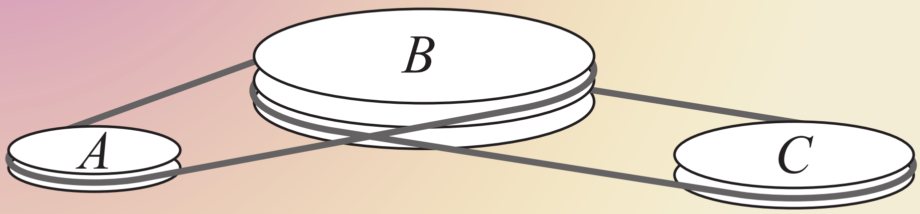
Kengūra

SENJORAS



Uždtuotys ir sprendimai

2017

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. Senjoras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus". Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 48000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2017 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

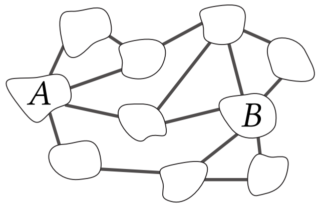
Klausimai po 3 taškus

1. Mėgstamiausias Beno žaislas yra geležinkelio modelis. Benas pats kuria papildomas modelio detales, kruopščiai laikydamasis tipinio mastelio H0 („pusė nulio“), t. y. 1 : 87. Jis net sukūrė 2 cm aukščio savo brolio figūrėlę. Koks yra Beno brolio ūgis?
A) 1,74 m **B)** 1,62 m **C)** 1,86 m **D)** 1,94 m **E)** 1,70 m

2. Petras parašė žodį **KENGŪRA** ant permatomos stiklo šukės (žr. pav.). Kokį užrašą jis pamatė, kai apvertė šukę kita puse?

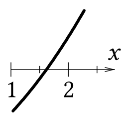
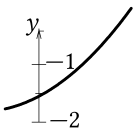
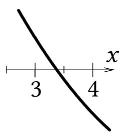
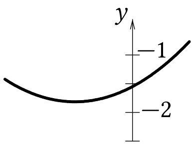
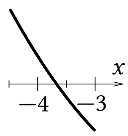
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

3. Žemėlapyje parodyta, kaip 15 tiltų jungia 10 salų. Saloje A įsikūrė plėšikai. Kiek mažiausiai tiltų turi susprogdinti salos B gyventojai, kad plėšikai į jų salą negalėtų patekti pėsčiomis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

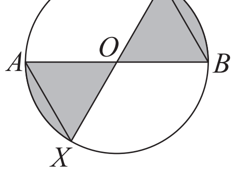


4. Duoti tokie teigiami skaičiai a ir b, kad 75% skaičiaus a lygūs 40% skaičiaus b. Tada
A) $15a = 8b$ **B)** $7a = 8b$ **C)** $3a = 2b$ **D)** $5a = 12b$ **E)** $8a = 15b$

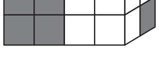
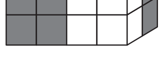
5. Keturiuose iš penkių paveikslėlių pavaizduotas tos pačios kvadratinės funkcijos grafikas. Kuriame paveikslėlyje funkcija kita?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

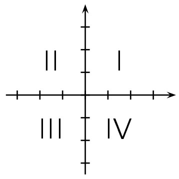
6. Per skritulio centrą O nubrėžti tokie du skersmenys AB ir CX, kad $OB = BC$ (žr. pav.). Kuri skritulio ploto dalis nudažyta?
A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{7}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{4}{11}$



7. Plytelę $4 \times 1 \times 1$ sudaro du balti ir du pilki kubeliai, suklijuoti nurodyta tvarka. Kuri plyta sudaryta iš keturių tokių plytelių?

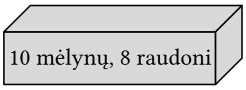
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

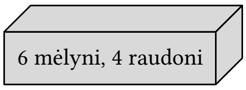
8. Kurio koordinačių plokštumos ketvirčio nekerta tiesinės funkcijos $f(x) = -3{,}5x + 7$ grafikas?

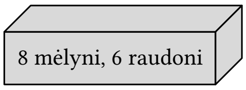


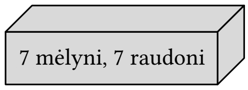
A) I **B)** II **C)** III **D)** IV **E)** Grafikas kerta visus ketvirčius

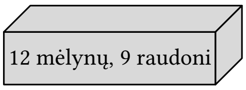
9. Penkiose pavaizduotose dėžėse guli raudoni ir mėlyni rutuliai, o jų kiekiai užrašyti ant dėžių. Audrius turi pasirinkti vieną dėžę ir nežiūrėdamas ištraukti vieną rutulį. Kurią dėžę jam labiausiai apsimoka pasirinkti, jei jis nori ištraukti mėlyną rutulį?

A) 

B) 

C) 

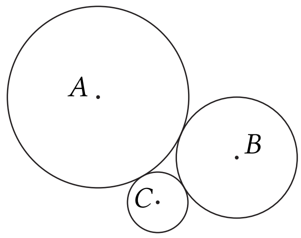
D) 

E) 

10. Kurios funkcijos grafikas su funkcijos $f(x) = x$ grafiku turi daugiausiai sankirtos taškų?
A) $g_1(x) = x^2$ **B)** $g_2(x) = x^3$ **C)** $g_3(x) = x^4$ **D)** $g_4(x) = -x^4$ **E)** $g_5(x) = -x$

Klausimai po 4 taškus

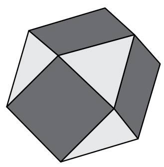
11. Trys apskritimai su centrais A, B ir C bei atitinkamais spinduliais 3, 2 ir 1 liečia vienas kitą (žr. pav.). Koks yra trikampio ABC plotas?
A) 6 **B)** $4\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** 9 **E)** $2\sqrt{6}$



12. Teigiamas skaičius p yra mažesnis už 1, o skaičius q yra didesnis už 1. Kuris skaičius didžiausias?
A) p^2q **B)** pq^2 **C)** p^2q^2 **D)** $p^2 + q^2$ **E)** $p + q^2$

13. Ritinių A ir B tūriai lygūs. Ritinio B pagrindo spindulys yra 10 % ilgesnis už ritinio A pagrindo spindulį. Kiek ritinio A aukštinė yra ilgesnė už ritinio B aukštinę?
A) 5 % **B)** 10 % **C)** 11 % **D)** 20 % **E)** 21 %

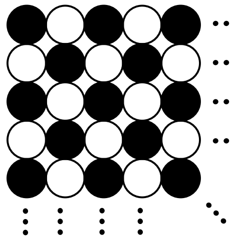
14. Paveikslėlyje pavaizduotas briaunainis, kurio sienos yra kvadratai ir trikampiai, o kiekviena briauna priklauso ir kvadratinei, ir trikampei sienai. Kiek briaunainis turi trikampių sienų, jei jis turi šešias kvadratinies sienas?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9



15. Jei $|x| + x + y = 5$ ir $x + |y| - y = 10$, tai $x + y =$
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

16. Kuris skaičius negali būti daugianario $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ su sveikaisiais koeficientais a ir b šaknimi?
A) 1 **B)** -1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

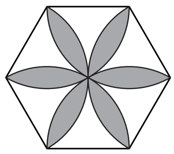
17. Julija turi 2017 šaškių: 1009 iš jų juodos, o likusios baltos. Ji nori sudaryti iš šaškių tokią kvadratinę figūrą, kad gretimos šaškės būtų skirtingų spalvų, o kairiajame viršutiniame kampe esanti šaškė būtų juoda (žr. pav.). Kiek šaškių liko Julijai, kai ji sudarė didžiausią galimą tokią figūrą?



A) Nė vienos **B)** Po 40 kiekvienos spalvos **C)** 40 juodų ir 41 balta **D)** Po 41 kiekvienos spalvos **E)** 40 baltų ir 41 juoda

18. Dviejų gretimų natūraliųjų skaičių skaitmenų sumos abi dalijasi iš 7. Kiek mažiausiai skaitmenų gali turėti mažesnysis iš gretimų skaičių?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

19. Taisyklingojo šešiakampio viduje esančią gėlę sudaro skritulių su centrais šešiakampio viršūnėse nuopjovos (žr. pav.). Skritulių spinduliai ir šešiakampio kraštinių ilgiai yra vienetiniai. Koks yra gėlės plotas?

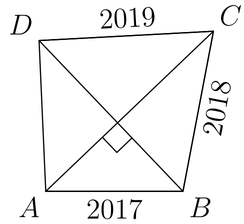


A) $\frac{\pi}{2}$ **B)** $\frac{2\pi}{3}$ **C)** $2\sqrt{3}-\pi$ **D)** $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ **E)** $2\pi-3\sqrt{3}$

20. Mikė Melagėlis stengiasi pasitaisyti, bet vis tiek tarp jo iš eilės ištartų bet kurių trijų teiginių lygiai vienas būna melagingas. Kartą apie pasirinktą dviženklį natūralųjį skaičių jis pareiškė: „Jis turi skaitmenį 2. Ir jis didesnis už 50. Be to, jis lyginis. O dar jis mažesnis už 30. Jis dalijasi iš 3. Ir jis turi skaitmenį 7.“ Kokia yra Mikės skaičiaus skaitmenų suma?
A) 9 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 17

Klausimai po 5 taškus

21. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės statmenos, o kraštinių ilgiai yra $AB = 2017$, $BC = 2018$ ir $CD = 2019$. Koks yra ketvirtosios kraštinės AD ilgis?

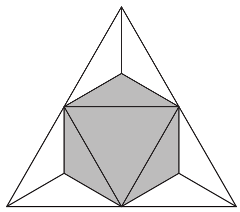


A) 2016 **B)** 2018 **C)** $\sqrt{2020^2-4}$ **D)** $\sqrt{2018^2+2}$ **E)** 2020

22. Lošimo kauliukas, kurio sienelėse pažymėti skaičiai -3, -2, -1, 0, 1, 2, ridenamas du kartus. Kokia yra tikimybė, kad iškritusių skaičių sandauga yra neigiamas skaičius?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

23. Kiek yra natūraliųjų skaičių, kurie nubraukus paskutinį skaitmenį sumažėja 14 kartų?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

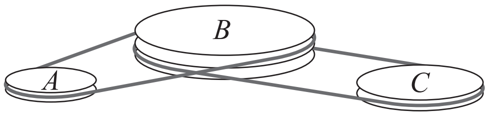
24. Nagrinėkime taisyklingąjį tetraedrą. Iš kiekvienos jo viršūnės išeina trys briaunos, o per šių briaunų vidurio taškus eina plokštuma. Šios keturios plokštumos nukerta keturis tetraedro kampus (žr. pav.). Kurią tetraedro tūrio dalį sudaro likusio briaunainio tūris?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{1}{3}$

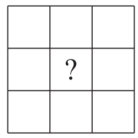
25. Stačiojo trikampio trijų kraštinių ilgių suma lygi 18, o tų pačių ilgių kvadratų suma lygi 128. Koks yra trikampio plotas?
A) 18 **B)** 16 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 9

26. Diržinę pavarą sudaro skriemuliai A, B ir C, sujungti neslystančiais diržais. Kol B apsisuka lygiai 4 kartus, A apsisuka lygiai 5 kartus. O kol B apsisuka lygiai 6 kartus, C apsisuka lygiai 7 kartus. Raskite A perimetrą, jei C perimetras yra 30 cm.



A) 30 cm **B)** 28 cm **C)** 27 cm **D)** 24 cm **E)** 21 cm

27. Devyni sveikieji skaičiai, kurių suma lygi 500, įrašyti į 3×3 lentelės langelius. Bet kurių dviejų gretimų (bendrą kraštinę turinčių) langelių skaičiai skiriasi vienetu. Koks skaičius įrašytas viduriniame langelyje?



A) 50 **B)** 54 **C)** 55 **D)** 56 **E)** 57

28. Seką $a_1, a_2, a_3, \ldots$ apibrėžia lygybės $a_1 = 2017$ ir $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$, $n \geqslant 1$. Tada $a_{2017} =$

A) -2017 **B)** $-\frac{1}{2016}$ **C)** $\frac{2016}{2017}$ **D)** 1 **E)** 2017

29. Kiek yra triženklių skaičių $\overline{abc}$, kuriems $(a+b)^c$ yra triženklis dvejeto laipsnis?

A) 15 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

30. Saloje gyvena tik visada tiesą sakantys matematikai ir visada meluojantys niektauzos – iš viso 2017 piliečių. Į vieną šventę susirinko daugiau nei tūkstantis piliečių ir sustojo ratu. Tada kiekvienas iš jų sušuko: „Aš stoviu tarp matematiko ir niektauzos!“ Kiek daugiausiai matematikų gyvena saloje?

A) 1683 **B)** 668 **C)** 670 **D)** 1344 **E)** 1343

Senjoro užduočių sprendimai

1. A 1,74 m

! Mastelis 1 : 87 reiškia, kad Beno brolio figūrėlės aukštis yra 87 kartus mažesnis nei paties brolio ūgis. Todėl jo ūgis yra $87 \cdot 2$ cm $= 174$ cm $= 1{,}74$ m.

2. E 

? Galima įsivaizduoti, kaip šukė apverčiama per savo apatinę briauną ir gaunamas veidrodinis užrašo atspindys, t. y. užrašo simetrinis vaizdas apatinės briaunos atžvilgiu. Toks yra atsakymas **E**.

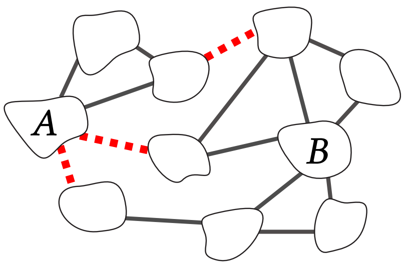
A)  B)  C)  D)  E) 

! Apverstos šukės padėtis negali būti kitokia nei ta, kuri gaunama apvertus šukę per apatinę briauną. Tai parodo apverstos šukės forma: smailiausias kampas lieka kairėje. Tada atsakymai **A**-**D** netinka: atsakyme **D** raidė K nėra ties smailiuoju kampu, atsakyme **A** neapsiverčia raidės N ir G, atsakyme **C** neapsiverčia Ū ir A, o atsakyme **B** raidės E, G ir R apsiverčia, tačiau ne tik horizontalės, bet ir vertikalės atžvilgiu.

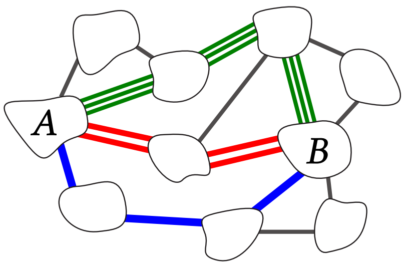
Kad likęs atsakymas **E** tinka, įrodėme **?** dalyje.

3. C 3

!



Lengva rasti tris tiltus, kuriuos susprogdinus kelio iš A į B nelieka (žr. pav., kur šie tiltai pažymėti raudonu punktyru). Tačiau reikia įsitikinti, kad dviejų susprogdintų tiltų neužteks. Tam nagrinėkime tris kelius iš A į B, paryškintus paveikslėlyje apačioje: joks tiltas nepriklauso dviem keliams, todėl kiekviename iš trijų kelių būtina susprogdinti po tiltą.

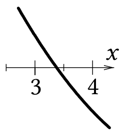


4. (A) $15a = 8b$

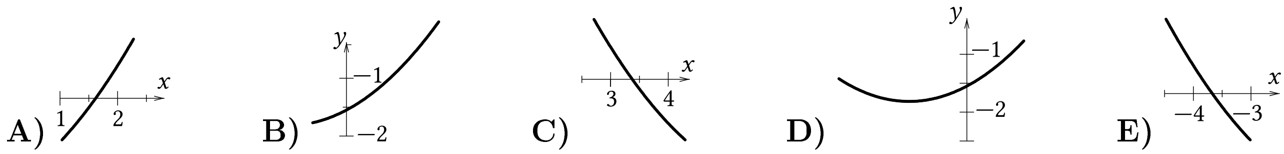
! Procentus pakeiskime paprastosiomis trupmenomis: 75% yra $\frac{75}{100} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{3}{4}$ skaičiaus a, o 40% yra $\frac{40}{100} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{2}{5}$ skaičiaus b. Tada

$$\frac{3a}{4} = \frac{2b}{5}, \qquad 3a \cdot 5 = 2b \cdot 4, \qquad 15a = 8b.$$

!! Kadangi $75 : 40 = (5 \cdot 15) : (5 \cdot 8) = 15 : 8$, tai 15% skaičiaus a lygūs 8% skaičiaus b. Belieka lygybę $0{,}15a = 0{,}08b$ padauginti iš 100.

5. (C) 

! Kvadratinės funkcijos grafikas yra parabolė. Remiantis bet kuriuo iš penkių paveikslėlių, jos šakos nukreiptos į viršų. Vadinasi, kvadratinė funkcija iki tam tikro taško yra mažėjanti, o tada ima didėti. Net dviejuose paveikslėliuose – **B** ir **D** – funkcija yra didėjanti ties $x = 0$. Todėl nagrinėjama kvadratinė funkcija tokia ir yra. Tada ji tuo labiau yra didėjanti intervale $(3; 4)$. Vadinasi, paveikslėlyje **C** pavaizduota funkcija, mažėjanti šiame intervale, yra kita.

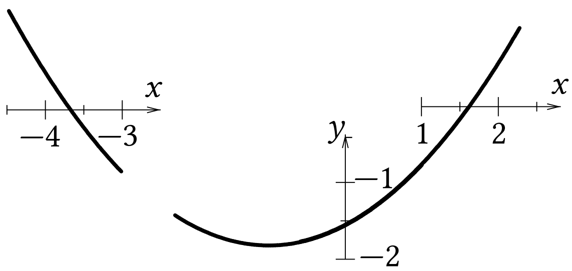


!! Kvadratinės funkcijos grafikas yra parabolė. Remiantis bet kuriuo iš penkių paveikslėlių, jos šakos nukreiptos į viršų.

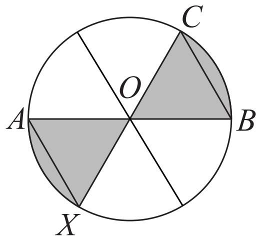
Jei paveikslėliuose **C** ir **E** turime tą pačią parabolę, tai jos kairioji šaka kerta ašį Ox dviejuose taškuose. Taip būti negali: jei parabolė kerta ašį Ox dviejuose taškuose, tai jie priklauso skirtingoms šakoms. Vadinasi, viename iš šių dviejų paveikslėlių matome kitos funkcijos grafiką.

Paveikslėlyje **A** pavaizduota dešinioji parabolės šaka. Jei paveikslėlyje **C** yra ta pati parabolė, tai jos kairioji šaka kerta ašį Ox dešiniau nei dešinioji. Vadinasi, kitos funkcijos grafikas pavaizduotas paveikslėlyje **C**.

Likusius 4 paveikslėlius iš tiesų galima sujungti į vieną parabolę (žr. pav.). Tai kvadratinės funkcijos $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, turinčios šaknis $x_1 \approx -3{,}7$ ir $x_2 \approx 1{,}6$ bei koeficientus $c \approx -1{,}6$ ir $a = \frac{c}{x_1 x_2}$, grafikas.

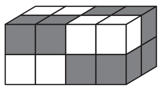


6. (B) $\frac{1}{3}$

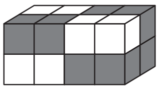
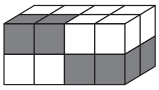
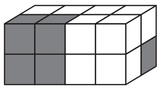
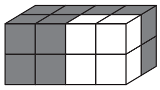
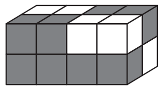


! Nudažytos yra dvi skritulio išpjovos, kurių kampai yra lygūs kaip kryžminiai: $\angle BOC = \angle AOX$. Kadangi $OC = OB = BC$, tai trikampis OBC lygiakraštis ir $\angle BOC = \angle AOX = 60°$. Kampas $60°$ sudaro šeštadalį pilnojo kampo $360°$, todėl skritulį galima padalyti į 6 lygias tokias išpjovas (žr. pav.). Kiekvienos išpjovos plotas lygus šeštadaliui viso skritulio ploto. Tada iš viso nudažyta $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ skritulio ploto.

(Prisiminkime, kad apskritai išpjovos plotas sudaro tokią dalį skritulio ploto, kokią pilnojo kampo dalį sudaro išpjovos kampas.)

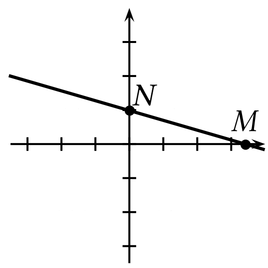
7. (A) 

! Plytą $4 \times 2 \times 2$ galima padalyti į $4 \times 1 \times 1$ plyteles vieninteliu būdu. Paveikslėliuose **B** ir **C** viršutinė užpakalinė $4 \times 1 \times 1$ plytelė būtų sudaryta tik iš baltų kubelių, o paveikslėlyje **D** – tik iš juodų. Paveikslėlyje **E** apatinė priekinė $4 \times 1 \times 1$ plytelė būtų sudaryta tik iš juodų kubelių. Paveikslėlį **A** gausime iš keturių reikiamų plytelių, viršutinę priekinę plytelę pasukę priešinga kryptimi nei kitas tris.

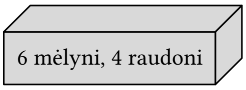
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

8. (C) III

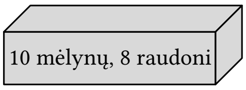
? Paprasta nubrėžti duotos funkcijos grafiką. Tačiau lengvai galima apsieiti net ir be to: jei $x \leqslant 0$, tai $y = -3{,}5x + 7 \geqslant 7 > 0$. Vadinasi, III ketvirčio, kuriame $x \leqslant 0$ ir $y \leqslant 0$, funkcijos grafikas nekerta.

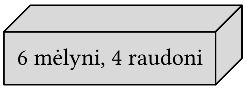


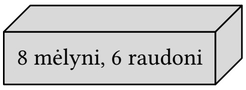
! Tiesinės funkcijos grafikas yra tiesė. Kad sužinotume jos padėtį, raskime jos sankirtas su koordinačių ašimis. Kadangi $f(0) = 7$, o lygties $f(x) = 0$ sprendinys yra $x = 2$, tai tiesė eina per taškus $M(0;7)$ ir $N(2;0)$. Tiesė kerta I, II ir IV ketvirčius, ties kuriais yra šie du taškai. Kad tiesė nekerta III ketvirčio, matyti tiek iš **?** dalies, tiek iš ją iliustruojančio funkcijos grafiko.

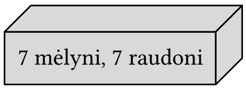
9. (B) 

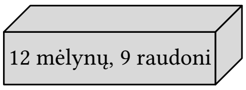
? Dėžėje **D** mėlynų ir raudonų rutulių yra po lygiai, o kitose dėžėse mėlynų rutulių yra daugiau nei raudonų, taigi šios dėžės rinktis tikrai neapsimoka. Dėžėse **C** ir **E** mėlynų ir raudonų rutulių santykis toks pats, 4 : 3. Todėl jos yra lygiavertės, jas galima atmesti, nes negali būti dviejų teisingų atsakymų. Tikimybė ištraukti mėlyną rutulį iš dėžės **B** nepakis, jei abiejų spalvų rutulių skaičių joje padvigubinsime. Tada likusiose dėžėse **A** ir **B** raudonų rutulių bus po lygiai, bet dėžėje **B** mėlynų rutulių bus daugiau. Dabar aišku, kad apsimoka rinktis dėžę **B**.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

! Jeigu vienoje dėžėje būtų tik 5 rutuliai, bet visi mėlyni, o kitoje dėžėje 100 mėlynų ir 1000 raudonų rutulių, tai Audrius, žinoma, turėtų rinktis pirmąją dėžę. Audriui apsimoka pasirinkti ne tą dėžę, kurioje yra daugiau mėlynų rutulių, o tą, iš kurios ištraukti mėlyną rutulį yra didžiausia tikimybė. Pateiktame pavyzdyje iš pirmos dėžės ištraukti mėlyną rutulį tikimybė yra 1, o iš antros – gana nedidelė: tai įvyktų tik 100 atvejų iš $1000 + 100$, t. y. tikimybė lygi $\frac{100}{1000+100} = \frac{1}{11}$.

Vadinasi, reikia nustatyti, kuri iš tikimybių

$$\textbf{A)}\ \frac{10}{10+8} = \frac{5}{9}, \quad \textbf{B)}\ \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}, \quad \textbf{C)}\ \frac{8}{8+6} = \frac{4}{7},$$

$$\textbf{D)}\ \frac{7}{7+7} = \frac{1}{2}, \quad \textbf{E)}\ \frac{12}{12+9} = \frac{4}{7}$$

didžiausia. Lygias tikimybes dėžėms **C** ir **E** galima būtų atmesti be tikrinimo. Be to, lengva matyti, kad tikimybė **D** mažiausia. Tačiau nesunku ir patikrinti visas nelygybes: $\frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$. Didžiausia yra tikimybė **B**.

10. (B) $g_2(x) = x^3$

? Net nežinant, kaip atrodo funkcijų $g_3(x) = x^4$ ir $g_4(x) = -x^4$ grafikai, galima išmąstyti, kad $g_3(x)$ grafikas simetriškas ašies Oy atžvilgiu: $g_3(x) = g_3(-x)$, o $g_4(x)$ grafikas simetriškas $g_3(x)$ grafikui ašies Ox atžvilgiu: $g_4(x) = -g_3(x)$. Todėl tiesė $y = x$, kuri yra simetriška taško $O(0;0)$ atžvilgiu, turi su abiem grafikais po tiek pat bendrų taškų. Du atsakymai negali būti teisingi, todėl lieka atsakymai **A**, **B** ir **E**.

Tiesė $y = x$ kerta tiesę **E)** $y = -x$ tik viename taške, o parabolę **A)** $y = x^2$ – dviejuose taškuose (tereikia jas įsivaizduoti). Tuo tarpu $f(x) = x$ ir **B)** $g_2(x) = x^3$ grafikai turi bent tris lengvai atspėjamus taškus $(0;0)$, $(1;1)$ ir $(-1;-1)$. Renkamės atsakymą **B**.

! Funkcijų $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ grafikai turi tiek bendrų taškų $(x_0; y_0)$, kiek sprendinių $x = x_0$ turi lygtis $f_1(x) = f_2(x)$ (tada $y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0)$).

Taigi turime patikrinti penkias lygtis:

A) $x^2 = x$ **B)** $x^3 = x$ **C)** $x^4 = x$ **D)** $-x^4 = x$ **E)** $-x = x$

Jos visos turi po vieną akivaizdų sprendinį $x = 0$. Todėl, lygindami lygčių sprendinių skaičių, galime laikyti, kad $x \neq 0$, ir padalyti lygtis iš x:

A) $x = 1$ **B)** $x^2 = 1$ **C)** $x^3 = 1$ **D)** $-x^3 = 1$ **E)** $-1 = 1$

Kur reikia, ištraukiame kvadratinę ar kubinę šaknį:

A) $x = 1$ **B)** $x = \pm 1$ **C)** $x = 1$ **D)** $x = -1$ **E)** nėra sprendinių

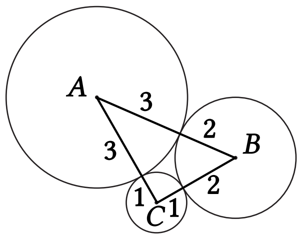
Taigi, pradinės lygtys turi po tiek sprendinių (įskaitant $x = 0$):

A) 2 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 2 **E)** 1

Daugiausiai sprendinių gavome atveju **B**.

11. (A) 6

! Besiliečiančių apskritimų centrus jungianti tiesė eina per lietimosi tašką. Todėl atkarpą AB sudaro dviejų apskritimų spinduliai ir $AB = 3 + 2 = 5$ (žr. pav.). Analogiškai, $BC = 2 + 1 = 3$ ir $AC = 3 + 1 = 4$. Toliau reikia pastabumo arba atminties: trikampis su kraštinių ilgiais 3, 4 ir 5 yra statusis, nes $3^2 + 4^2 = 5^2$ (tai bene populiariausias statusis trikampis). Jo plotas lygus pusei statinių sandaugos $\frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.



12. (E) $p + q^2$

? Imkime $p = \frac{1}{2}$, $q = 2$. Gauname tokias skaičių reikšmes: **A)** $\frac{1}{2}$, **B)** 2, **C)** 1, **D)** $4\frac{1}{4}$, **E)** $4\frac{1}{2}$. Didžiausia reikšmė yra $4\frac{1}{2}$.

! Jei $x > 1$, tai $x^2 > x$, o jei $0 < x < 1$, tai $x^2 < x$. Todėl

$$p^2 q < p^2 q^2 < pq^2 < q^2 < p^2 + q^2 < p + q^2.$$

Taigi didžiausias iš duotųjų skaičių yra $p + q^2$.

13. (**E**) 21 %

! Ritinio X tūris V_X lygus pagrindo ploto S_X ir aukštinės ilgio h_X sandaugai. Todėl $S_A h_A = V_A = V_B = S_B h_B$ ir $h_A : h_B = S_B : S_A$.

Ritinio X pagrindo (skritulio) plotas lygus $S_X = \pi R_X^2$, kur R_X – skritulio spindulys. Kadangi $R_B = R_A + \frac{10\%}{100\%} \cdot R_A = 1{,}1R_A$, tai

$$S_B = \pi R_B^2 = \pi \cdot (1{,}1R_A)^2 = 1{,}21\pi R_A^2 = 1{,}21S_A.$$

Tada $h_A : h_B = S_B : S_A = 1{,}21$ ir $h_A = 1{,}21h_B = h_B + \frac{21\%}{100\%} \cdot h_B$. Vadinasi, ritinio A aukštinė yra 21% ilgesnė už B aukštinę.

14. (**D**) 8

! Trikampių sienų skaičių pažymėkime a. Užuot bandę įsivaizduoti, kaip atrodo briaunainis, mąstykime abstrakčiau.

Kiekviena briauna priklauso lygiai vienai kvadratinei sienai. Kadangi kvadratinių sienų, turinčių po keturias briaunas, yra šešios, tai iš viso briaunų yra $6 \cdot 4 = 24$. Tačiau kiekviena briauna taip pat priklauso lygiai vienai trikampei sienai. Analogiškai gauname, kad briaunų iš viso yra $3a$. Taigi, $24 = 3a$ ir $a = 8$.

15. (**A**) 1

? Iš pirmosios lygties gauname, kad $|x| = 5 - (x + y)$. Remiantis pateiktais atsakymais, $x + y = 1, 2, 3, 4$ arba 5. Tada $|x| = 4, 3, 2, 1$ arba 0, o $x = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ arba 0. Iš eilės įrašant šias 9 nežinomojo x reikšmes į pirmąją lygtį, gaunamos y reikšmės, kurios su x reikšme turi tenkinti antrąją lygtį. Kai $x = 4$, gauname $y = -3$. Pora $(x, y) = (4, -3)$ tenkina abi lygtis. Todėl tinka atsakymas $x + y = 4 + (-3) = 1$.

! Išspręskime uždavinį, nesinaudodami pateiktais atsakymais ir rasdami visas galimas $x + y$ reikšmes.

Jei $y \geqslant 0$, tai $|y| = y$ ir $10 = x + |y| - y = x$. Tada $5 = |x| + x + y = 20 + y$ ir $y = -15 < 0$. Gavome prieštarą. Taigi, $y < 0$ ir todėl $|y| = -y$.

Jei $x \leqslant 0$, tai $|x| = -x$ ir $5 = |x| + x + y = y$. Tada $y = 5 > 0$. Gavome prieštarą. Taigi, $x > 0$ ir $|x| = x$.

Turime lygybes: $5 = |x| + x + y = 2x + y$ ir $10 = x + |y| - y = x - 2y$. Lygčių $2x + y = 5$ ir $x - 2y = 10$ sistema turi vienintelį sprendinį $(x, y) = (4, -3)$, tenkinantį ir pradines lygtis. Todėl $x + y = 4 + (-3) = 1$.

16. (**D**) 5

? Kad c būtų duotojo daugianario šaknimi, turi galioti lygybė

$$5c^3 + ac^2 + bc + 24 = 0.$$

Tada $-24 = 5c^3 + ac^2 + bc = c(5c^2 + ac + b)$ dalijasi iš c. Vienas iš pateiktų atsakymų **D)** 5 nėra skaičiaus -24 daliklis. Vadinasi, 5 nėra duotojo daugianario šaknis.

! Kad c būtų duotojo daugianario šaknimi, turi galioti lygybė

$$5c^3 + ac^2 + bc + 24 = 0.$$

Patikrinkime atsakymus **A**, **B**, **C** ir **E**.

A) $c = 1$. Lygybė $5 + a + b + 24 = 0$ galioja, kai, pavyzdžiui, $a = 0$, $b = -29$.

B) $c = -1$. Lygybė $-5 + a - b + 24 = 0$ galioja, kai, pavyzdžiui, $a = 0$, $b = 19$.

C) $c = 3$. Lygybę $5{\cdot}27+9a+3b+24 = 0$ galima suprastinti, padalijant iš 3: $45+3a+b+8 = 0$. Ji galioja, kai, pavyzdžiui, $a = 0$, $b = -53$.

E) $c = 6$. Lygybę $5 \cdot 6^3 + 36a + 6b + 24 = 0$ galima suprastinti, padalijant iš 6: $180 + 6a + b + 4 = 0$. Ji galioja, kai, pavyzdžiui, $a = 0$, $b = -184$.

Šių pastebėjimų pakanka, kad pasirinktume atsakymą **D**, toliau nespręsdami. Tačiau jį patikrinome **?** dalyje, o tai užbaigia sprendimą.

17. (E) 40 baltų ir 41 juoda

? Kvadratinei figūrai sudaryti Julijai prireikė tokio šaškių skaičiaus, kuris yra natūraliojo skaičiaus kvadratas (tikslusis kvadratas). Remiantis pateiktais atsakymais, Julijai šaškių liko **A)** 0, **B)** 80, **C)** 81, **D)** 82, **E)** 81. Ji panaudojo **A)** 2017, **B)** 1937, **C)** 1936, **D)** 1935, **E)** 1936 šaškes.

Skaičiai 2017 ir 1937 nėra tikslieji kvadratai, nes baigiasi skaitmeniu 7 (tikslusis kvadratas baigiasi skaitmeniu 0, 1, 4, 9, 6 arba 5). Skaičius 1935 nėra tikslusis kvadratas, nes dalijasi iš 5, bet ne iš 25. Taigi Julija panaudojo 1936 šaškes. Šis skaičius lyginis, jis turi būti lyginio skaičiaus kvadratas. Todėl kvadratinės figūros kiekvienoje eilutėje yra lyginis skaičius šaškių: po lygiai juodų ir baltų. Julija turi daugiau juodų nei baltų šaškių ($1009 > 2017-1009 = 1008$), o panaudojo jų kiekvienoje eilutėje po lygiai. Vadinasi, jai liko daugiau juodų šaškių nei baltų, ir teisingas gali būti tik atsakymas **E**.

! Kvadratinei figūrai sudaryti Julijai prireikė tokio šaškių skaičiaus, kuris yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Didžiausias toks skaičius, ne didesnis už 2017, yra $1936 = 44^2$. Julija galėjo sudėti 1936 šaškes į 44 eilutes, į kiekvieną eilutę padėdama po 44 šaškes: 22 baltas ir 22 juodas, ir tai būtų didžiausia galima kvadratinė figūra. Šaškių jai užtektų: taip ji panaudotų po $1936 : 2 = 968$ juodas ir baltas šaškes. Taigi, sudarius didžiausią kvadratinę figūrą, jai liko $1009 - 968 = 41$ juoda šaškė ir $(2017 - 1009) - 968 = 40$ baltų šaškių.

18. (C) 5

? Duotus gretimus skaičius pažymėkime n ir $n + 1$, o jų skaitmenų sumas – atitinkamai $s(n)$ ir $s(n + 1)$.

Tyrinėjant gretimų skaičių poras, svarbiausia pastebėti tokį dėsningumą: skirtumas $s = s(n+1) - s(n)$ (t. y. kiek pakinta skaičiaus n skaitmenų suma, prie jo pridėjus 1) priklauso tik nuo to, keliais devynetais baigiasi skaičius n. Šį devynetų skaičių pažymėkime k.

Jei $k = 0$ (skaičius n nesibaigia skaitmeniu 9), tai būtinai $s = 1$. Jei $k = 1$, tai $s = -8$. Jei $k = 2$, tai $s = -17$. Jei $k = 3$, tai $s = -26$. Jei $k = 4$, tai $s = -35$.

Kadangi s dalijasi iš 7, tai $k \geqslant 4$. Tada skaičiaus n gale yra bent keturi devynetai. Iš eilės tikrindami galimas reikšmes $n = 9999, 19999, 29999, \ldots$, greitai randame mažiausią galimą n reikšmę 69999. Ją sudaro 5 skaitmenys.

! Duotus gretimus skaičius pažymėkime n ir $n+1$, o jų skaitmenų sumas – atitinkamai $s(n)$ ir $s(n+1)$.

Jei skaičius n nesibaigia skaitmeniu 9, tai, prie n pridėjus 1, paskutinis skaitmuo padidėja 1, o likę skaitmenys nepakinta. Tada skaitmenų suma padidėja 1, ir $s(n+1) - s(n) = 1$ nesidalija iš 7.

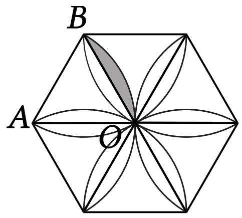
Taigi n baigiasi skaitmenimis $a99\ldots9$, kur po skaitmens $a \neq 9$ eina $k \geqslant 1$ devynetų (jei skaičių n sudaro tik devynetai, tai galima skaičiaus priekyje prirašyti $a = 0$). Tada $n+1$ baigiasi skaitmenimis $(a+1)00\ldots0$, kur po skaitmens $a+1$ eina k nulių. Kiti skaičiaus $n+1$ skaitmenys lieka tokie patys kaip skaičiaus n (jei tokių esama). Todėl

$$s(n) - s(n+1) = (a+9k) - ((a+1) + 0 \cdot k) = 9k - 1.$$

Kadangi $s(n) - s(n+1) = 9k - 1$ dalijasi iš 7, tai netinka $k = 1, 2$ ir 3.

Taigi, $k \geqslant 4$, skaičius n baigiasi skaitmenimis 9999, o skaičius $n+1$ – skaitmenimis 0000. Mažiausia tokia $n+1$ reikšmė, kuriai $s(n+1)$ dalijasi iš 7, yra 70000. Tada $n = 69999$, $s(n) = 42 = 7 \cdot 6$ ir $s(n+1) = 7$. Vadinasi, n gali turėti 5 skaitmenis, bet ne mažiau.

19. (E) $2\pi - 3\sqrt{3}$



! Sujungę gėlės centrą O su taisyklingojo šešiakampio viršūnėmis, padalijame gėlę į 12 dalių. Apskritimas su centru A ir vienetiniu spinduliu eina per taškus B ir O (žr. pav.). Nudažyta gėlės dalis yra atitinkamo skritulio nuopjova.

Nudažytos nuopjovos plotas lygus skritulio išpjovos OAB ir trikampio OAB plotų skirtumui. Kadangi $AB = OA = OB = 1$, tai trikampis OAB lygiakraštis ir išpjovos kampas OAB lygus $60°$. Skritulio plotas yra $S_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$, o išpjova lygi šeštadaliui skritulio ($60° = 360° : 6$), todėl išpjovos plotas yra $S_2 = \frac{S_1}{6} = \frac{\pi}{6}$. Trikampio OAB plotas lygus $S_3 = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot AB \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Tada nuopjovos OB plotas lygus $S_4 = S_2 - S_3 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

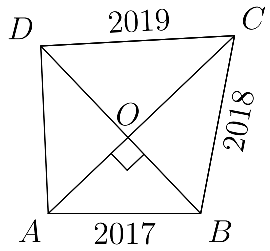
Analogiškai randamas toks pats gėlės kitų 11 dalių plotas. Taigi, gėlės plotas lygus $12S_4 = 2\pi - 3\sqrt{3}$.

20. (D) 15

! Po bet kurio Mikės klaidingo teiginio eina du teisingi, o po bet kurių dviejų teisingų teiginių – klaidingas. Todėl Mikės teisingų ir klaidingų teiginių sekoje klaidingas kas trečias: … T, K, T, T, K, T, T, K, T … Taigi yra trys galimybės, kurie iš šešių duotų Mikės teiginių klaidingi: 1) pirmasis ir ketvirtasis; 2) antrasis ir penktasis; 3) trečiasis ir šeštasis.

Kiekvieną iš atvejų būtų galima patikrinti atskirai, bet verčiau iš karto pastebėkime, kad du teiginiai vienas kitam prieštarauja: skaičius negali būti didesnis už 50 ir mažesnis už 30. Vienas iš teiginių – antrasis arba ketvirtasis – yra klaidingas. Lieka galimybės 1) ir 2), todėl trečiasis ir šeštasis teiginiai teisingi: Mikės dviženklis skaičius lyginis ir turi skaitmenį 7. Šio skaičiaus vienetų skaitmuo lyginis ir nelygus 7. Vadinasi, turime skaičių, kurio vienetų skaitmuo lyginis, o dešimčių skaitmuo yra 7. Belieka patikrinti skaičius 70, 72, 74, 76, 78. Antrasis teiginys teisingas, o ketvirtasis klaidingas, todėl penktasis teiginys teisingas, o pirmasis – ne: skaičius dalijasi iš 3, bet neturi skaitmens 2. Šias savybes turi tik skaičius 78. Jo skaitmenų suma yra $7 + 8 = 15$.

21. (D) $\sqrt{2018^2+2}$



? Keturkampio įstrižainių sankirtos tašką pažymėkime O. Statiesiems trikampiams OAB, OBC, OCD, ODA pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$OA^2+OB^2=2017^2, \quad OB^2+OC^2=2018^2,$$
$$OC^2+OD^2=2019^2, \quad OD^2+OA^2=AD^2.$$

Jei sudėsime pirmąją ir trečiąją lygybes arba antrąją ir ketvirtąją lygybes, kairėje gausime tą patį: $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$. Todėl lygios ir dešiniosios pusės: $2017^2+2019^2=2018^2+AD^2$, arba

$$AD^2=2017^2+2019^2-2018^2.$$

Taigi $2017^2<AD^2<2019^2$ ir galime atmesti atsakymus **A** ir **E**, taip pat ir **C**, nes nesunku nuspėti, kad $\sqrt{2020^2-4}\approx 2020$. Be to, AD^2 paskutinis skaitmuo sutampa su $7^2+9^2-8^2$ paskutiniuoju skaitmeniu $9+1-4=6$. Iš likusių atsakymų **B)** $AD^2=2018^2=\ldots 4$ ir **D)** $AD^2=2018^2+2=\ldots 6$ tinka **D**.

! Dalyje **?** gautoje lygybėje $AD^2=2017^2+2019^2-2018^2$ vidurinę iš trijų gretimų reikšmių pažymėkime $2018=a$. Tada

$$AD^2=(a-1)^2+(a+1)^2-a^2=a^2+2a+1+a^2-2a+1-a^2=a^2+2.$$

Taigi, $AD=\sqrt{a^2+2}=\sqrt{2018^2+2}$.

22. (E) $\frac{1}{3}$

! Nagrinėkime skaičių poras (a,b), kur a yra kauliuko pirmojo metimo metu atvirtęs skaičius, o b – antrojo metimo metu atvirtęs skaičius. Iš viso tokių galimų porų yra $6\cdot 6=36$, taigi turime 36 baigtis. Svarbu suvokti, kad visos baigtys vienodai galimos. Reikia nustatyti, kelios baigtys yra palankios įvykiui „$ab<0$", t. y. kiek yra tokių porų (a,b).

Dviejų skaičių sandauga neigiama tada ir tik tada, kai vienas iš jų neigiamas, o kitas teigiamas. Turime du teigiamus skaičius 1 ir 2 bei tris neigiamus skaičius -3, -2, -1. Todėl yra $2\cdot 3=6$ poros, kur $a>0$ ir $b<0$, ir tiek pat porų, kur $a<0$ ir $b>0$. Iš viso gavome $6+6=12$ palankių baigčių. Įvykio tikimybė lygi $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

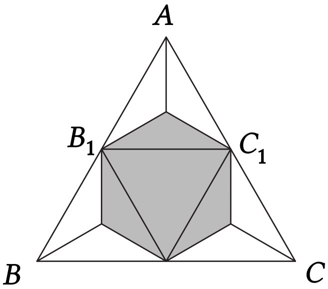
23. (C) 2

! Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Paskutinį nubraukiamą skaičiaus n skaitmenį pažymėkime b, o skaičių, likusį nubraukus b ir sudarytą iš vieno ar kelių skaitmenų, pažymėkime A. Tada $n=\overline{Ab}=10A+b$ ir $n=14A$. Gauname lygybes $14A=10A+b$ ir $b=4A$. Vadinasi, skaitmuo b dalijasi iš 4. Taigi, $b=0$, 4 arba 8.

Jei $b=0$, tai $A=0$, o $n=14A=0$ nėra natūralusis skaičius. Jei $b=4$ arba 8, tai $A=b:4=1$ arba 2 ir $n=14A=$14 arba 28. Gavome dvi skaičiaus n reikšmes. Nesunku patikrinti, kad jos tenkina uždavinio sąlygą.

24. (D) $\frac{1}{2}$

? Nagrinėkime vieną iš nupjautų tetraedro „kampų“. Vaizduotė leidžia atspėti, kad „kampas“ pats yra taisyklingasis tetraedras, kurio briaunos 2 kartus trumpesnės. Jei bet kokios erdvinės figūros visus tiesinius matmenis sumažinsime (ar padidinsime) k kartų, tai jos tūris sumažės (padidės) k^3 kartų. Todėl „kampo“ tūris yra $2^3 = 8$ kartus mažesnis už pradinio tetraedro tūrį. Turime keturis tokius pačius nukertamus „kampus“, t. y. iš pradinio tetraedro tūrio atimami jo keturi aštuntadaliai. Tada nupjovus „kampus“ lieka $1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ pradinio tūrio.



! Nagrinėkime tetraedro sieną ABC (žr. pav.). Pažymėkime $AB = AC = BC = a$. Plokštuma kerta sieną trikampio ABC kraštinių vidurio taškuose B_1 ir C_1. Todėl $AB_1 = AC_1 = \frac{a}{2}$. Be to, B_1C_1 yra trikampio ABC vidurio linija, todėl $B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. Analogiškai įrodoma, kad plokštumos nukertamo briaunainio su viršūne A likusių briaunų ilgiai lygūs $\frac{a}{2}$. Vadinasi, visos keturios šio briaunainio sienos yra lygiakraščiai trikampiai, o briaunainis yra taisyklingasis tetraedras, kurio briaunos ilgis yra $\frac{a}{2}$.

Taisyklingojo tetraedro, kurio briaunos ilgis yra x, tūris lygus $V = \frac{\sqrt{2}x^3}{12}$. Bet formulės čia žinoti nebūtina. Užtenka prisiminti ar išmąstyti, kad taisyklingąjį tetraedrą apibrėžia vienintelis parametras – briaunos ilgis x ir kad tūris (kaip trimatė charakteristika) proporcingas briaunos ilgio kubui. Todėl mažojo ir didžiojo tetraedrų tūrių santykis lygus $(\frac{a}{2})^3 : a^3 = 1 : 8$. Tokių mažųjų tetraedrų yra keturi (kiek tetraedras turi kampų), tad juos nukirtus lieka $1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ pradinio tūrio.

25. (E) 9

! Trikampio statinių ilgius pažymėkime a ir b, o įžambinės ilgį – c. Tada $a^2+b^2 = c^2$, $a+b+c = 18$ ir $a^2 + b^2 + c^2 = 128$. Reikia rasti plotą $S = \frac{1}{2}ab$.

Lengva rasti ir iš lygčių eliminuoti c:

$$128 = (a^2 + b^2) + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2, \quad c^2 = 128 : 2 = 64, \quad c = 8;$$

$$a + b = 18 - c = 10, \quad a^2 + b^2 = 64.$$

Iš gautųjų lygčių galima rasti a ir b. Bet tai būtų laiko gaišimas, reikia rasti ab. Tai padaryti lengva:

$$100 = 10^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 64 + 2ab, \quad 2ab = 100 - 64 = 36,$$

$$S = \frac{ab}{2} = 2ab : 4 = 36 : 4 = 9.$$

Pastaba. Kadangi $a + b = 10$ ir $ab = 18$, tai pagal Vijeto teoremą skačiai a ir b yra du lygties $x^2 - 10x + 18 = 0$ sprendiniai $5 \pm \sqrt{7}$.

26. (B) 28 cm

? Skriemulių A, B ir C perimetrus atitinkamai pažymėkime P_A cm, P_B cm ir $P_C = 30$ (cm).

Įsivaizdavus, kaip vienu metu sukasi du skriemuliai ir juos jungiantis diržas, galima nujausti, kad diržui sukantis (tiksliau, visiems jo kaip kreivės taškams vienu metu judant) pastoviu duotu (linijiniu) greičiu, tuo pačiu (linijiniu) greičiu judės ir kiekvieno skriemulio kraštas (visi jo taškai vienu metu). Todėl skriemulio pilno apsisukimo laikas yra proporcingas skriemulio perimetrui: kuo didesnis perimetras, tuo ilgiau jo krašto taškas keliauja ratu ir tuo mažiau kartų spėja apsisukti skriemulys per duotą laiką.

Taigi, jei diržu sujungtų skriemulių B ir C apsisukimų per tam tikrą laiką santykis yra $6 : 7$, tai jų perimetrų santykis yra atvirkščias: $P_B : P_C = 7 : 6$. Analogiškai $P_A : P_B = 4 : 5$. Tada $P_B = 7P_C : 6 = 7 \cdot 30 : 6 = 35$ (cm) ir $P_A = 4P_B : 5 = 4 \cdot 35 : 5 = 28$ (cm).

! Skriemulio kraštą ir prie to krašto priglundantį diržą galima matematiškai interpretuoti kaip iš dalies sutampančias kreives, kuriomis ratu juda taškai. Visą laiką dalis diržo taškų sutampa su skriemulio krašto taškais ir juda kartu su jais. Tokių taškų per bet kokį laiką, kurio metu jie sutampa, nueinami atstumai yra vienodi. Todėl ir visų skriemulio krašto bei diržo taškų per tą laiką nueinami atstumai yra vienodi. Ši savybė galioja bet kuriam pakankamai trumpam laiko tarpui (galima rasti per visą laiką sutampančius diržo ir skriemulio krašto taškus). Tačiau tada ji galioja bet kokiam laiko tarpui, nes jį galima padalyti į pakankamai trumpus.

Skriemulių A ir B perimetrus atitinkamai pažymėkime P_A cm ir P_B cm.

Kol skriemulys apsisuka vieną kartą, bet kuris jo krašto taškas nueina atstumą, lygų skriemulio perimetrui, todėl ir bet kuris skriemulį juosiančio diržo taškas nueina atstumą, lygų skriemulio perimetrui.

Vadinasi, kai C apsisuka 7 kartus, o B apsisuka 6 kartus, tai tuo metu B ir C jungiantis diržas (visi jo taškai) pasisuka per $7 \cdot 30$ cm arba per $6P_B$ cm. Taigi $6P_B = 7 \cdot 30$ ir $P_B = 35$ (cm). Analogiškai nagrinėdami skriemulius A ir B, gauname, kad $5P_A = 4P_B$. Todėl $P_A = 4P_B : 5 = 4 \cdot 35 : 5 = 28$ (cm).

27. (D) 56

a	$a \pm 1$	a
$a \pm 1$	a	$a \pm 1$
a	$a \pm 1$	a

? Mėginkime užpildyti lentelę bene paprasčiausiu būdu: vien skaičiais a ir $a - 1$ arba vien skaičiais a ir $a + 1$ (žr. pav.). Pirmuoju atveju $500 = 5a + 4(a - 1) = 9a - 4$, ir galima imti $a = (500 + 4) : 9 = 56$.

?? Vidurinio langelio skaičių pažymėkime a.

Jei skaičius a nelyginis, tai gretimuose keturiuose langeliuose skaičiai lyginiai, o kampiniuose keturiuose – vėl nelyginiai. Tada visų devynių skaičių, penkių nelyginių ir keturių lyginių, suma nelyginė ir nelygi 500. Vadinasi, skačius a lyginis.

Jei $a \leqslant 54$, tai skaičiai gretimuose keturiuose langeliuose ne didesni už 55, o skaičiai kampiniuose keturiuose langeliuose ne didesni už 56. Tada visų devynių skaičių suma ne didesnė už $54 + 4 \cdot 55 + 4 \cdot 56 = 498 < 500$.

Taigi, $a \geqslant 56$ ir $a \neq 57$. Iš pateiktų atsakymų tinka tik **D**.

! Vidurinio langelio skaičių pažymėkime a. Tada kiekviename iš gretimų keturių langelių turi būti vienas iš skaičių $a-1$ ir $a+1$. Kiekviename iš likusių keturių langelių turi būti vienas iš skaičių, gretimų skaičiams $a-1$ ir $a+1$, t. y. vienas iš skaičių $a-2$, a arba $a+2$. Visų devynių skaičių suma ne mažesnė už $a+4(a-1)+4(a-2)=9a-12$ ir ne didesnė už $a+4(a+1)+4(a+2)=9a+12$. Vadinasi,

$$9a-12 \leqslant 500 \leqslant 9a+12,$$

$$500-12 \leqslant 9a \leqslant 500+12, \qquad 488 \leqslant 9a \leqslant 512.$$

Tarp skaičių 488 ir 512 yra du skaičiai, dalūs iš 9: arba $9a=495$, arba $9a=504$.

Kaip ir **??** dalyje, įrodome, kad skaičius a turi būti lyginis. Todėl $9a=504$ ir $a=\frac{504}{9}=56$. (Pavyzdį, kad ši reikšmė galima, radome **?** dalyje.)

28. Ⓔ 2017

! Paskaičiuokime kelis pirmuosius sekos narius. Turime

$$a_2=\frac{a_1-1}{a_1}=\frac{2016}{2017},$$

$$a_3=\frac{a_2-1}{a_2}=\left(\frac{2016}{2017}-1\right):\frac{2016}{2017}=\left(-\frac{1}{2017}\right)\cdot\frac{2017}{2016}=-\frac{1}{2016},$$

$$a_4=\frac{a_3-1}{a_3}=\left(-\frac{1}{2016}-1\right):\left(-\frac{1}{2016}\right)=\left(-\frac{2017}{2016}\right)\cdot(-2016)=2017.$$

Pastebėkime, kad $a_4=a_1$. Tada $a_5=\frac{a_4-1}{a_4}=\frac{a_1-1}{a_1}=a_2$, analogiškai, $a_6=a_3$, $a_7=a_4=$ $=a_1$, $a_8=a_5=a_2$, ir t. t. Taigi, sekos nariai kartojasi kas tris.

Kadangi $2017-1=2016$ dalijasi iš 3 (pavyzdžiui, pagal dalumo iš 3 požymį), tai $a_{2016}=$ $=a_{2013}=a_{2010}=\ldots=a_6=a_3$. Tada $a_{2017}=a_{2016+1}=a_{3+1}=a_4=a_1=2017$.

29. Ⓔ 21

! Dvejeto laipsniai yra $1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,\ldots$ Matome, kad triženkliai skaičiai yra $128=2^7$, $256=2^8$ ir $512=2^9$.

Jei skaičius $(a+b)^c$ yra dvejeto laipsnis, tai $a+b$ nesidalija iš jokio nelyginio pirminio skaičiaus, todėl taip pat yra dvejeto laipsnis. Kadangi $a+b\leqslant 9+9=18$, tai $a+b=1$, 2, 4, 8 arba 16. Nepamirškime, kad pirmasis skaičiaus $\overline{abc}$ skaitmuo a nelygus 0.

1) Jei $a+b=1$, tai $(a+b)^c=1$ nėra triženklis skaičius.

2) Jei $a+b=2$, tai $(a+b)^c=2^c$, ir $c=7$, 8 arba 9 (3 galimybės). Tada $(a,b)=(1,1)$ arba $(2,0)$ (2 galimybės). Turime $3\cdot 2=6$ galimybes.

3) Jei $a+b=4=2^2$, tai $(a+b)^c=2^{2c}$, ir $2c=7$, 8 arba 9. Tinka tik $2c=8$. Tada $c=4$ ir $(a,b)=(1,3),(2,2),(3,1)$ arba $(4,0)$. Turime 4 galimybes.

4) Jei $a+b=8=2^3$, tai $(a+b)^c=2^{3c}$, ir $3c=7$, 8 arba 9. Tinka tik $3c=9$. Tada $c=3$ ir $(a,b)=(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1)$ arba $(8,0)$. Turime 8 galimybes.

5) Jei $a+b=16=2^4$, tai $(a+b)^c=2^{4c}$, ir $4c=7$, 8 arba 9. Tinka tik $4c=8$. Tada $c=2$ ir $(a,b)=(7,9),(8,8)$ arba $(9,7)$. Turime 3 galimybes.

Iš viso gavome $6+4+8+3=21$ galimybę, koks gali būti skaičius $\overline{abc}$.

30. (A) 1683

! Matematikus ir niektauzas atitinkamai žymėkime raidėmis M ir N.

Šventėje galėjo dalyvauti tik niektauzos. Tada susirinkusių niektauzų yra mažiausiai 1001, o matematikų saloje yra daugiausiai $2017-1001=1016$.

Toliau tarkime, kad šventėje dalyvavo bent vienas matematikas M_1. Kadangi jis nesumelavo, tai stovėjo tarp matematiko M_2 ir niektauzos N_1. Rate turime gretimų žmonių grupę $M_2M_1N_1$. Kadangi N_1 sumelavo, tai jis stovi tarp dviejų tokių pačių žmonių: tarp matematiko M_1 ir matematiko M_3. Kadangi M_3 nesumelavo, tai jis stovi tarp niektauzos N_1 ir matematiko M_4. Kadangi M_4 nesumelavo, tai jis stovi tarp matematiko M_3 ir niektauzos N_2. Gauname grupę $M_2M_1N_1M_3M_4N_2$. Įrodėme, kad rate po dviejų matematikų ir niektauzos vėl eina du matematikai ir niektauza. Analogiškai gauname, kad ir po šių trijų žmonių vėl eina du matematikai ir niektauza, ir t. t. Vadinasi, rate niektauza yra kas trečias žmogus.

Jei ratą sudaro n žmonių, tai niektauzų jame yra $\frac{n}{3}$, o matematikų jame yra $\frac{2n}{3}$. Skaičius n dalijasi iš 3. Daugiausiai matematikų saloje gausime, tardami, kad visi šventėje nedalyvavę $2017-n$ žmonių yra matematikai. Todėl matematikų saloje gali būti daugiausiai $k=\frac{2n}{3}+$ $+(2017-n)=2017-\frac{n}{3}$. Matome, kad jų bus tuo daugiau, kuo mažesnis skaičius $n>$ >1000. Kadangi n dalijasi iš 3, tai mažiausia galima n reikšmė yra 1002. Tada $\frac{n}{3}=334$ ir $k=2017-334=1683$. Tiek matematikų galėtų būti: jei tokiu atveju į šventę susirenka 668 matematikai ir visi 334 niektauzos, o tada niektauzos užima rate kas trečią poziciją, tai uždavinio sąlyga tenkinama.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	A
2	E
3	C
4	A
5	C
6	B
7	A
8	C
9	B
10	B
11	A
12	E
13	E
14	D
15	A
16	D
17	E
18	C
19	E
20	D
21	D
22	E
23	C
24	D
25	E
26	B
27	D
28	E
29	E
30	A