x$ ir $AH = 1 - x/2$.

Belieka trikampiui AHD pritaikyti Pitagoro teoremą ir iš gautos lygties rasti x:

$$AH^2 + DH^2 = AD^2,$$
$$(1 - x)^2 + (1 - \frac{x}{2})^2 = 1^2,$$
$$\frac{5}{4}x^2 - 3x + 1 = 0,$$
$$x_1 = \frac{2}{5} \text{ ir } x_2 = 2.$$

Šaknis x_2 yra akivaizdžiai per didelė. Juk $x = CD < EF = AB = 2$. Taigi $x = \frac{2}{5}$.

!! Galimas gudresnis uždavinio sprendimas. Nagrinėkime trikampius DNL ir MFL (žr. pav.; čia L – atkarpos EF, o kartu ir duotojo kvadrato kraštinės vidurys, MF – apskritimo skersmuo, N – kvadrato viršūnė).



Šie trikampiai panašūs:

$$ND : NL = x : \frac{x}{2} = 2 = 2 : 1 = FM : FL \quad \text{ir} \quad \angle LFM = \angle LND = 90^\circ.$$

(Čia $FL = EF/2 = AB/2 = (1+1)/2 = 1$.) Todėl atkarpos ML ir DL sudaro po tokį patį kampą su tiese LF ir taškai L, D, M priklauso vienai tiesei. Kadangi MF – skersmuo, tai $\angle MDF = \angle FDL = 90^\circ$. Tada

$$\angle DFL = 90^\circ - \angle DLF = 90^\circ - \angle MLF = \angle FML,$$

o tai reiškia, kad statūs trikampiai DNF ir LFM panašūs. Todėl $ND : NF = FL : FM = 1 : 2$ ir $NF = 2ND$. Be to, $ND = x$ ir

$$NF = LF - LN = EF/2 - x/2 = 1 - x/2.$$

Sudarome lygtį ir randame x:

$$1 - \frac{x}{2} = 2x, \quad \frac{5}{2}x = 1, \quad x = \frac{2}{5}.$$

25. (**D**) 69

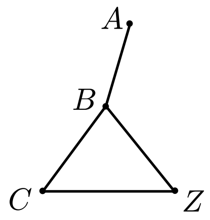
! Žr. panašaus Junioro 25 uždavinio sprendimą, kurio **?** dalyje paaiškinta, kodėl verta dauginti skaičius, vengiant dalumo iš 3.

Nuo 1 iki 99 yra $99 : 3 = 33$ skaičiai, dalūs iš 3, ir $99 - 33 = 66$ skaičiai, nedalūs iš 3. Be to, skaičius 100 nedalus iš 3. Visus 67 skaičius, nedalius iš 3, sudauginkime. Sandauga dalijasi iš 2, bet ne iš $2 \cdot 3$. Ją dar galime padauginti iš 68-o ir 69-o skaičių 3 bei 6 ir gausime sandaugą, dalią iš $2 \cdot 3 \cdot 3$, bet ne iš $2 \cdot 3^3 = 54$. Mums dar liko nepanaudotų skaičių, bet jie visi dalūs iš 3, tad papildomai padauginus sandaugą iš bet kurio tokio skaičiaus, joje atsirastų dar vienas daugiklis 3, ir ji jau dalytųsi iš $2 \cdot 3^3$. Taip būti negali, tad apsistokime ties 69 skaičiais.

Įrodykime, kad imant daugiau nei 69 skaičius jų sandauga visada dalysis iš 54. Imkime bet kuriuos skirtingus 70 natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 100. Jau nustatėme, kad daugiausiai 67 iš tų skaičių nesidalija iš 3. Tad bent $70 - 67 = 3$ skaičiai dalijasi iš 3. Visų skaičių sandauga dalijasi iš $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Be to, nuo 1 iki 100 yra tik 50 nelyginių skaičių, todėl tarp 70 skaičių tikrai yra lyginių ir jų sandauga dalijasi iš 2. Taigi sandauga dalijasi iš $27 \cdot 2 = 54$.

26. (A) 10

! Prisiminkime, kad k-kampio kampų suma lygi $(k-2)\cdot 180^\circ$, o taisyklingojo k-kampio kampai lygūs, todėl kiekvienas iš jų lygus $\frac{k-2}{k}\cdot 180^\circ$. Nagrinėkime pilnąjį ($360^\circ$) kampą su viršūne B, kurį sudaro 3 kampai (žr. pav): $\angle ABC$, $\angle ABZ$ ir $\angle CBZ$.



Du iš jų yra duotųjų daugiakampių kampai:

$$\angle ABC = \frac{15-2}{15}\cdot 180^\circ = \frac{13}{15}\cdot 180^\circ \quad \text{ir} \quad \angle ABZ = \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ.$$

Kadangi $BC = AB = BZ = CZ = 1$, tai trikampis BCZ lygiakraštis ir $\angle CBZ = 60^\circ$.

Mes, tiesa, turėtume nagrinėti du atvejus: kai atkarpa AB yra šio smailiojo kampo CBZ viduje ir kai išorėje. Tačiau pirmuoju atveju turėtume $\angle ABC + \angle ABZ = 60^\circ$, o juk $\angle ABC = \frac{13}{15}\cdot 180^\circ > 60^\circ$. Todėl turime antrąjį atvejį ir

$$360^\circ = \angle ABC + \angle ABZ + \angle CBZ = \frac{13}{15}\cdot 180^\circ + \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ + 60^\circ.$$

Iš gautos lygybės belieka išsireikšti n. Kad būtų paprasčiau skaičiuoti, padalykime ją iš 60°:

$$6 = \frac{13}{15}\cdot 3 + \frac{n-2}{n}\cdot 3 + 1, \quad 6 = \frac{13}{5} + \frac{3n-6}{n} + 1$$

$$\frac{3n-6}{n} = \frac{12}{5}, \quad \frac{n-2}{n} = \frac{4}{5}, \quad 5(n-2) = 4n, \quad n = 10.$$

Taigi kitas daugiakampis yra dešimtkampis.

27. (C) 2

! Tai, kad $n = 1$, 2, 5 arba 10, įrodyta Junioro 27 uždavinio sprendimo pirmoje dalyje. Išnagrinėkime visus 4 atvejus:

1) $n = 1$. Gauname $2014 + m = 1024 + 1 = 1025$ ir $m = 1025 - 2014 < 0$. Šiuo atveju sprendinių nėra.

2) $n = 2$. Gauname $\sqrt{2014+m} = \sqrt{1024}+1 = 32+1 = 33$ ir $2014+m = 33^2 < 40^2 = 1600$. Todėl $m < 1600 - 2014 < 0$. Sprendinių ir vėl nėra.

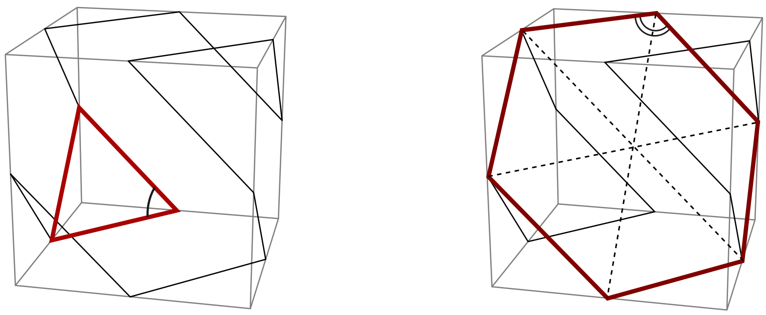
3) $n = 5$. Gauname $\sqrt[5]{2014+m} = \sqrt[5]{1024}+1 = \sqrt[5]{2^{10}}+1 = 2^2+1 = 5$ ir $2014+m = 5^5 = 3125$. Todėl $m = 3125 - 2014 = 1111$ (ir $k = 5$).

4) $n = 10$. Gauname $\sqrt[10]{2014+m} = \sqrt[10]{1024}+1 = \sqrt[10]{2^{10}}+1 = 2+1 = 3$ ir $2014+m = 3^{10} = (3^4)^2\cdot 3^2 = 81^2\cdot 9 > 80^2 = 6400$. Todėl $m = 3^{10} - 2014 > 6400 - 2014 > 1111$ (ir $k = 3$).

Gavome dvi skaičiaus m reikšmes $m = 1111$ ir $m = 3^{10} - 2014$.

28. (B) 1080°

? Brėžinyje nesunku pastebėti lygiakraščius trikampius ir taisyklinguosius šešiakampius, gaunamus papildomai sujungus kai kurias daugiakampio viršūnių poras (žr. pav.).



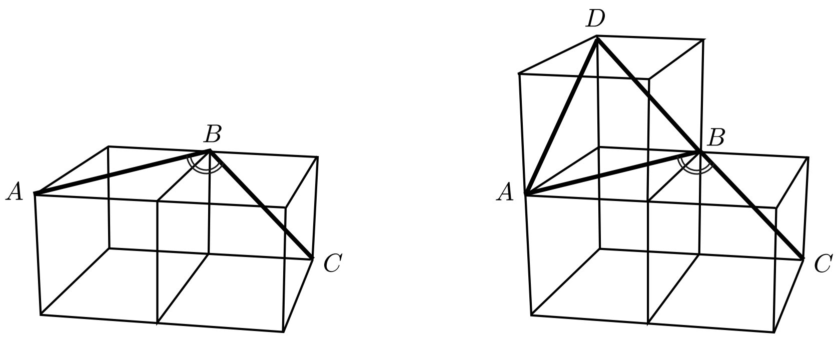
Pažymėtas lygiakraščio trikampio kampas, kuris yra ir mūsų daugiakampio kampas, lygus 60°. Taisyklingąjį šešiakampį punktyrinės linijos dalija į 6 trikampius, kaip nesunku nuspėti, taip pat lygiakraščius. Tad pažymėtas šešiakampio kampas, kuris vėlgi yra mūsų daugiakampio kampas, lygus $60° + 60° = 120°$.

Kas antram duotojo daugiakampio kampui galima priskirti po tokį lygiakraštį trikampį, ir kas antram – po tokį šešiakampį. Daugiakampis turi 12 viršūnių (tai 12 kubo briaunų vidurio taškai). Tad jis turi po 6 vienokius ir 6 kitokius kampus, o jo kampų suma lygi $6 \cdot 60° + 6 \cdot 120° = 1080°$.

! Kodėl du pažymėti kampai tikrai yra tokie, kokiais juos palaikėme? Likusius 10 kampų galima nustatyti analogiškai.

Visų pirma atkarpos, jungiančios vienodų kvadratinių kubo sienų kraštinių vidurio taškus, yra lygios (jei kubo briaunos ilgis yra $2a$, tai jos lygios po $\sqrt{2}a$). Todėl mūsų nagrinėtas trikampis išties lygiakraštis ir jo kampas lygus 60°.

Tačiau šešiakampio kampams rasti vien kraštinių lygybės neužtenka (be to, net neįrodėme, kad tos kraštinės yra vienoje plokštumoje). Šešiakampio nagrinėti ir nebūtina. Jei kubą pjūviais, einančiais per briaunų vidurio taškus, padalysime į 2×2 lygių kubelių, tai mums užtenka nagrinėti du kubelius ir jų sienų įstrižainių sudaromą kampą ABC (žr. pav.).



Pridėkime dar vieną tokį patį kubelį ir vieną jo viršūnę pažymėkime D. Aišku, kad taškai C, B, D yra vienoje tiesėje ir todėl $\angle ABC = 180° - \angle ABD$. Savo ruožtu trikampio ABD kraštinės yra vienodų kvadratų įstrižainės ir todėl lygios, t. y. šis trikampis yra lygiakraštis. Vadinasi, $\angle ABD = 60°$ ir $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$.

29. (D) 2013!

? Iš eilės ieškokime funkcijos reikšmių ir stenkimės pastebėti dėsningumą.

$$4 \cdot 6 = 4f(4) = 1 \cdot f(5), \quad f(5) = 24,$$

$$5 \cdot 24 = 5f(5) = 2f(6), \quad f(6) = 5 \cdot 12,$$

$$6 \cdot 5 \cdot 12 = 6f(6) = 3f(7), \quad f(7) = 6 \cdot 5 \cdot 4,$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 7f(7) = 4f(8), \quad f(8) = 7 \cdot 6 \cdot 5,$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8f(8) = 5f(9), \quad f(9) = 8 \cdot 7 \cdot 6.$$

Jau priešpaskutinėje eilutėje ypač aiškiai matyti, kaip sandaugoje $f(7) = 6 \cdot 5 \cdot 4$ mažiausias dauginamasis 4 pakeičiamas dauginamuoju 7 ir gaunama reikšmė $f(8) = 7 \cdot 6 \cdot 5$. Dėsningumas čia yra tas, kad turėdami reikšmę $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, kuri lygi trijų gretimų natūraliųjų skaičių sandaugai, iš jos tolimesniu žingsniu vėl gauname tokio paties pavidalo sandaugą, kurioje visi skaičiai padidėja 1: $f(x+1) = x(x-1)(x-2)$. Taip yra, nes pradinę sandaugą padalijame iš $x-3$ ir padauginame iš x (būtent tokie du daugikliai yra lygybėje $xf(x) = (x-3)f(x+1)$).

Spėkime, kad $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Daug netruks patikrinti, kad ši funkcija išties tenkina dvi duotąsias lygybes. Belieka įsistatyti konkrečias funkcijos reikšmes į sandaugą:

$$f(4)f(7)f(10)\ldots f(2011)f(2014) = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (2013 \cdot 2012 \cdot 2011) =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 = 2013!.$$

! Viena iš duotųjų lygybių parodo, kam lygus funkcijos reikšmių $f(x)$ ir $f(x+1)$ santykis. Bet prašoma rasti tam tikrų reikšmių sandaugą. Kad ir kaip reikšimės vienas reikšmes per kitas, viena su kita duotoje sandaugoje jos nesiprastins. Todėl turime rasti ar bent atspėti, kam gi lygios sandaugoje panaudotos funkcijos reikšmės $f(4), f(7)$ ir t. t. Kad rastume daugybę reikšmių, turime ieškoti dėsningumų, galiojančių joms visoms.

Sandaugoje funkcijos argumentas didėja po 3 vienetus, o duotoji lygybė susieja gretimas funkcijos argumento reikšmes x ir $x+1$. Susiekime argumento reikšmes x ir $x+3$. Išreikškime $f(x+3)$ per $f(x+2)$, tada $f(x+2)$ per $f(x+1)$, ir t. t. Mums rūpi funkcijos $f(x)$ reikšmės, kai $x > 3$. Reiškiniai, iš kurių dalysime, įgyja tik teigiamas reikšmes, kai $x > 3$. Todėl toliau visur laikykime, kad taip ir yra (taip galėsime nesirūpinti dėl dalybos iš 0 pavojaus).

$$f(x+1) = \frac{x}{x-3} f(x),$$

$$f(x+3) = \frac{x+2}{x-1} f(x+2) = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x-2} f(x+1) = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x}{x-3} f(x),$$

$$f(x+3) : f(x) = (x+2)(x+1)x : (x-1)(x-2)(x-3).$$

Taigi $f(7) : f(4) = (6 \cdot 5 \cdot 4) : (3 \cdot 2 \cdot 1)$, $f(10) : f(7) = (9 \cdot 8 \cdot 7) : (6 \cdot 5 \cdot 4)$ ir t. t. Dėsningumą pastebėti nesunku. Kiekvieną reikšmę $f(x)$ atitinka trijų gretimų natūraliųjų skaičių, iš kurių didžiausias yra $x - 1$, sandauga. Šiuos santykius galime sujungti į vieną eilę:

$$f(2014) : f(2011) : f(2008) : \ldots : f(4) =$$

$$= (2013 \cdot 2012 \cdot 2011) : (2010 \cdot 2009 \cdot 2008) : (2007 \cdot 2006 \cdot 2005) : \ldots : (3 \cdot 2 \cdot 1).$$

Tai reiškia, kad egzistuoja toks skaičius a, kad

$$f(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a, \quad f(7) = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot a, \quad \ldots, \quad f(2014) = 2013 \cdot 2012 \cdot 2011 \cdot a.$$

Norint rasti a, tereikia prisiminti dar vieną nepanaudotą lygybę: $6 = f(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a = 6a$, tad $a = 6/6 = 1$. Pagaliau randame duotąją sandaugą

$$f(4)f(7)f(10)\ldots f(2011)f(2014) = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (2013 \cdot 2012 \cdot 2011) =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 = 2013!.$$

30. D 23

! Uždavinį padės išspręsti keli pradiniai pastebėjimai.

Kol saloje yra bent dviejų rūšių gyvūnų, vieni galės ėsti kitus. Todėl saloje liko tik vienos rūšies gyvūnų.

Savaime iškyla klausimas, kurių gyvūnų galėjo likti daugiausiai – ožių, vilkų ar liūtų. O ar išvis galėjo likti tik ožiai? Tik vilkai ar tik liūtai? Įsigilinkime, kas vyksta su gyvūnų skaičiumi, kai jie vienas kitą ėda. Jei vilkas suėda ožį, tai vilkų ir ožių skaičiai sumažėja vienetu, o liūtų padidėja vienetu. Panašiai yra ir kitais dviem atvejais: du skirtingų rūšių gyvūnai (plėšrūnas ir jo auka) prapuola, o atsiranda vienas trečios rūšies gyvūnas. Iš trijų skaičių (kiek saloje yra ožių, vilkų ir liūtų) du sumažėja vienetu ir vienas padidėja vienetu. Taip bendras gyvūnų skaičius sumažėja $1 + 1 - 1 = 1$. (Tai, beje, parodo, kad kaip gyvūnai beėstų vienas kitą, šis procesas negali tęstis be galo – jų vis mažėja ir neišvengiamai susidaro situacija, kai saloje lieka tik vienos rūšies gyvūnai.) Tačiau dar svarbiau atkreipti dėmesį, kaip kinta trijų skaičių lyginumas. Nesvarbu, ar prie lyginio skaičiaus pridėsime, ar iš jo atimsime 1, jis vis tiek taps nelyginis. Taip pat ir nelyginis skaičius taps lyginis. Pradžioje turime du nelyginius skaičius ir vieną lyginį (17, 55, 6). Po pirmojo karto, kai buvo suėstas gyvūnas, turime du lyginius skaičius ir vieną nelyginį. Tada vėl du nelyginius ir lyginį, ir t. t. Du skaičiai (kiek yra ožių ir kiek vilkų) yra to paties lyginumo, o liūtų skaičiaus lyginumas kitoks. Pabaigoje du skaičiai lygūs 0. Du lyginiai skaičiai tegali žymėti, kiek saloje liko ožių ir vilkų. Taigi saloje liko vien liūtai, ir niekaip kitaip būti negali.

Kai liūtas ką nors suėda, liūtų skaičius sumažėja, ir tik kai vilkas suėda ožį, tas skačius padidėja. Taigi saloje likusių liūtų skaičius tuo didesnis, kuo dažniau vilkai ėdė ožius ir kuo rečiau liūtai ėdė kitus gyvūnus. Jei ožių ir vilkų būtų po lygiai, tai galėtume tarti, kad liūtai apskritai nieko neėdė, o kiekvienas vilkas suėdė po ožį bei virto liūtu. Likusių liūtų skaičius turėtų būti maksimalus būtent po tokių įvykių.

Nors vilkų yra daugiau nei ožių, bandykime „apgraibomis” sukonstruoti situaciją, kurioje liūtai nieko neėda, kol tai įmanoma. Gal taip jų liks daugiausiai? Tarkime, kad 17 vilkų suėdė po ožį. Ožių neliko, vilkų liko $55 - 17 = 38$, o liūtų skaičius išaugo iki $6 + 17 = 23$. Dabar jau liūtai turi ėsti vilkus ir ožių vėl atsiras. Bet juos ir vėl galės suėsti vilkai, virsdami liūtais. Natūralu stengtis, kad šis procesas tęstųsi kuo trumpiau. Juk kiekvieną kartą mažėja bendras gyvūnų skaičius, o drauge su juo didžiausias galimas saloje proceso pabaigoje likusių liūtų skaičius. Procesas greitai užsibaigs, jei vilkų ir ožių bus po lygiai.

Taigi tarkime, kad liūtai suėdė pusę vilkų. T. y. $38 : 2 = 19$ liūtų suėdė po vilką. Tada turime 19 ožių, 19 vilkų ir $23 - 19 = 4$ liūtus. Pagaliau tarkime, kad vėliau 19 vilkų suėdė po ožį. Taip ožių ir vilkų nelieka, o galutinis liūtų skaičius vėl tampa $4 + 19 = 23$.

Visgi negalime būti tikri, kad tai didžiausias galimas likusių liūtų skaičius. O ir tarp atsakymų yra dar didesnis už 23 skaičius 35. Norint paprastai įrodyti, kad daugiau nei 23 liūtų negalime gauti, reikia pažvelgti į uždavinį kiek kitu kampu.

Saloje buvo $17 + 55 + 6 = 78$ gyvūnai. Suėdus vieną gyvūną bendras gyvūnų skaičius sumažėdavo 1. Jei saloje liko n gyvūnų, tai suėsta buvo $78 - n$ gyvūnų. Taigi klausti, kiek daugiausiai gyvūnų galėjo likti, yra tas pats, kaip klausti, kiek mažiausiai gyvūnų galėjo būti suėsta. O atsakymas į šį klausimą – tiesiai prieš mūsų akis. Turi nelikti vilkų ir ožių, tad visi 17 ožių turi būti suėsti ir visi 55 vilkai arba suėsti, arba patys suėdę po ožį. Šių skaičių nereikia sudėti, nes vilkas ir ožys gali pradingti vienu metu, bet neabejotinai gyvūnas buvo suėstas ne mažiau nei 55 kartus, kitaip ne visi vilkai būtų suėsti arba pradingtų suėdę ožį. Vadinasi, $78 - n \geq 55$ ir $n \leq 23$ – daugiau liūtų negalėjo likti.

Pabaigai pastebėkime, kad $n = 23$ gausime, kai bus suėstas minimalus gyvūnų skaičius 55. Kad tokiu būdu neliktų vilkų, po kiekvieno suėdimo vilkų skaičius privalo sumažėti, t. y. arba vilkas turi suėsti ožį, arba liūtas vilką. Jei tik bent kartą liūtas suės ožį, tai vilkų skaičius bent kartą nesumažės (ir net padidės), o tada kad neliktų 55 vilkų, prireiks daugiau nei 55 suėdimų ir liūtų liks mažiau nei $78 - 55$. Taigi jei bandytume konstruoti optimalų pavyzdį neišvengdami to, kad liūtas suėda ožį, tai niekaip negautume teisingo atsakymo.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	C
2	C
3	B
4	C
5	E
6	B
7	E
8	B
9	E
10	C
11	A
12	B
13	B
14	C
15	D
16	D
17	A
18	B
19	A
20	C
21	E
22	D
23	E
24	A
25	D
26	A
27	C
28	B
29	D
30	D