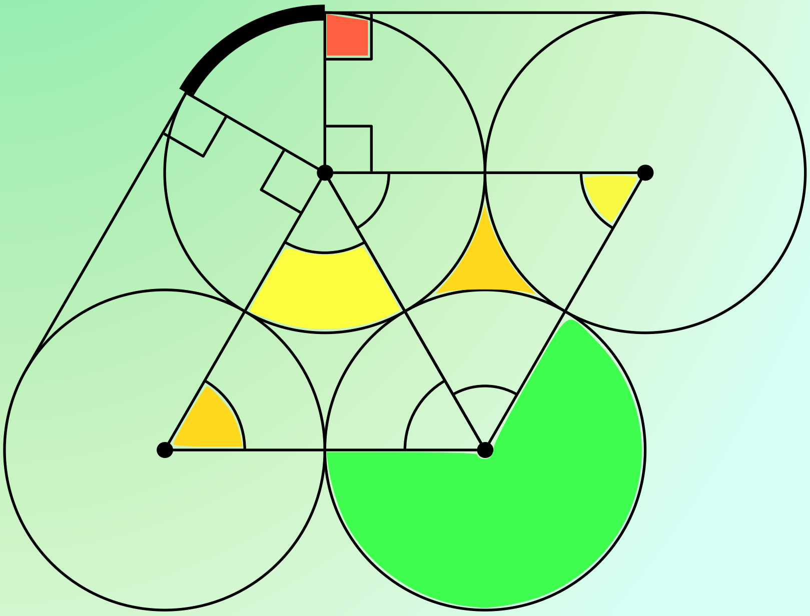
Kengūra

JUNIORAS



Užduotys ir sprendimai

2016

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. JUNIORAS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 49000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikos draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 17 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐
17	☐	☐	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐
22	☐	☐	☐	☐	☐
23	☐	☐	☐	☐	☐
24	☐	☐	☐	☐	☐
25	☐	☐	☐	☐	☐
26	☐	☐	☐	☐	☐
27	☐	☐	☐	☐	☐
28	☐	☐	☐	☐	☐
29	☐	☐	☐	☐	☐
30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2016 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Keturių skaičių aritmetinis vidurkis lygus 9. Koks yra ketvirtasis skaičius, jei pirmieji trys lygūs 5, 9 ir 12?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 36

2. Kokia yra apytikslė reiškinio $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 20{,}16}{999}$ reikšmė?
A) 0,01 **B)** 0,1 **C)** 1 **D)** 10 **E)** 100

3. Rūta atsakė į kiekvieną iš 30 testo klausimų, bet dalis atsakymų buvo klaidingi. Teisingų atsakymų skaičius buvo 50% didesnis už klaidingų atsakymų skaičių. Į kelis klausimus Rūta atsakė teisingai?
A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

4. Keturi iš atsakymuose nurodytų taškų yra vieno kvadrato viršūnės. Kuris taškas nėra viršūnė?
A) $(-1;-3)$ **B)** $(0;-4)$ **C)** $(-2;-1)$ **D)** $(1;1)$ **E)** $(3;-2)$

5. Natūralusis skaičius x dalijasi iš 6 su liekana 3. Su kokia liekana iš 6 dalijasi skaičius $3x$?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

6. Kelios savaitės trunka 2016 valandų?
A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

7. Lukas, dar neišmokęs rašyti neigiamųjų skaičių su minusu priekyje, sugalvojo savo žymėjimo būdą. Sveikuosius skaičius mažėjimo tvarka jis rašo taip: $\ldots$, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, $\ldots$. Kaip Lukas užrašytų sumos $000 + 0000$ rezultatą?
A) 1 **B)** 00000 **C)** 000000 **D)** 0000000 **E)** 00000000

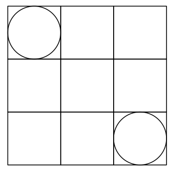
8. Lošimo kauliuko sienose pažymėti skaičiai 2, 4, 6, -1, -3, -5. Kokios sumos neįmanoma gauti, paridenus šį kauliuką du kartus?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

9. Vienu ėjimu leidžiama sukeisti dvi gretimas žodžio raides. Kiek mažiausiai ėjimų reikia, norint iš žodžio VELO gauti žodį LOVE ?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

10. Julius užrašė penkis skirtingus nenulinius skaitmenis ir pastebėjo, kad jokių dviejų skaitmenų suma nėra lygi 10. Kuris skaitmuo neabejotinai yra vienas iš Juliaus užrašytųjų?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

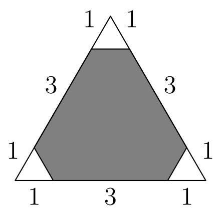
Klausimai po 4 taškus

11. Duotos lygybės $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. Kuris iš skaičių a, b, c, d didžiausias?
A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** Neįmanoma nustatyti



12. Lentelę 3×3 sudaro 9 vienetiniai langeliai, į du iš jų įbrėžta po apskritimą (žr. pav.). Koks yra atstumas tarp apskritimų?
A) $2\sqrt{2} - 1$ **B)** $\sqrt{2} + 1$ **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** 2 **E)** 3

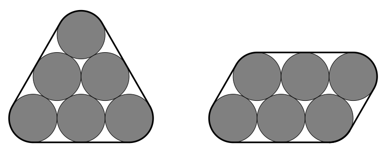
13. Aštuonios merginos teniso turnyre sužaidė keturis ketvirtfinalinius mačus. Keturios laimėtojos sužaidė du pusfinalinius mačus, o dvi pusfinalių laimėtojos sužaidė finalą. Mačų rezultatai (nebūtinai nurodyta tvarka) yra tokie: Bronė nugalėjo Agnę, Chloja nugalėjo Dainą, Gustė nugalėjo Haną, Gustė nugalėjo Chloją, Chloja nugalėjo Bronę ir Elzė nugalėjo Florą. Koks septintojo mačo rezultatas?
A) Gustė nugalėjo Bronę **B)** Chloja nugalėjo Agnę **C)** Elzė nugalėjo Chloją
D) Bronė nugalėjo Haną **E)** Gustė nugalėjo Elzę



14. Kokia pavaizduoto trikampio ploto dalis nudažyta?
A) 80% **B)** 85% **C)** 88% **D)** 90% **E)** Neįmanoma nustatyti

15. Marius kuria magiškąjį daugybos kvadratą. Jis turi panaudoti visus skaičius 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 ir 100, du iš jų jau įrašė (žr. pav.) Skaičių sandaugos visose eilutėse, stulpeliuose ir abiejose įstrižainėse turi būti vienodos. Kokį skaičių reikia įrašyti vietoj x?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 10 **E)** 25

20	1	
		$\boxed{x}$

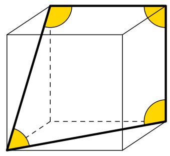


16. Meistras nori viela apjuosti šešis 2 cm skersmens vamzdelius. Jam reikia pasirinkti vieną iš dviejų būdų (žr. pav.). Kam lygus vielos kairiajame paveikslėlyje ilgio ir vielos dešiniajame paveikslėlyje ilgio skirtumas (centimetrais)?
A) $-\pi$ **B)** -4 **C)** π **D)** 4 **E)** 0

17. Ant stalo guli aštuoni lapeliai su užrašytais skaičiais 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ir 128. Ieva paėmė kelis lapelius, o likusius atidavė Aliui. Norint gauti Ievos skaičių sumą, prie Aliaus skaičių sumos reikia dar pridėti 31. Kiek lapelių turi Ieva?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

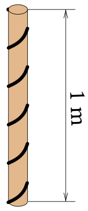
18. Petras nori nuspalvinti 3×3 lentelės visus langelius taip, kad bet kurie langeliai, esantys vienoje eilutėje, viename stulpelyje arba vienoje iš dviejų įstrižainių, būtų skirtingų spalvų. Kiek mažiausiai spalvų prireiks Petrui?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

19. Paveikslėlyje pavaizduotas kubas. Kokia yra pažymėtų keturių kampų suma?
A) 315° **B)** 330° **C)** 345° **D)** 360° **E)** 375°



20. Kengūrų respublikoje gyvena 2016 kengūrų. Vienos iš jų rudos, kitos pilkos (kiekvienos spalvos kengūrų yra bent po vieną). Kiekviena kengūra apskaičiavo kitos spalvos nei ji pati kengūrų skaičiaus ir tos pačios spalvos kaip ji kengūrų (įskaitant ją pačią) skaičiaus santykį. Kokia yra visų 2016 trupmenų suma?
A) 2016 **B)** 1344 **C)** 1008 **D)** 672 **E)** Neįmanoma nustatyti

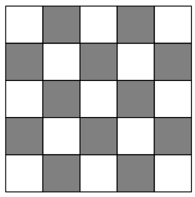
Klausimai po 5 taškus



21. Vijoklis augdamas lygiai penkis kartus apsivijo aplink statų apskritą stulpą (žr. pav.). Stulpo aukštis yra 1 m, o pagrindo perimetras lygus 15 cm. Vijoklis augdamas kilo aukštyn tolygiai. Koks yra vijoklio ilgis?
A) 0,75 m **B)** 1 m **C)** 1,25 m **D)** 1,5 m **E)** 1,75 m

22. Kokią didžiausią liekaną galima gauti, dviženklį natūralųjį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sumos?
A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

23. Kvadratą 5×5 sudaro 25 balti langeliai. Vienu ėjimu leidžiama pakeisti bet kurių dviejų gretimų (bendrą kraštinę turinčių) langelių spalvą: balti langeliai spalvinami juodai, o juodi – baltai. Kiek mažiausiai ėjimų reikia, norint gauti kvadratą, pavaizduotą paveikslėlyje?
A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



24. Motorinė valtis upe pasroviui iš X į Y plaukia 4 valandas, o atgal prieš srovę iš Y į X ji plaukia 6 valandas. Per kiek laiko iš X į Y nuplauktų srovės nešamas rąstas?
A) 5 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 24

25. Kengūrų respublikoje kiekvieną mėnesį sudaro 40 dienų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 40. Diena yra šventadienis, jei jos numeris dalijasi iš 6 arba yra pirminis skaičius. Kiek kartų per Kengūrų mėnesį tarp dviejų šventadienių dirbama lygiai vieną dieną?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

26. Trikampio dviejų aukštinių ilgiai yra 10 ir 11. Kuris skaičius negali būti trečiosios aukštinės ilgis?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 10 **E)** 100

27. Jokūbas užrašė keturis iš eilės einančius natūraliuosius skaičius. Tada jis apskaičiavo keturias sumas, imdamas po tris iš užrašytųjų skaičių. Nė viena iš sumų nėra pirminis skaičius. Kokį mažiausią skaičių galėjo užrašyti Jokūbas?
A) 12 **B)** 10 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 3

28. Papietauti už apskrito stalo susėdo keturi sportininkai, vyrai ir moterys: čiuožėjas, slidininkas, ledo ritulininkas ir snieglentininkas. Slidininkas sėdėjo Aušrai iš kairės. Čiuožėjas sėdėjo priešais Beną. Ema ir Fredas sėdėjo greta. Ledo ritulininkui iš kairės sėdėjo moteris. Kokiu sportu užsiima Ema?
A) Čiuožimas **B)** Slidinėjimas **C)** Ledo ritulys **D)** Snieglenčių sportas
E) Neįmanoma nustatyti

29. Šios dienos data yra 2016-03-17. Datą MMMM-mm-dd vadinsime stulbinančia, jei visi 8 ją sudarantys skaitmenys skirtingi. Koks bus mėnuo, kai sulauksime artimiausios stulbinančios datos?
A) Kovas **B)** Birželis **C)** Liepa **D)** Rugpjūtis **E)** Gruodis

30. Kengūrų respublikoje gyvena 2016 kengūrų, sunumeruotų nuo K1 iki K2016. Vieną dieną kiekviena kengūra nuo K1 iki K2015 susidaužė kaktomis su tiek kengūrų, koks yra jos numeris. Su keliomis bendrapilietėmis tą dieną susidaužė K2016?
A) 1 **B)** 504 **C)** 672 **D)** 1008 **E)** 2015

Junioro užduočių sprendimai

1. (D) 10

! Ieškomas skaičius x turi tenkinti lygybę $(x+5+9+12)/4 = 9$. Taigi $x + 26 = 9 \cdot 4 = 36$ ir $x = 10$.

2. (B) 0,1

! Verta pastebėti, kad $17 \cdot 0{,}3 = 17 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 51 \cdot 0{,}1 = 5{,}1 \approx 5$. Kitus skaičius suapvalinkime, prieš atlikdami su jais veiksmus:

$$\frac{(17 \cdot 0{,}3) \cdot 20{,}16}{999} \approx \frac{5 \cdot 20}{1000} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Galima nujausti, kad trupmenos reikšmę apvalindami pakeitėme nedaug. Tiksli reikšmė lygi 0,102(918).

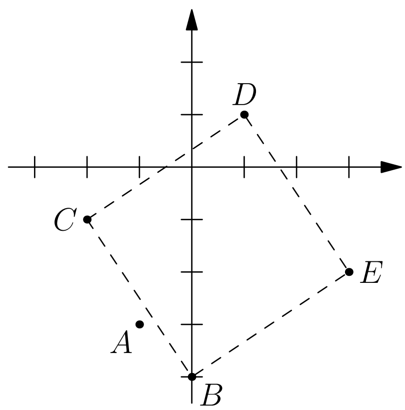
3. (D) 18

? Akivaizdu, kad teisingų atsakymų buvo daugiau nei klaidingų, taigi daugiau nei pusė. Lieka variantai **D** ir **E**. Skaičius 20 yra 100%, o ne 50% didesnis už skaičių $30 - 20 = 10$, todėl netinka. Renkamės atsakymą **D**.

! Jei Rūta klaidingai atsakė į a klausimų, tai teisingų atsakymų buvo a ir dar 50% nuo a, taigi iš viso $a + 0{,}5a = 1{,}5a$. Tada $30 = 1{,}5a + a = 2{,}5a \implies 60 = 5a \implies a = 60 : 5 = 12$. Rūta teisingai atsakė į $30 - 12 = 18$ klausimų.

4. (A) $(-1; -3)$

? Norint gauti atsakymą, pakaktų kuo tiksliau pavaizduoti 5 duotus taškus koordinačių plokštumoje ir įžiūrėti, kurių keturių taškų aibė turi net keturias simetrijos ašis (žr. pav.). Klaidinti gali taškų A ir B tarpusavio artumas. Kuris iš jų yra ketvirtoji viršūnė? Pastebėkime, kad taškas E yra per 2 į dešinę ir per 3 į apačią nuo taško D. Dėl kvadrato simetriškumo ketvirtoji viršūnė tiek pat nutolusi nuo C. Gauname tašką $(-2+2; -1-3) = B$. Renkamės atsakymą **A**.



! Keturkampis $BCDE$ (žr. **?** dalies paveikslėlį) yra kvadratas, nes jo visos kraštinės lygios (jų ilgis yra $\sqrt{13}$), o gretimos kraštinės statmenos (tai galima įrodyti, pasinaudojant vektorių skaliarine sandauga). Kadangi bet kurios trys viršūnės vienareikšmiškai apibrėžia kvadratą, tai vieną iš viršūnių pakeisti tašku A ir gauti kitą kvadratą nepavyks.

5. (B) 3

? Tereikia paimti bet kurią tinkamą x reikšmę, pvz., $x = 9$. Tada $3x = 27 = 6 \cdot 4 + 3$, taigi ir vėl gauname liekaną 3.

! Skaičius x turi pavidalą $x = 6y + 3$, kur y yra skaičiaus x dalybos iš 6 su liekana dalmuo. Tada $3x = 18y + 9 = 6(3y + 1) + 3$. Tai reiškia, kad dalydami $3x$ iš 6 gausime dalmenį $3y + 1$ ir liekaną 3.

6. (D) 12

? Ieškomą skaičių pažymėkime x. Paroje yra 24 valandos, o savaitėje – 7 paros. Todėl x savaičių yra $7x$ parų ir $24 \cdot 7x = 2016$ valandų. Dalybos kampu galima išvengti, nagrinėjant paskutinį skaitmenį vietoj viso skaičiaus: skaičius $24 \cdot 7x$ turi baigtis skaitmeniu 6, todėl juo baigiasi ir skaičiai $4 \cdot 7x = 28x$ bei $8x$. Taigi x negali baigtis skaitmeniu 6, 8 ar 0. Lieka atsakymas **D**.

! $x = 2016 : (24 \cdot 7) = 12$.

7. (C) 000000

! Turime $000 + 0000 = (-2) + (-3) = -5$. Pastebėkime dėsningumą: 2 nuliai žymi skaičių -1, tada 3 nuliai žymi -2, 4 nuliai žymi -3, ir t. t. Taigi skaičių $-n$ žymi $n + 1$ nulis. Todėl skaičių -5 žymi 6 nuliai 000000.

8. (D) 7

? Nesunku atmesti klaidingus atsakymus: $3 = 4 + (-1)$, $4 = 2 + 2$, $5 = 6 + (-1)$, $8 = 4 + 4$. Lieka atsakymas **D**.

! Sumos 7 negausime. Svarbu, kad ji nelyginė ir todėl iškritęs akučių skaičius vieną kartą turėtų būti lyginis (todėl teigiamas), o kitą kartą nelyginis (todėl neigiamas). Didžiausia galima tokia suma lygi $6 + (-1) < 7$.

9. (B) 4

! Kaitaliojant raides svarbu suvokti, kad neapsimoka keisti vietomis raidžių, kurios jau surikiuotos teisinga tvarka (L ir O, V ir E). Tada pavyksta apsieiti 4 ėjimais: VELO, VLEO, LVEO, LVOE, LOVE.

Nors tai nesunku numanyti, įrodykime, kad mažiau ėjimų neužteks. Kad raidės L ir O žodyje VELO nukeliautų į savo vietas žodyje LOVE, reikia bent 2 kartus perkelti per vieną poziciją į kairę kiekvieną iš jų. Gauname bent $2 + 2 = 4$ ėjimus, kai šios raidės keliamos į kairę. Jokie du iš jų nesutampa: vienu ėjimu perkelti dviejų raidžių į kairę neįmanoma, nes ėjimo metu viena raidė perkeliama į kairę, o kita į dešinę.

10. (**E**) 5

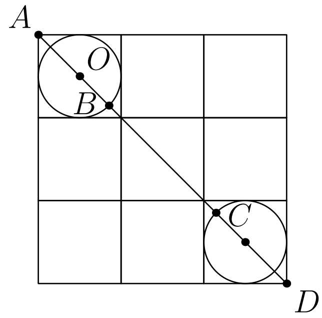
! Nagrinėkime poras skirtingų nenulinių skaitmenų, kurių sumos lygios 10: 1 ir 9, 2 ir 8, 3 ir 7, 4 ir 6. Uždavinio sąlygą galime suformuluoti kitaip: Julius užrašė penkis skirtingus nenulinius skaitmenis, daugiausiai po vieną skaitmenį iš kiekvienos poros. Porų yra tik keturios, todėl vienas iš penkių Juliaus skaitmenų nepriklauso nė vienai porai ir neabejotinai lygus 5. (Likusius keturis skaitmenis tenka rinktis po vieną iš poros ir joks iš jų neprivalo būti tarp Juliaus užrašytųjų: vietoj 1 galime imti 9, o vietoj 9 imti 1, ir t. t.)

11. (**D**) d

! Spėjant galimą a reikšmę, lengva gauti kitas. Pvz., kai $a = 0$, tai tinka $b = \sqrt{6} < 3, c = \sqrt{2} < 2$, $d = 9$. Taigi teisingas vienas iš atsakymų **D** ir **E**. Norint atmesti **E**, reikia įrodyti nelygybes $d > a$, $d > b$, $d > c$ (t. y. kad jos galioja ne vienu atveju, o visais).

Kadangi $d = a + 9 = b^2 + 3 = c^2 + 7$, tai $d > a$, $d > b^2$, $d > c^2$, $d \geqslant 7$. Jei $b \geqslant 1$ arba $b \leqslant 0$, tai $d > b^2 \geqslant b$. O jei $0 < b < 1$, tai $d \geqslant 7 > 1 > b$. Analogiškai $d > c$.

12. (**A**) $2\sqrt{2} - 1$



! Atstumas nuo vienos geometrinės figūros iki kitos apibrėžiamas kaip trumpiausios atkarpos, jungiančios figūrų taškus, ilgis. Trumpiausia atkarpa, kurios galai priklauso dviems nesikertantiems apskritimams, visada yra tiesėje, einančioje per apskritimų centrus. Mūsų atveju tai lentelės įstrižainės AD, einančios per apskritimų centrus, dalis BC (žr. pav.).

Apskritimų skersmuo lygus langelio kraštinės ilgiui 1, langelio įstrižainės ilgis yra $\sqrt{2}$, o visos lentelės įstrižainės – $AD = 3\sqrt{2}$. Atkarpai AB priklauso tiek apskritimo, tiek langelio centras O, dalijantis ją į atkarpas AO ir OB. Atkarpa AO sudaro pusę langelio įstrižainės, o apskritimo spindulys OB lygus pusei skersmens. Taigi $AB = AO+OB = \sqrt{2} : 2+1 : 2 = (\sqrt{2}+1)/2$. Analogiškai $CD = (\sqrt{2}+1)/2$. Vadinasi, ieškomas atstumas yra $BC = AD - AB - CD = 2\sqrt{2} - 1$.

13. (**E**) Gustė nugalėjo Elzę

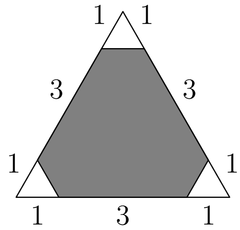
? Septynios merginos, išskyrus turnyro nugalėtoją, pralaimėjo po vieną mačą. Sąlygoje nurodytos šešios pralaimėtojos: Agnė, Daina, Hana, Chloja, Bronė, Flora. Septintojo mačo pralaimėtoja turi būti viena iš likusių dviejų merginų: Gustė arba Elzė (kita iš jų – turnyro nugalėtoja). Iš pateiktų atsakymų tinka tik **E**.

! Užbaikime **?** sprendimą, nesinaudodami pateiktais atsakymais. Be jų nustatėme, kad nugalėtoja yra Gustė arba Elzė. Remiantis sąlyga, Elzė dalyvavo daugiausiai dviejuose mačuose, todėl nugalėtoja yra Gustė. Ji laimėjo tris mačus (ketvirtfinalyje, pusfinalyje, finale), taigi be dviejų nurodytųjų sąlygoje ji laimėjo septintąjį mačą, o jo pralaimėtoja turi būti Elzė.

Pastebėkime, kad ketvirtfinaliniai mačai (A-B, C-D, E-F, G-H), pusfinaliniai mačai (B-C, E-G) ir finalas (C-G) nustatomi vienareikšmiškai.

14. (C) 88%

! Didysis trikampis ir bet kuris iš trijų baltų trikampėlių yra panašūs: pagal dvi kraštines, kurių ilgis vienu atveju yra $1+3+1=5$, o kitu atveju 1, ir kampą tarp jų. Galima būtų pasiremti trikampio ploto formule $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, bet tai nebūtina. Panašumo koeficientas yra $5:1=5$, todėl vieno trikampėlio plotas yra $5^2=25$ kartus mažesnis už didžiojo trikampio, t. y. sudaro $100\%:25=4\%$ didžiojo trikampio ploto. Tada nudažyta yra $100\%-4\%-4\%-4\%=88\%$ didžiojo trikampio ploto.



15. (B) 4

! Tegu visos nagrinėjamos sandaugos lygios p. Visų trijų eilučių skaičių sandauga lygi

$$p^3=(1\cdot100)\cdot(2\cdot50)\cdot(4\cdot25)\cdot(5\cdot20)\cdot10=100^4\cdot10=10^9 \implies p=10^3=1000.$$

20	1	y
z	t	$\boxed{x}$
u	v	w

Todėl:

1) $20\cdot1\cdot y=1000$ ir $y=50$ (žr. pav.);

2) $ytu=1\cdot tv=1000$, todėl $u=1000:(yt)=20:t$ ir $v=1000:t$;

3) kai $t<10$, tai skaičius $1000:t$ per didelis, o kai $t>20$, tai skaičius $20:t$ per mažas, reikšmė 20 jau panaudota, taigi $t=10 \implies u=2, v=100$;

4) $uvw=yxw=1000$, todėl $w=1000:(uv)=5$, $x=1000:(yw)=4$ (ir su $z=25$ gauname reikiamą lentelę).

!! Radus p ir y, galima kitaip nei ! dalyje gauti, kad $t=10$.

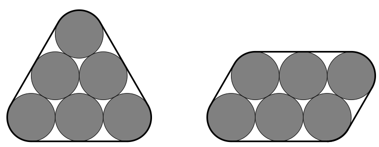
Lygias sandaugas $1\cdot tv$, ztx, $20\cdot tw$ ir ytu sudauginkime tarpusavyje:

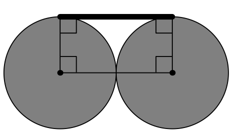
$$1000^4=(1\cdot tv)\cdot(ztx)\cdot(20\cdot tw)\cdot(ytu)=t^3\cdot(20\cdot1\cdot y)\cdot(ztx)\cdot(uvw)=t^3\cdot1000^3.$$

Tada $t^3=1000$ ir $t=10$.

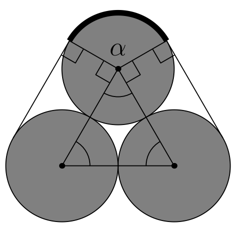
16. (E) 0

! Abiem duotais atvejais vielą galima padalyti į apskritimo lankus (kur viela prigludusi prie vamzdelio) ir tiesės atkarpas. Viela yra tarsi siūlas, maksimaliai įtemptas, kad apjuostų vamzdelius, todėl vielos atkarpos, jungiančios dviejų skirtingų apskritimų taškus, ne tik tiesios, bet ir priklauso tų apskritimų bendrai liestinei.

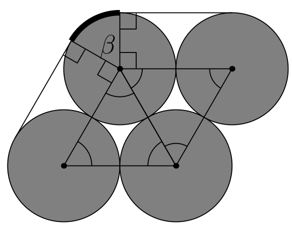




1 pav.



2 pav.



3 pav.

Kairiajame sąlygos paveikslėlyje turime šešias tokias atkarpas kaip paryškintoji 1 paveikslėlyje ir tris lankus kaip paryškintasis 2 paveikslėlyje. Dešiniajame sąlygos paveikslėlyje turime šešias tokias atkarpas kaip 1 paveikslėlyje, du lankus kaip 2 paveikslėlyje ir du lankus kaip 3 paveikslėlyje. Vienodų tiesės atkarpų yra po lygiai, todėl ieškomam skirtumui įtakos jos neturi.

Beliko išsiaiškinti su apskritimų lankais. Vienetinio apskritimo lanko ilgis lygus atitinkamam centriniam kampui (radianais).

2 paveikslėlyje trikampio kraštinės lygios, todėl jis lygiakraštis ir jo kampai lygūs $60° = \frac{\pi}{3}$. Tada pažymėtas centrinis kampas α lygus $2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$. Analogiškai $\beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ (žr. 3 pav.).

Ieškomas skirtumas lygus $3\alpha - (2\alpha + 2\beta) = \alpha - 2\beta = 0$ (cm). Beje, vien palyginus 2 ir 3 paveikslėlius, lengva pastebėti, kad $\alpha = 2\beta$. Tada ir lankų ilgio galima neskaičiuoti.

17. D 5

? Ievos skaičių sumą pažymėkime s. Tada $s+(s-31) = 1+2+4+8+16+32+64+128 = 255$ (čia galima panaudoti formulę $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$, kai $n=7$). Todėl $2s = 286$ ir $s = 143$. Kad iš skaičių lapeliuose gautume tokią sumą, atiminėkime juos iš s, stengdamiesi kuo labiau sumažinti skaičių: $s - 128 = 15$, $15 - 8 = 7$, $7 - 4 = 3$, $3 - 2 = 1$. Taigi $s = 128 + 8 + 4 + 2 + 1$ ir Ieva gali turėti 5 lapelius.

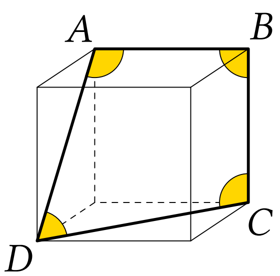
! Dalyje **?** gauta s reikšmė negalima, Ievai turint kitokį lapelių skaičių. Tai aišku, išmanant dvejetainę skaičiavimo sistemą. Skaičiai, užrašyti lapeliuose, yra dvejeto laipsniai, todėl keleto iš jų sumos dvejetainėje išraiškoje yra tiek vienetų, kiek skaičių sudedame. Skaičiaus $143 = 10001111_{(2)}$ dvejetainėje išraiškoje yra 5 vienetai, todėl Ieva turi 5 lapelius.

18. C 5

! Svarbus toks pastebėjimas: bet kurie du iš penkių langelių, esančių dviejose lentelės įstrižainėse, yra arba toje pačioje įstrižainėje, arba vienoje eilutėje, arba viename stulpelyje. Taigi visi penki langeliai turi būti skirtingų spalvų. Tai suvokus, tampa aišku, kad reikės bent penkių spalvų, o ir pavyzdį su penkiomis spalvomis sugalvoti visai nesunku (žr. pav.).

I	IV	II
II	III	I
IV	I	V

19. B $330°$



! Plokštumoje keturkampio kampų suma lygi $360°$, bet čia mes turime erdvės figūrą. Pažymėkime kubo viršūnes, kaip parodyta paveikslėlyje.

Lengviausia pastebėti, kad $\angle ABC = 90°$ (kubo briaunos AB ir BC statmenos).

Norint rasti $\angle ADC$, verta nagrinėti trikampį ACD. Jo kraštinės yra kubo sienų įstrižainės, todėl jos lygios ir trikampis yra lygiakraštis. Taigi $\angle ADC = 60°$.

Norint rasti $\angle BAD$, verta nagrinėti kubo sienos, kuriai priklauso atkarpa AD, ir atkarpos AB tarpusavio padėtį. Žinoma, briauna AB statmena kubo sienai ir plokštumai p, kuriai ši siena priklauso. Statmenai į žemę įbestas pagalys statmenas savo šešėliui, nepriklausomai nuo to, iš kurios pusės šviečia saulė. Lygiai taip pat briauna AB statmena bet kuriai tiesei ar atkarpai, esančiai plokštumoje p, įskaitant ir AD. Taigi $\angle BAD = 90°$. Analogiškai $\angle BCD = 90°$.

Ieškoma suma lygi $90° \cdot 3 + 60° = 330°$.

20. (A) 2016

! Rudų ir pilkų kengūrų skaičių atitinkamai pažymėkime r ir p. Bet kurios rudos kengūros gautas skaičius lygus $\frac{p}{r}$. Tokių trupmenų yra r ir jų suma lygi $\frac{p}{r} \cdot r = p$. Analogiškai likusių trupmenų suma lygi $\frac{r}{p} \cdot p = r$. Visų trupmenų suma lygi $r + p = 2016$.

21. (C) 1,25 m

! Matematikos požiūriu vijoklis yra kreivė, esanti cilindriniame paviršiuje. Gali atrodyti, kad tai sunkus stereometrijos uždavinys. Tačiau sudėtingą erdvės figūrą galima paversti paprasta plokštumos figūra – tiesės atkarpa.

Įsivaizduokime, kad stulpo šoninis paviršius apvyniojamas stačiakampiu popieriaus lapu, kurio plotis (vertikaliai pastačius – aukštis) yra 1 m, o ilgis, kad apvynioti būtų galima lygiai 5 kartus, yra $15 \cdot 5 = 75$ (cm) arba $\frac{3}{4}$ m.

Stačiakampio įstrižainė, kildama nuo apatinės jo viršūnės prie viršutinės, taigi nuo stulpo apačios iki viršaus, apsivynios aplink stulpą su visu popieriaus lapu lygiai penkis kartus. Be to, taškui judant įstrižaine, jis kils aukštyn tolygiai (t. y. taško aukštis virš žemės yra tiesiškai proporcingas nueitam keliui; tai lengva pamatyti, įsivaizduojant taško judėjimą vėl ištiesintame lape). Šį tašką galima interpretuoti kaip augančio vijoklio viršūnę, o jo trajektoriją (susukto lapo įstrižainę) – kaip užaugusį vijoklį. Taigi vijoklio ilgis sutampa su lapo įstrižainės ilgiu. Pastarasis pagal Pitagoro teoremą lygus $\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ (m).

Pastaba. Griežtai įrodyti, kad negali būti kitokio uždavinio sąlygą tenkinančio vijoklio, nėra paprasta. Tam galima nagrinėti vijoklio vaizdą vėl atvyniotame lape – tai plokštumos kreivė. Kad ji iš tiesų yra atkarpa, galima įrodyti tiriant jos savybes matematinės analizės instrumentais (pvz., prireiks kreivės ilgio integralinės formulės).

22. (C) 15

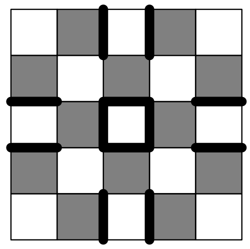
! Liekana visada yra mažesnė už daliklį. Kad nagrinėjama liekana r būtų didelė, reikia imti dviženklį skaičių n su didele skaitmenų suma $s > r$. Kita vertus, $s \leqslant 9 + 9 = 18$, o skaičių su didelėmis skaitmenų sumomis 18, 17, 16 yra nedaug, juos galima visus perrinkti.

Jei $s = 18$, tai $n = 99$ ir $r = 9$.

Jei $s = 17$, tai $n = 89$ arba 98, o $r = 4$ arba 13.

Jei $s = 16$, tai $n = 79$, 88 arba 97. Kai $n = 79$, randame $r = 15$ ir galime sustabdyti perranką. Liekana jau negali būti didesnė, nes kai $s \leqslant 16$, tai $r \leqslant 15$, o išnagrinėtu atveju $s > 16$ teturime $r = 9$, 4 arba 13.

23. (B) 12



! Spalvinkime (bet kokia tvarka – nuo jos niekas nepriklauso) tas langelių poras, kur bendra kraštinė paryškinta (žr. pav.). Taip per 12 ėjimų ir gausime norimą rezultatą: vieną kartą spalvinti langeliai taps juodi, o du ar keturis kartus spalvintieji liks balti. Langelis spalvinamas tiek kartų, kiek jis turi paryškintų kraštinių.

Liko įsitikinti, kad mažiau ėjimų nepakaks. Tam tereikia pastebėti, kad jokie du langeliai, kurie turi būti nuspalvinti juodai, nėra gretimi. Todėl vienu ėjimu juodai nuspalvinsime daugiausiai vieną iš jų. Kadangi reikia gauti 12 juodų langelių, tai ir ėjimų prireiks bent 12. Beje, šis pastebėjimas taip pat paaiškina, kaip gauti jau nurodytus 12 ėjimų: kiekvienam langeliui, tampančiam juodu, skiriama po vieną iš 12 ėjimų, todėl reikia žūtbūt vengti spalvinti šiuos langelius daugiau nei vieną kartą.

24. (E) 24

! Valties greitį stovinčiame vandenyje pažymėkime v_1 (km/h), o upės greitį, kuriuo juda ir upės nešamas rąstas, pažymėkime v_0 (km/h). Tada valties greitis, jai plaukiant pasroviui, lygus $(v_1 + v_0)$ km/h, o greitis, jai plaukiant prieš srovę, lygus $(v_1 - v_0)$ km/h (t. y. per valandą valtis pajuda tiek, kiek stovinčiame vandenyje, plius arba minus tiek, kiek srovė ją nuneša atitinkamai pirmyn ar atgal).

Judėjimo trukmė lygi kelio ir greičio santykiui. Taigi jei atstumas tarp X ir Y yra s km, o ieškoma rąsto judėjimo trukmė yra t_0 h, tai gauname tokias tris lygybes:

$$4 = \frac{s}{v_1 + v_0}, \quad 6 = \frac{s}{v_1 - v_0}, \quad t_0 = \frac{s}{v_0}.$$

Kadangi reikia rasti $\frac{s}{v_0}$, tai natūralu iš pirmų dviejų lygybių (daugiau juk nieko neduota) eliminuoti v_1. Tai patogiausia padaryti lygybes apverčiant ir atimant vieną iš kitos:

$$\frac{1}{4} = \frac{v_1 + v_0}{s}, \quad \frac{1}{6} = \frac{v_1 - v_0}{s} \implies \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{(v_1 + v_0) - (v_1 - v_0)}{s} = \frac{2v_0}{s} \implies$$

$$\frac{s}{2v_0} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = 12 \implies t_0 = 2 \cdot \frac{s}{2v_0} = 24 \text{ (valandos).}$$

25. (A) 1

! Tridienio, kai viena darbo diena yra tarp šventadienių, nebus mėnesių sandūroje (dirbama ir 40-ąją, ir 1-ąją dienomis). Taigi reikia rasti, kiek yra skaičių n nuo 1 iki 38, kad n-toji ir $(n+2)$-oji dienos būtų šventadieniai, o $(n+1)$-oji nebūtų. Skaičiaus n reikšmes galima iš eilės perrinkti, bet čia pravers greito abstraktaus mąstymo gebėjimai. Nagrinėkime du atvejus.

1) Tarkime, kad abu skaičiai n ir $n+2$ lyginiai. Jei kuris nors iš jų pirminis, tai $n = 2$ (vienintelis lyginis pirminis skaičius yra 2 ir $n+2 > 2$). Ši reikšmė netinka. Tada abu skaičiai turi dalytis iš 6. Tačiau ir taip negali būti, nes jų skirtumas lygus 2.

2) Lieka atvejis, kai abu skaičiai n ir $n+2$ nelyginiai, todėl tikrai nesidalija iš 6. Tada jie turi būti pirminiai. Vienas iš trijų iš eilės einančių skaičių n, $n+1$ ir $n+2$ dalijasi iš 3. Jei tai lyginis skaičius $n+1$, tai jis dalijasi iš $2 \cdot 3 = 6$ ir nėra darbo diena. Jei tai n arba $n+2$, tai $n = 3$ arba $n+2 = 3$ (vienintelis pirminis skaičius, dalus iš 3, yra 3). Taip gauname vienintelį tinkamą tridienį 3, 4, 5.

26. (A) 5

! Norint įžiūrėti sąsają tarp trikampio aukštinių ilgių $h_1 = 10, h_2 = 11, h_3$, reikia prisiminti sąsają tarp atitinkamų trikampio kraštinių x_1, x_2, x_3 ilgių: jie turi tenkinti trikampio nelygybes

$$x_3 < x_1 + x_2, \quad x_1 < x_2 + x_3, \quad x_2 < x_3 + x_1.$$

Savo ruožtu kraštines su aukštinėmis sieja trikampio plotas

$$S = \frac{x_1 h_1}{2} = \frac{x_2 h_2}{2} = \frac{x_3 h_3}{2} \implies x_1 = \frac{2S}{h_1}, \; x_2 = \frac{2S}{h_2}, \; x_3 = \frac{2S}{h_3}.$$

Įrašę pastarąsias tris išraiškas į pirmąją trikampio nelygybę ir padaliję ją iš $2S$, gauname, kad

$$\frac{1}{h_3} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \implies h_3 > 5.$$

Taigi h_3 nelygu 5.

Pastaba. Jei imsime kitas atsakymuose nurodytas h_3 reikšmes, trikampis su tokiomis aukštinėmis egzistuos. Imkime trikampį su kraštinėmis $h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1}$ (jis egzistuoja, nes šios kraštinės tenkina trikampio nelygybes, kai $h_3 = 6, 7, 10, 100$). Jei jo plotas lygus S, tai aukštinių ilgiai bus $2Sh_1, 2Sh_2, 2Sh_3$. Reikiamą trikampį gausime, visas tris kraštines (o kartu visus tiesinius trikampio matmenis, įskaitant aukštinių ilgius) patrumpinę $2S$ kartų.

27. (C) 7

! Tarkime, kad Jokūbas užrašė skaičius $n, n+1, n+2, n+3$. Reikia rasti mažiausią galimą n reikšmę. Keturios sumos lygios

$$S_1 = (n+1) + (n+2) + (n+3) = 3n + 6 = 3(n+2),$$

$$S_2 = n + (n+2) + (n+3) = 3n + 5,$$

$$S_3 = n + (n+1) + (n+3) = 3n + 4,$$

$$S_4 = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

Skaičiais S_1 ir S_4 galime nesirūpinti: jie nėra pirminiai, nes dalijasi iš 3 (ir nelygūs 3). Taigi reikia rasti mažiausią natūralųjį n, kuriam likę skaičiai $3n + 4$ ir $3n + 5$ abu sudėtiniai. Iš eilės imkime $n = 1, 2, \ldots$. Tada

$$(S_2, S_3) = (7, 8), (10, 11), (13, 14), (16, 17), (19, 20), (22, 23), (25, 26), \ldots$$

Pirmoji sudėtinių skaičių pora $(25, 26)$ gaunama, kai $n = 7$.

28. (A) Čiuožimas

! Kadangi Ema ir Fredas sėdėjo greta, tai Aušra ir Benas taip pat sėdėjo greta. Tada tėra keturi variantai, kaip sportininkai sėdėjo pagal laikrodžio rodyklę: 1) A, B, E, F; 2) A, B, F, E; 3) B, A, E, F; 4) B, A, F, E. Aušrai iš kairės ir priešais Beną sėdėjo skirtingi žmonės (slidininkas ir čiuožėjas), todėl galime iš karto atmesti atvejus 3) ir 4). Abiem likusiais atvejais Aušrai iš kairės sėdintis Benas turi būti slidininkas. Čiuožėjui, sėdinčiam priešais Beną, iš kairės sėdi Aušra. Todėl Aušra negali būti moteris, sėdėjusi iš kairės ledo ritulininkui. Tada ši moteris yra Ema. Atvejis 1) netinka, nes čia Ema sėdi iš kairės slidininkui Benui, o ne ledo ritulininkui. Lieka atvejis 2). Čia Ema sėdi priešais Beną, taigi yra čiuožėja. (Fredas yra ledo ritulininkas, o Aušra – snieglentininkė.)

29. (B) Birželis

! Manantieji, kad ieškoma stulbinanti data greitai pasirodo po 2016 m. kovo 17 d., turės nusivilti, mat XXI, XXII ir XXIII amžių datos nėra stulbinančios. Norint greitai tai pastebėti, reikia atkreipti dėmesį į mėnesio skaičiaus pirmąjį skaitmenį: jis yra 0 arba 1. Kas atsitiktų, jei nė vieno iš šių skaitmenų nebūtų dienos skaičiuje? Tada dienos pirmasis skaitmuo a būtų 2 arba 3. Jei $a = 3$, tai dienos skaičius yra 30 arba 31 – skaitmenų 0 ir 1 vis tiek neišvengiame. O jei $a = 2$, tai metų skaičius neprasideda skaitmeniu 2, todėl yra didesnis už 3000. Taigi jei tikimės rasti stulbinančią datą iki 3000 metų, turime laikyti, kad po vieną iš skaitmenų 0 ir 1 yra tiek mėnesio, tiek dienos skaičiuje, o metai prasideda skaitmeniu 2. Tada metų skaičiuje nėra nei vieno iš kitur panaudotų skaitmenų 0 ir 1. Dėl šios priežasties tenka iš eilės atmesti metus, prasidedančius 20... ir 21... . Atvejis 22... netinka, nes negali kartotis ir skaitmuo 2.

Toliau tikrinkime metus 23...: vėl iš karto atmetame 230..., 231..., 232..., 233... . Tikrinkime metus 234...: 2340, 2341, 2342, 2343, 2344 taip pat netinka. Metai 2345 tinka: data 2345-06-17 yra stulbinanti. Toliau tereikia atmesti datas 2345-01 (netinka, nes 0 arba 1 turėtų būti dienos skaičiuje), 2345-02, 2345-03, 2345-04, 2345-05 (pasikartojantys skaitmenys). Taigi sustojame ties mėnesiu 06, o tai yra birželis.

30. (D) 1008

? Sukonstruosime pavyzdį, kaip kengūros galėjo susidaužti kaktomis, tenkinantį uždavinio sąlygą. Tarkime, kad kengūros K1, K2, ..., K1007 tarpusavyje nesusidaužė, o 1009 kengūros K1008, K1009, ..., K2016 poromis susidaužė visos (kiekviena su 1008 kitomis). Belieka nurodyti, kaip pirmos grupės kengūros susidaužė su antros grupės kengūromis: K1009 su K1007; K1010 su K1007 ir K1006; K1011 su K1007, K1006 ir K1005; ...; K2015 su visomis pirmos grupės kengūromis. Tada K1007 susidaužė su visomis 1007 antros grupės kengūromis, išskyrus K1008 ir K2016, ir šis skaičius kengūroms K1006, ..., K1 kaskart sumažėja 1. Kengūra K1008 susidaužė su 1008 kengūromis ir šis skaičius kengūroms K1009, ..., K2015 kaskart padidėja 1. Taigi uždavinio sąlyga jau tenkinama, o K2016 susidaužė su 1008 kengūromis.

! Tarkime, kad K2016 susidaužė su a kengūrų. Iš eilės surašykime turimus susidaužimų skaičius: 1, 2, ..., 2014, 2015, a. Priešpaskutinis skaičius reiškia, kad K2015 susidaužė su visomis likusiomis kengūromis. Taigi jei K2015 nebūtų su niekuo susidaužusi (o visa kita nepasikeistų), tai skaičių seka atrodytų taip: 0, 1, ..., 2013, 0, $a-1$. Išbraukdami nulius ir taip pamiršdami apie K1 ir K2015, gauname seką 1, 2, ..., 2012, 2013, $a-1$. Toliau galime analogiškai pašalinti K2 ir K2014 bei gauti seką 1, 2, ..., 2010, 2011, $a-2$. Taip pat pašalinkime K3 ir K2013, ..., K1007 ir K1009. Sekoje lieka tik skaičiai 1 ir $a-1007$, atitinkantys K1008 ir K2016. Skaičius 1 parodo, kad K1008 susidaužė su K2016, todėl $a-1007=1$ ir $a=1008$.

Pastaba. Šis sprendimas parodo, kad **?** dalyje sukonstruotas pavyzdys yra vienintelis: šalindami kengūras mes vienareikšmiškai nustatėme, su kuriomis kengūromis jos susidaužė. Taip pat pastebėkime, kad čia turime grafų teorijos uždavinį: kengūros yra grafo viršūnės, o jų susidaužimai – grafo briaunos. Pateiktame sprendime grafų teorijos žinovai gali įžiūrėti Havelo-Hakimio algoritmą.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	B
3	D
4	A
5	B
6	D
7	C
8	D
9	B
10	E
11	D
12	A
13	E
14	C
15	B
16	E
17	D
18	C
19	B
20	A
21	C
22	C
23	B
24	E
25	A
26	A
27	C
28	A
29	B
30	D