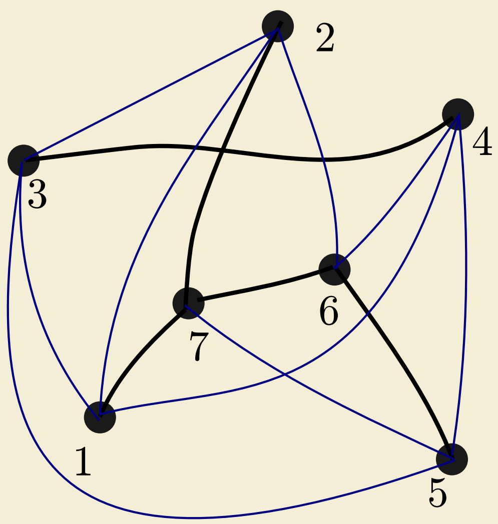
Kengūra 2014

Užduotys ir sprendimai



Junioras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2014

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavimas
Paulius Šarka

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašas **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Junioro užduočių sprendimai **13**

Atsakymai **26**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje*.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 56000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2014 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2014 metų kovo 20 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Aivaras Novikas
Romualdas Kašuba

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Skalmantas Šimėnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	110,75
Paulius Andzelis,	Jėzuitų gimnazija,	Kauno m.,	108,50
Dovydas Dzežulskis,	Grinkiškio Jono Poderio vidurinė mokykla,	Radviliškio r.,	105,00
Nojus Esteris,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	104,75
Benjaminas Venslovas,	Utenos Adolfo Šapokos gimnazija,	Utenos r.,	104,75
Paulius Poviliauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	104,75
Rokas Mizeikis,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	103,75
Ignas Masiulionis,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	103,50
Aurimas Klimašauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	102,50
Vidas Parnarauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	102,00
Kajus Panevežys,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	101,00
Zigmas Bitinas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	100,75
Arnoldas Čiplys,	Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,	Širvintų r.,	100,00
Justas Tamulis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	99,25
Matas Valiukas,	Jokūbavo Aleksandro Stulginskio pagrindinė mokykla,	Kretingos r.,	98,00
Gustas Buividavičius,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav.,	97,50
Tomas Dailidonis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	97,50
Simas Kasparavičius,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	96,25
Žymantas Klovas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	96,00
Kasparas Ragaišis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	95,75
Džiugas Šimaitis,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	95,75
Eimantas Ramonas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	95,50
Aistis Ščerbavičius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	94,75
Simas Kaminskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	93,75
Timas Saltanavičius,	„Gabijos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	92,50
Aleksandra Ševeliova,	„Juventos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	92,50
Ignas Pelakauskas,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	91,50
Darius Kurtinaitis,	Jono Jablonskio gimnazija,	Kauno m.,	90,75
Marius Balandis,	Ukmergės Antano Smetonos gimnazija,	Ukmergės r.,	90,00
Artūras Jocas,	Stasio Šalkauskio gimnazija,	Šiaulių m.,	90,00
Martynas Stankevičius,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	90,00
Martynas Daugiala,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	89,75
Rugilė Abukauskaitė,	Kalvarijos gimnazija,	Kalvarijos sav.,	89,50
Augustas Krivickas,	Jono Basanavičiaus gimnazija,	Kauno m.,	89,00
Tomas Tenenė,	Jotvingių gimnazija,	Alytaus m.,	88,75
Vilius Kaulinskas,	Užupio gimnazija,	Vilniaus m.,	88,75
Ervinas Bernatavičius,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	88,50
Paulius Marcinkus,	„Romuvos“ gimnazija,	Šiaulių m.,	87,50
Vykintas Pliavga,	Juozo Balčikonio gimnazija,	Panevėžio m.,	87,25
Meigardas Lavickas,	Lieporių gimnazija,	Šiaulių m.,	86,25
Kasparas Lienys,	Telšių Žemaitės gimnazija,	Telšių r.,	86,25
Neringa Čypaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	86,25
Danielius Rugienius,	Jono Jablonskio gimnazija,	Kauno m.,	86,25
Kipras Mikiška,	Trakų Vytauto Didžiojo gimnazija,	Trakų r.,	86,25
Audrius Liuberskis,	„Saulės“ gimnazija,	Kauno m.,	86,00
Aistė Grušnytė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	86,00
Donata Budreikaitė,	„Ąžuolyno“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	85,75
Matas Jankauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	85,75
Jonas Pukšta,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	85,25
Matas Norvilas,	„Romuvos“ gimnazija,	Šiaulių m.,	85,00
Romualdas Kondratovičius,	„Ateities“ vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	85,00

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Paulius Saulėnas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	138,75
Andrius Ovsianas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	121,00
Akvilė Viršilaitė,	Skuodo Pranciškaus Žadeikio gimnazija,	Skuodo r.,	115,00
Eva Derengovska,	Eišiškių gimnazija,	Šalčininkų r.,	113,75
Vaiva Augustinaitė,	Žemaičių Kalvarijos vidurinė mokykla,	Plungės r.,	111,00
Justina Milišauskaitė,	Tauragės „Versmės“ gimnazija,	Tauragės r.,	109,25
Edvinas Aleksandravičius,	Šiaulių universiteto gimnazija,	Šiaulių m.,	108,75
Taisija Demčenko,	Naujamiesčio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	107,75
Aurimas Morozovas,	Jono Basanavičiaus gimnazija,	Kauno m.,	106,00
Justė Dilytė,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	104,25
Adriana Vilkaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	103,50
Aistė Kudulytė,	Jėzuitų gimnazija,	Vilniaus m.,	103,50
Antanas Kalkauskas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	103,50
Lukas Naruševičius,	5-oji gimnazija,	Panevėžio m.,	102,25
Enrikas-Juozas Gustaitis,	Gižų Kazimiero Baršausko pagrindinė mokykla,	Vilkaviškio r.,	102,25
Daniel Rogoža,	Eišiškių gimnazija,	Šalčininkų r.,	102,00
Haroldas Kogstas,	Klaipėdos Vydūno gimnazija,	Klaipėdos m. sav.,	102,00
Julius Alešūnas,	Juliaus Janonio gimnazija,	Šiaulių m.,	101,00
Deividas Morkūnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	101,00
Vilius Buividavičius,	Rūdiškių gimnazija,	Trakų r.,	100,50
Lukas Gylys,	Klaipėdos licėjus,	Klaipėdos m.,	98,75
Povilas Navickas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	97,50
Einaras Sipavičius,	Kėdainių „Šviesioji“ gimnazija,	Kėdainių r.,	97,50
Gabrielė Navickaitė,	Lieporių gimnazija,	Šiaulių m.,	97,25
Gediminas Jacunskas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	97,25
Margiris Burakauskas,	Juliaus Janonio gimnazija,	Šiaulių m.,	97,00
Eimantas Puodžiūnas,	„Žemynos“ gimnazija,	Klaipėdos m.,	96,25
Rūta Raškevičiūtė,	Lentvario Motiejaus Šimelionio gimnazija,	Trakų r.,	96,25
Pavel Novicki,	Simono Konarskio vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	96,25
Grantas Narbutas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	96,00
Mantas Šepetys,	„Gabijos“ gimnazija,	Vilniaus m.,	96,00
Justas Meškys,	Telšių „Džiugo“ gimnazija,	Telšių r.,	95,75
Katažyna Michnevič,	Vladislavo Sirokomlės vidurinė mokykla,	Vilniaus m.,	95,00
Kostas Strielkūnas,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	95,00
Justinas Žemaitis,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	95,00
Edvinas Repečka,	„Aušros“ gimnazija,	Kauno m.,	95,00
Ugnė Latvėnaitė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	94,75
Martynas Žilionis,	Kaišiadorių Algirdo Brazausko gimnazija,	Kaišiadorių r.,	94,50
Liudvikas Čiapas,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	94,50
Elvinas Ribinskas,	Mažeikių Gabijos gimnazija,	Mažeikių r.,	94,50
Tadas Žaliauskas,	Marijampolės marijonų gimnazija,	Marijampolės sav.,	94,25
Miglė Šiaučiulytė,	Vilniaus licėjus,	Vilniaus m.,	94,25
Šarūnas Kilius,	Kauno technologijos universiteto gimnazija,	Kauno m.,	93,75
Paulius Vaštakas,	Kamajų Antano Strazdo gimnazija,	Rokiškio r.,	93,75
Jurgis Vaiginis,	Vilniaus šv. Kristoforo gimnazija,	Vilniaus m.,	93,75
Karolis Staskevičius,	Zarasų „Ąžuolo“ gimnazija,	Zarasų r.,	93,75
Milda Vaišnoraitė,	Kazlų Rūdos Kazio Griniaus gimnazija,	Kazlų rūdos sav.,	93,50
Aušrinė Aglinskaitė,	Utenos Adolfo Šapokos gimnazija,	Utenos r.,	93,25
Lukas Šalavejus,	„Romuvos“ gimnazija,	Šiaulių m.,	93,00
Marius Kurbakovas,	Jotvingių gimnazija,	Alytaus m.,	92,50
Pijus Stankevičius,	Jono Jablonskio gimnazija,	Kauno m.,	92,50
Gintautas Lasevičius,	Kaišiadorių Algirdo Brazausko gimnazija,	Kaišiadorių r.,	92,50

Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

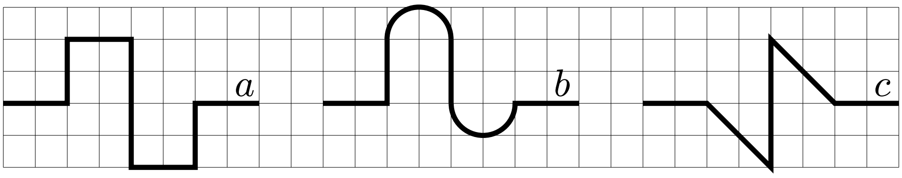
2014 m. Junioro užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kasmet „Kengūros“ konkursas vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kokia yra anksčiausia galima konkurso data?
A) Kovo 14 d. **B)** Kovo 15 d. **C)** Kovo 20 d. **D)** Kovo 21 d. **E)** Kovo 22 d.

2. Konteinervežis „Fabiola“ gali pervežti 12500 konteinerių, kurie sudėti vienas po kito nusidriektų 75 km. Kam lygus vidutinis vieno konteinerio ilgis?
A) 6 m **B)** 16 m **C)** 60 m **D)** 160 m **E)** 600 m

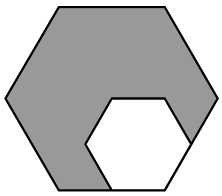
3. Kurios iš šių nelygybių galioja pavaizduotų linijų ilgiams a, b ir c?



A) $a < b < c$ **B)** $a < c < b$ **C)** $b < a < c$ **D)** $b < c < a$ **E)** $c < b < a$

4. Koks skaičius yra skaičių tiesėje tiksliai viduryje tarp skaičių $\frac{2}{3}$ ir $\frac{4}{5}$?
A) $\frac{11}{15}$ **B)** $\frac{7}{8}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{6}{15}$ **E)** $\frac{5}{8}$

5. Šiemet metus žyminčio skaičiaus 2014 paskutinis skaitmuo didesnis už kitų trijų skaitmenų sumą. Prieš kiek metų taip buvo nutikę paskutinį kartą?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11



6. Didžiojo taisyklingojo šešiakampio kraštinė dvigubai ilgesnė nei mažojo (žr. pav.). Mažojo šešiakampio plotas lygus 4. Koks yra didžiojo šešiakampio plotas?
A) 16 **B)** 14 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 8

7. Teiginys „Kiekvienas išsprendė daugiau kaip 20 uždavinių“ klaidingas. Tai reiškia, kad teisingas toks priešingas teiginys:
A) Niekas neišsprendė daugiau kaip 20 uždavinių
B) Kažkas išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį
C) Kiekvienas išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį
D) Kažkas išsprendė lygiai 20 uždavinių
E) Kažkas išsprendė daugiau kaip 20 uždavinių

8. Dvi priešingos kvadrato viršūnės yra Ox ašies taškai $(-1;0)$ ir $(5;0)$. Kuris taškas taip pat yra šio kvadrato viršūnė?
A) $(2;0)$ **B)** $(2;3)$ **C)** $(2;-6)$ **D)** $(3;5)$ **E)** $(3;-1)$

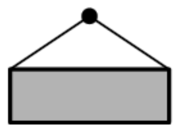
9. Barzdogaloje gyvenančių mėlynbarzdžių ir žaliabarzdžių barzdukų santykis yra $2:3$, o žaliabarzdžių bei kol kas bebarzdžių barzdukų – $8:1$. Kitokių barzdukų Barzdogaloje nėra. Koks yra barzdotų ir bebarzdžių Barzdogalos barzdukų santykis?
A) $5:1$ **B)** $10:3$ **C)** $13:1$ **D)** $12:1$ **E)** $40:3$

10. Dviračio didžiojo rato perimetras lygus 4,2 m, o mažojo rato – 0,9 m. Dviračiui ėmus judėti tiesiai, abiejų ratų vožtuvai buvo savo žemiausiose padėtyse. Kiek mažiausiai metrų nuriedės dviratis, kol vožtuvai ir vėl vienu metu atsidurs ratų apačioje?
A) 4,2 **B)** 6,3 **C)** 12,6 **D)** 25,2 **E)** 37,8

Klausimai po 4 taškus

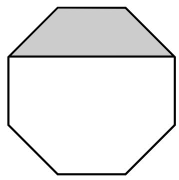
11. Šiemet senelės ir jos dukters bei anūkės amžių (metais) suma lygi 100, o kiekvienas iš tų amžių yra dvejeto laipsnis. Kuriais metais gimė anūkė?
A) 1998 **B)** 2006 **C)** 2010 **D)** 2012 **E)** 2013

12. Paulius ant sienos pakabino kelis stačiakampius paveikslus. Kiekvienas iš jų tiesiai kabo ant 2,5 m aukštyje esančios vinies ir jo viršutinius kampus jungiančios 2 m virvės (žr. pav.). Kurių matmenų (plotis $\times$ aukštis centimetrais) paveikslas kabo arčiausiai grindų?
A) 60×40 **B)** 120×50 **C)** 120×90 **D)** 160×60 **E)** 160×100



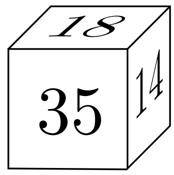
13. Šešios studentės bendrabutyje kas rytą pabunda 7 valandą, prausiasi, o tada kartu sėda pusryčiauti. Jos gali naudotis dviem vonios kambariais. Į vonios kambarį studentės eina po vieną, o prausiasi atitinkamai po 9, 11, 13, 18, 22 ir 23 minutes. Kada anksčiausiai studentės gali pradėti pusryčiauti?
A) 7:48 **B)** 7:49 **C)** 7:50 **D)** 7:51 **E)** 8:03

14. Užtušuotosios taisyklingojo aštuonkampio dalies plotas lygus 3 (žr. pav.). Kam lygus paties aštuonkampio plotas?
A) $8+4\sqrt{2}$ **B)** 9 **C)** $8\sqrt{2}$ **D)** 12 **E)** 14



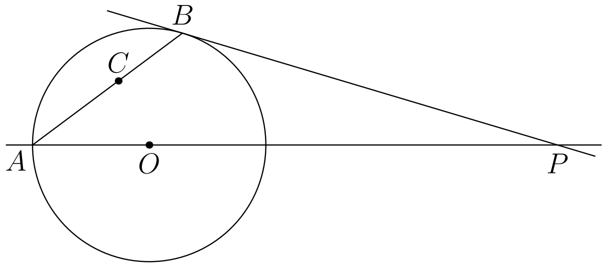
15. Kengūros draugo Krokodilo uodega trissyk trumpesnė nei visas Krokodilas. Jo galva yra 93 cm ilgio ir yra keturissyk trumpesnė nei Krokodilas be uodegos. Kam lygus Krokodilo (su uodega) ilgis centimetrais?
A) 558 **B)** 496 **C)** 490 **D)** 372 **E)** 186

16. Paveikslėlyje pavaizduoto kubo trys nematomos sienos pažymėtos pirminiais skaičiais. Bet kurių dviejų priešingų sienų skaičių suma yra ta pati. Kokia yra kairiosios sienos skaičiaus (esančio priešais 14) skaitmenų suma?



A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

17. Tiesė PA eina per apskritimo centrą O, o tiesė PB liečia apskritimą (žr. pav.). Tiesė, dalijanti kampą APB pusiau, kerta atkarpą AB taške C. Raskite kampą BCP.



A) 30° **B)** 45° **C)** 60° **D)** 75° **E)** Kampas priklauso nuo taško P padėties

18. Dėdė Balys sulošė 40 šachmatų partijų ir pelnė 25 taškus (už pergalę skiriamas taškas, už lygiąsias pusė taško, už pralaimėjimą 0 taškų). Keliomis partijomis jis laimėjo daugiau nei pralaimėjo?

A) 5 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

19. Seserys trynukės Jorė, Petrė ir Esterė norėjo nusipirkti po tokį pat skėtį. Tačiau joms trūko pinigų: Jorei trečdalio skėčio kainos, Petrei – ketvirtadalio, o Esterei – penktadalio. Kai skėtis atpigo 9,40 Lt, trynukės sumetė santaupas krūvon ir įsigijo po skėtį, bet liko visai be pinigų. Kokia buvo pradinė skėčio kaina?

A) 12 Lt **B)** 16 Lt **C)** 28 Lt **D)** 36 Lt **E)** 112 Lt

20. Natūralieji skaičiai p, q, r tenkina lygybę $p + \dfrac{1}{q + \frac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$. Kam lygi suma $p + q + r$?

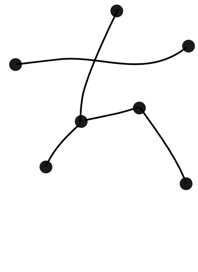
A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 13 **E)** 14

Klausimai po 5 taškus

21. Keliais būdais raides lygybėje $N \times E \times (D + A + U + G) = 33$ galima pakeisti skirtingais skaitmenimis, kad lygybė būtų teisinga?

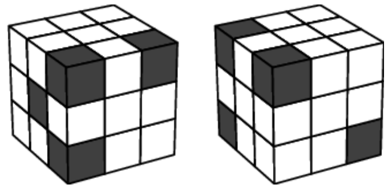
A) 12 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 48 **E)** 60

22. Ramunė pažymėjo 7 taškus ir sujungė kai kuriuos iš jų (žr. pav.). Žibuoklė nori, kad kiekvienas taškas būtų sujungtas su tiek pat kitų taškų. Kiek mažiausiai linijų, jungiančių pažymėtų taškų poras, turi papildomai nubrėžti Žibuoklė?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 10

23. Iš 27 vienetinių kubelių, nudažytų juodai arba baltai, sudėtas kubas. Paveikslėlyje jis pavaizduotas iš dviejų skirtingų pusių. Kiek daugiausiai juodų kubelių gali būti kube?
A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10



24. Miške dirba mėlynbarzdžiai ir žaliabarzdžiai barzdukai. Per 100 metų mėlynbarzdžių skaičius miške išaugo 60%, o žaliabarzdžių − sumažėjo 60%. Dabar mėlynbarzdžiai ėmė sudaryti tokią visų miško barzdukų dalį, kokią prieš šiuos pokyčius sudarė žaliabarzdžiai. Keliais procentais pakito visų barzdukų skaičius?
A) 0% **B)** 20% **C)** 30% **D)** 40% **E)** 50%

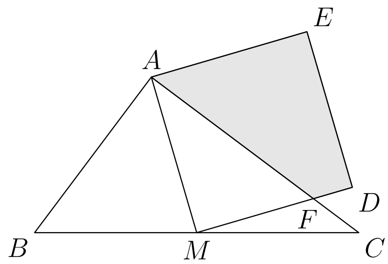
25. Skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių kaip 100, sandauga nesidalija iš 18. Kiek daugiausiai skaičių galėjo būti sudauginta?
A) 5 **B)** 17 **C)** 68 **D)** 69 **E)** 90

26. Sujungus tris duoto kubo viršūnes atkarpomis gautas trikampis, nepriklausantis jokiai kubo sienai. Kiek yra tokių trikampių?
A) 16 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 40 **E)** 48

27. Lygybėse $k = \sqrt[n]{2014 + m} = \sqrt[n]{1024} + 1$ skaičiai k, m, n yra natūralieji. Be to, $2 < n < 10$. Kokia yra skaičiaus m skaitmenų suma?
A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

28. Gražinai gražus tik toks septynženklis natūralusis skaičius, kuriame yra visi skaitmenys 1, 2, 3,..., 7. Gražina visus jai gražius septynženklius skaičius surašė didėjimo tvarka. Koks skaičius yra paskutinis pirmoje Gražinos sąrašo pusėje?
A) 1234567 **B)** 3765421 **C)** 4123567 **D)** 4352617 **E)** 4376521

29. Kvadrato $AMDE$ kraštinė AM yra trikampio ABC pusiaukraštinė (žr. pav.). Be to, $AB = 6$, $AC = 8$ ir $BC = 10$. Raskite užtušuoto keturkampio $AFDE$ plotą.
A) $\frac{124}{8}$ **B)** $\frac{125}{8}$ **C)** $\frac{126}{8}$ **D)** $\frac{127}{8}$ **E)** $\frac{128}{8}$



30. Į eilę sustojo 2014 žmonių. Kiekvienas iš jų yra arba niekada nemeluojantis tiesuolis, arba visada meluojantis melagis. Vienas po kito visi šie žmonės pareiškė: „Man iš kairės stovi daugiau melagių, nei iš dešinės tiesuolių.“ Kiek melagių stovi eilėje?
A) 0 **B)** 1 **C)** 1007 **D)** 1008 **E)** 2014

Junioro užduočių sprendimai

1. (B) Kovo 15 d.

! Jei pirmasis kovo ketvirtadienis ateis tiek anksti, kiek tik galima, t. y. kovo 1-ąją, tai ir trečiasis, kurį nuo pirmojo skiria lygiai 2 savaitės arba 14 dienų, išauš anksčiausiai – kovo 15-ąją ($1 + 14 = 15$). Abejojantiems, ar ši data galima, primename, kad kovo 15 d. buvo ketvirtadienis 2012 metais.

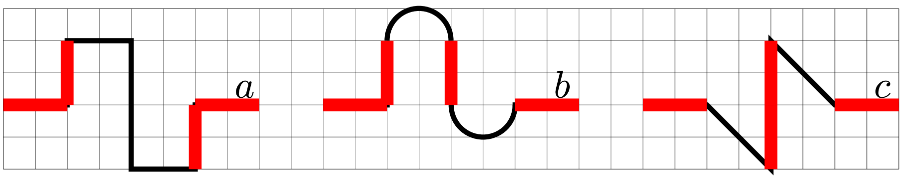
2. (A) 6 m

! Vidutinis konteinerio ilgis lygus bendro konteinerių ilgio ir konteinerių skaičiaus santykiui. Kadangi atsakymai pateikti metrais, iš karto pereikime prie metrų, o tada prastinkime gautąją trupmeną:

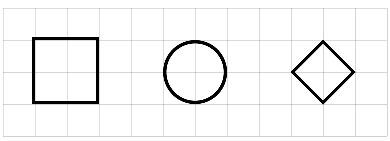
$$\frac{75}{12500}(\mathrm{km}) = \frac{75000}{12500}(\mathrm{m}) = \frac{750}{125} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10}{5 \cdot 25} = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6(\mathrm{m}).$$

3. (E) $c < b < a$

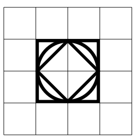
? Galimas visiškai geometrinis uždavinio sprendimas. Atmeskime paryškintas linijų dalis, linijų ilgį sumažindami po tiek pat:



Iš likusių atkarpų sudarykime naujas figūras (du kvadratus ir apskritimą):



ir sustumkime juos draugėn:



Nesunku nuspėti iš brėžinio, kad viena į kitą įbrėžtų trijų figūrų perimetrai mažėja.

! Langelio kraštinės ilgį galime laikyti lygiu 1.

- Pirmąją liniją sudaro 7 tiesios atkarpos: $a = 2+2+2+4+2+2+2 = 16$.
- Antrąją liniją sudaro 4 tiesios atkarpos ir du spindulio 1 pusapskritimiai. Puspaskritimio ilgis lygus pusei apskritimo ilgio: $2\pi \cdot 1/2 = \pi$. Tad $b = 2+2+\pi+2+\pi+2 = 8+2\pi$.
- Trečiąją liniją sudaro 5 tiesios atkarpos. Dvi yra įstrižos, kiekvienos iš jų ilgis randamas pagal Pitagoro teoremą: $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Tad $c = 2+2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}+2 = 8+4\sqrt{2}$.

Palyginti a, b, c tas pats, kaip palyginti $a-8, b-8, c-8$ arba $(a-8)/2, (b-8)/2, (c-8)/2$, t. y. palyginti skaičius $4, \pi = 3{,}14\ldots, 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$. Kadangi $4 > 3{,}2 > \pi > 3 = \sqrt{9} > \sqrt{8}$, tai $a > b > c$.

4. (A) $\dfrac{11}{15}$

! Per vidurį tarp dviejų skaičių yra jų (aritmetinis) vidurkis:

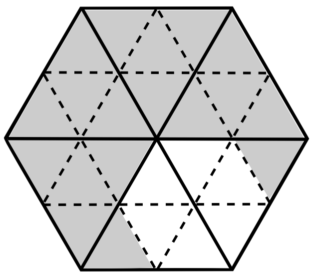
$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{10}{15}+\frac{12}{15}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{22}{15}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{15}.$$

5. (C) 5

! Iš eilės tikrinkime metus: $2+0+1 \geq 3, 2+0+1 \geq 2, 2+0+1 \geq 1, 2+0+1 \geq 0, 2+0+0 < 9$. Tinka 2009-ieji – taip buvo prieš $2014 - 2009 = 5$ metus.

6. (A) 16

? Iš brėžinio nesunku atspėti, kad didįjį šešiakampį galima padalyti į 6 vienodus lygiakraščius trikampius, o kiekvieną iš jų į 4 mažesnius (žr. pav.).



Mažąjį šešiakampį sudaro 6 trikampėliai, o didįjį – 24. Taigi ieškomas plotas yra $24 : 6 = 4$ kartus didesnis nei duotasis. Jis lygus $4 \cdot 4 = 16$.

! Jei plokštumoje turime dvi panašias (visiškai vienodos formos, tik galbūt skirtingo dydžio figūras) ir koks nors tiesinis tų figūrų matmuo (figūros tam tikros dalies ilgis, bet ne plotas; pvz., daugiakampio kraštinės ilgis) yra vienos figūros k kartų didesnis nei kitos, tai plotų santykis bus k^2.

Šiuo atveju $k = 2$, tad ieškomas plotas bus $k^2 = 4$ kartus didesnis nei duotasis ir lygus $4 \cdot 4 = 16$.

Nežinant šio fakto, mąstyti galima taip. Taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti į apskritimą. Iš jo centro išvedę spindulius į daugiakampio viršūnes gauname vienodus lygiašonius trikampius. Šešiakampio atveju jie bus lygiakraščiai, nes kiekvieno iš jų kampas prie viršūnės lygus $360°/6 = 60°$, o tada ir jų kampai prie pagrindo lygūs po $(180° - 60°)/2 = 60°$. Jei mažojo šešiakampio kraštinės ilgis yra a, tai jo plotas lygus 6 trikampių plotų sumai: $6 \cdot \frac{a \cdot a \cdot \sin 60°}{2} = 4$. Panašiai didžiojo šešiakampio plotas lygus $6 \cdot \frac{2a \cdot 2a \cdot \sin 60°}{2} = 4 \cdot 6 \cdot \frac{a \cdot a \cdot \sin 60°}{2} = 4 \cdot 4 = 16$. Matome, kad plotas padidėjo keturgubai, nes jis priklausė nuo dviejų tiesinių matmenų $(a \cdot a)$, kurių kiekvienas padidėjo dvigubai.

7. B Kažkas išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį

! Teiginys **E** net neprieštarauja duotajam, todėl, žinoma, nėra priešingas. Kiti teiginiai duotajam prieštarauja, tačiau priešingas tėra vienas iš jų – tas, kuris tik paneigia duotąjį, bet nieko daugiau nei tas paneigimas nepasako. Juk kitaip nebūtų galima sakyti „Tai reiškia, kad...“.

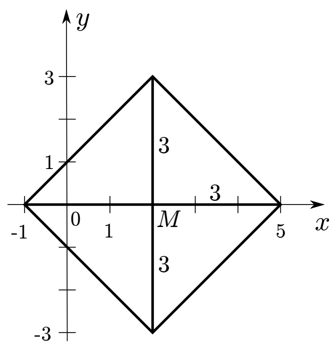
Jei kažkas vienas išsprendė 21 uždavinį, o visi kiti po lygiai 19 uždavinių, tai bus klaidingas tiek duotasis teiginys, tiek teiginiai **A**, **C**, **D**. Vadinasi, šie teiginiai prieštarauja ne vien duotajam, bet paneigia ir tam tikrų kitų situacijų galimybę. Jie nėra priešingi.

Duotasis teiginys ir teiginys **B** priešingi. Jie prieštarauja vienas kitam, ir jei klaidingas vienas, tai **neišvengiamai** teisingas kitas: arba visi sprendusieji pasižymi tam tikra savybe (išsprendė daugiau kaip 21 uždavinį), arba kažkas ja nepasižymi (tiek uždavinių neišsprendė, t.y. išsprendė mažiau kaip 21 uždavinį).

8. B $(2; 3)$

! Turime vienos iš kvadrato įstrižainių galus. Neverta nagrinėti kvadrato kraštinių, jų padėties ar ilgių. Pakaks ir jo įstrižainių. Raskime kvadrato centrą, dalijantį abi įstrižaines pusiau. Kadangi duotieji įstrižainės galai yra Ox ašyje, tai ir centras bus joje, per vidurį tarp tų galų. Jo x koordinatė lygi atitinkamų koordinačių vidurkiui $\frac{(-1)+5}{2} = 2$. Turime tašką $M(2; 0)$.

Viena įstrižainė yra Ox ašyje, horizontali. Kita yra jai statmena, todėl vertikali, lygiagreti Oy ašiai. Vertikalioje tiesėje esantys taškai turi tą pačią x koordinatę. Ieškomos kitos dvi kvadrato viršūnės bus vienoje tokioje tiesėje su tašku M ir todėl turės pavidalą $(2; ?)$. Dešinės viršūnės atstumas iki centro lygus $5 - 2 = 3$ (žr. pav.):



Visų viršūnių atstumas iki kvadrato centro turi būti toks pats. Taško, iškilusio virš Ox ašies per 3, y koordinatė lygi 3, o jam simetriško, esančio po ašimi, turi būti lygi -3. Gauname viršūnes $(2; 3)$ ir $(2; -3)$. Tarp atsakymų randame pirmąją iš jų.

9. (E) 40 : 3

! Abiejuose santykiuose figūruoja žaliabarzdžiai barzdukai. Suvienodinkime juos atitinkančius skaičius (iš 8 ir 3 gaukime 24) abiejuose santykiuose: $2 : 3 = 16 : 24$ ir $8 : 1 = 24 : 3$. Gavome, kad 3 bebarzdžiams barzdukams tenka 24 žaliabarzdžiai, o šiems – 16 mėlynbarzdžių. Vadinasi, 3 bebarzdžiams barzdukams iš viso tenka $24 + 16 = 40$ barzdotų. Radome ieškomą santykį 40 : 3.

10. (C) 12,6

! Ieškomą atstumą pažymėkime x (m). Kol didysis ratas apsisuka vieną kartą, dviratis nurieda 4,2 m. Taip pat kol mažasis ratas apsisuka vieną kartą, dviratis nurieda 0,9 m. Kad vožtuvai atsidurtų pradinėse pozicijose, abu ratai turi apsisukti po sveikąjį skaičių kartų. T. y. x yra toks mažiausias teigiamas skaičius, kad abu skaičiai $a = \frac{x}{4{,}2}$ ir $b = \frac{x}{0{,}9}$, pasakantys, kiek kartų apsisuko ratai, yra sveikieji. Iš eilės nuo mažiausios tikrinkime sveikąsias a ir atitinkamas $x = 4{,}2a$ reikšmes 1, 2, 3,... ir 4,2, 8,4, 12,6,... Atitinkamos b reikšmės bus

$$\frac{4{,}2}{0{,}9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}, \qquad \frac{8{,}4}{0{,}9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}, \qquad \frac{12{,}6}{0{,}9} = \frac{126}{9} = 14.$$

Pirmąją sveikąją reikšmę gavome, kai $x = 12{,}6$. Tai yra ieškomas atsakymas (vienas ratas apsisuks $a = 3$ kartus, kitas $b = 14$ kartų).

11. (C) 2010

? Atsakymą atspėti nesunku. Ieškomi amžiai gali būti 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 (kitas dvejeto laipsnis 128 jau per didelis). Pradėkime ne nuo anūkės, o nuo senelės. Spėkime, kad jos amžius yra didžiausias: 64 metai (pagaliau juk vargu ar senelei bus tik 32-eji). Dukteriai ir anūkei lieka 36 metai. Dukteriai vėl priskyrę didžiausią galimą amžių (32 metus), gausime, kad anūkei 4-eri. Ši situacija įmanoma, ir tokiu atveju anūkė gimė $2014 - 4 = 2010$ m.

! Įrodykime, kad anūkės amžius negali būti kitoks. Reikia užrašyti skaičių 100 kaip trijų skirtingų dvejeto laipsnių sumą: $100 = 2^a + 2^b + 2^c, a > b > c$. Anūkės amžius turi būti mažiausias iš trijų, t. y. 2^c. Abi lygybės puses užrašykime kaip dvejeto laipsnio ir nelyginio skaičiaus sandaugą: $100 = 2^2 \cdot 25$ ir $2^a + 2^b + 2^c = 2^c(2^{a-c} + 2^{b-c} + 1)$. Matome, kad anūkės amžius yra $2^c = 2^2 = 4$. Kitaip tariant, mažiausias iš dvejeto laipsnių turi būti 4, nes 100 dalijasi iš 4, bet ne iš 8.

Pastebėsime, kad pasinaudojus šia įrodymo idėja, kaip skirtingų dvejeto laipsnių sumą galima užrašyti bet kurį natūralųjį skaičių bei įrodyti, kad tuos laipsnius galima parinkti vieninteliu būdu. Pvz., padarykime tai skaičiui 210:

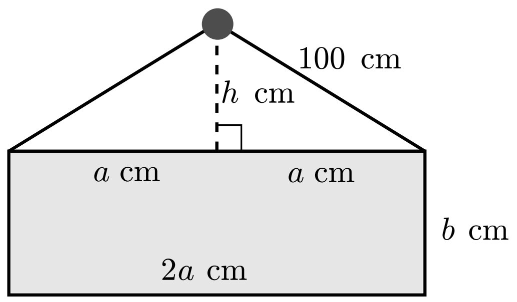
$$210 = 2^1 \cdot 105 = 2^1 + 208 = 2^1 + 2^4 \cdot 13 = 2^1 + 2^4 + 192 = 2^1 + 2^4 + 2^6 \cdot 3 =$$

$$= 2^1 + 2^4 + 2^6 + 128 = 2^1 + 2^4 + 2^6 + 2^7.$$

Pastaruoju faktu pagrįsta ir informatikoje svarbi galimybė kiekvieną skaičių vieninteliu būdu užrašyti dvejetainėje skaičiavimo sistemoje.

12. (C) 120×90

! Kadangi visos vinys yra tame pačiame aukštyje, tai arčiausiai grindų bus tas paveikslas, kuriam geometrinės figūros, sudarytos iš lygiašonio trikampio ir stačiakampio, aukštis didžiausias (žr. pav.; stačiakampio matmenys centimetrais pažymėti $2a \times b$, o trikampio aukštinė $-$ h):



Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgis lygus pusei virvės ilgio 1 m = 100 cm. Figūros aukštis lygus $H = h + b$ cm. Pritaikę Pitagoro teoremą gauname $h = \sqrt{100^2 - a^2}$ (cm) ir $H = \sqrt{100^2 - a^2} + b$ (cm). Imkime ir tiesiogiai patikrinkime, su kuriomis atsakymo variantuose pateiktomis $2a$ ir b reikšmėmis šis reiškinys įgyja didžiausią reikšmę:

A) $H = \sqrt{100^2 - 30^2} + 40 < \sqrt{100^2} + 40 = 100 + 40 = 140$;

B) $H = \sqrt{100^2 - 60^2} + 50 < \sqrt{100^2} + 50 = 100 + 50 = 150$;

C) $H = \sqrt{100^2 - 60^2} + 90 = \sqrt{6400} + 90 = 80 + 90 = 170$;

D) $H = \sqrt{100^2 - 80^2} + 60 < \sqrt{100^2} + 60 = 100 + 60 = 160$;

E) $H = \sqrt{100^2 - 80^2} + 100 = \sqrt{3600} + 100 = 60 + 100 = 160$.

Didžiausią reikšmę 170 (cm) gavome trečiuoju atveju.

13. (B) 7:49

? Jei vienu vonios kambariu trys studentės iš eilės ir be pertraukų naudosis $9 + 18 + 22 = 49$ minutes, o antruoju $-$ kitos trys $11 + 13 + 23 = 47$ minutes, tai visos tesugaiš 49 minutes ir eis valgyti 7:49.

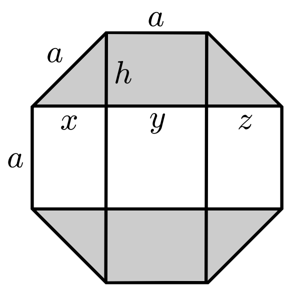
Tai įrodo, kad teisingas yra vienas iš atsakymų **A** ir **B**. Atsakymą **A** padeda atmesti greita galimybių perranka. Vienu iš kambarių bus naudojamasi 48 minutes (kitaip studentės išeitų valgyti dar anksčiau). Tada kitu kambariu bus taip pat naudojamasi $9+11+13+18+22+23-48 = 96 - 48 = 48$ minutes. Viena studentė vienu iš kambarių naudosis 23 minutes. Kitoms studentėms kambarys bus atviras $48 - 23 = 25$ minutes. Jei dar viena studentė juo naudotųsi 22 arba 18 minučių, nei vienai kitai studentei pasinaudoti šiuo kambariu laiko neužtektų ir lygiai 48 minučių negautume. Todėl 18 ir 22 minutes sugaištančios studentės turi eiti į kitą vonios kambarį. Jei į jį eis dar bent viena studentė, jos sugaiš mažiausiai $18 + 22 + 9 = 49$ minutes, o jei neis, tai tegausime 40 minučių, o ne 48. Vadinasi, atsakymas **A** klaidingas ir mums lieka atsakymas **B**.

! Dar reiktų įrodyti, kad negalime gauti trumpesnio laiko nei 48 minutės. Tai nesunku: bendras naudojimosi vonios kambariais laikas yra $9 + 11 + 13 + 18 + 22 + 23 = 96$ minutės, todėl bent vienu kambariu neišvengiamai bus naudojamasi mažiausiai $96 : 2 = 48$ minutes.

Kad lygiai 48 minučių negausime, įrodėme **?** dalyje. Studentės kambariuose sugaiš po sveikąjį skaičių minučių, tad jos sugaiš mažiausiai 49 minutes, o kad tiek jos gali sugaišti, pavyzdį taip pat nurodėme.

14. (D) 12

? Aštuonkampio kraštinės ilgį pažymėkime a. Nubrėžkime kelias aštuonkampio įstrižaines ir pažymėkime atkarpų ilgius, kaip parodyta paveikslėlyje:



Iš brėžinio, jo simetriškumo galime spėti, kad užtušuotos figūros yra lygios trapecijos, o neužtušuotoji – stačiakampis. Be to, trikampis, kurio kraštinės yra x, h, a yra statusis lygiašonis, tad $h = x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Taip pat $z = x$ ir $y = a$.

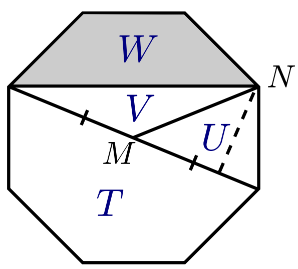
Vienos užtušuotos trapecijos plotas lygus $3 = \frac{1}{2}h(a + (x + y + z)) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a(a + (\frac{\sqrt{2}}{2}a + a + \frac{\sqrt{2}}{2}a)) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})a^2$.

Neužtušuoto stačiakampio plotas lygus $a(x + y + z) = a(\sqrt{2}a + a) = (\sqrt{2} + 1)a^2 = 2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})a^2$. Pastebėkime, kad gavome dvigubą trapecijos plotą, jis lygus $2 \cdot 3 = 6$.

Viso aštuonkampio plotas lygus $3 + 6 + 3 = 12$.

! Savybių, kuriomis naudojomės **?** dalyje, čia neįrodinėsime. Tačiau pateiksime kitokį įrodymą.

Aštuonkampio centrą pažymėkime M, o ieškomą aštuonkampio plotą S. Šis centras įstrižainę, jungiančią priešingas aštuonkampio viršūnes, dalija pusiau (žr. pav.; čia pažymėta viršūnė N ir atitinkamų 4 aštuonkampio sričių plotai).



Jei centrą sujungtume su visomis aštuonkampio viršūnėmis, padalintume jį į 8 lygius trikampius, kurių kiekvieno plotas lygus $\frac{S}{8}$. Vieną iš tų trikampių matome paveikslėlyje, tad jo plotas $U = \frac{S}{8}$. Trikampiai, kurių plotai yra U ir V, turi bendrą aukštinę, išvestą iš viršūnės N, į to paties ilgio pagrindus, todėl $U = V$. Pagaliau įstrižainė, einanti per M, dalija aštuonkampį į dvi vienodas dalis, todėl $T = U + V + W = \frac{S}{2}$. Vadinasi, $W = \frac{S}{2} - U - V = \frac{S}{2} - 2U = \frac{S}{2} - 2 \cdot \frac{S}{8} = \frac{S}{4}$. Tačiau $W = 3$, tad $S = 4W = 12$.

15. (A) 558

! Krokodilo be uodegos ilgis keturis kartus didesnis nei galvos: $93 \cdot 4 = 372$ (cm). Krokodilo uodegos ilgis sudaro trečdalį viso Krokodilo ilgio l (cm), todėl kūno be uodegos ilgis – du trečdalius: $\frac{2}{3}l = 372$. Iš lygties randame $l = \frac{3}{2} \cdot 372 = 558$ (cm).

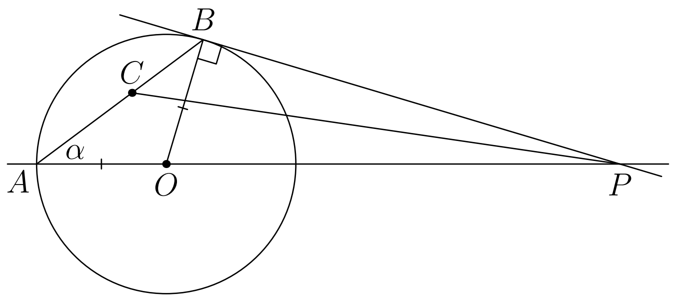
16. (E) 5

! Priešingų kubo sienų skaičių sumą pažymėkime S. Trys mums nežinomi kubo skaičiai yra $S-14, S-18, S-35$ (o rasti reikia $S-14$). Tai yra skirtingi pirminiai skaičiai. Atkrepkime dėmesį į jų lyginumą. Jei skaičius S būtų lyginis, tai turėtume du skirtingus lyginius pirminius skaičius $S-14$ ir $S-18$. Tačiau vienintelis lyginis pirminis skaičius yra 2 (didesnis skaičius dalytųsi iš 1, savęs paties ir dar iš 2). Vadinasi, skaičius S yra nelyginis. Tada skaičius $S-35$ yra lyginis ir pirminis, tad lygus 2. Todėl $S-35=2$ ir $S=37$. Ieškomas skaičius lygus $S-14 = 37-14 = 23$. Jo skaitmenų suma yra $2+3=5$.

17. (B) 45°

! Brėžinį galima papildyti, sujungiant kai kuriuos taškus atkarpomis. Kampą BCP galima nustatyti pastebint gražius sąryšius tarp kampų. Pateikiame vieną iš galimų kelių.

Nubrėžkime atkarpas PC ir BO. Pasižymėkime $\angle BAO = \alpha$ (žr. pav.).



Atkarpa BO iš karto leidžia mums pastebėti porą naudingų faktų. Trikampis AOB lygiašonis, nes OA ir OB yra to paties apskritimo spinduliai. Todėl lygūs kampai prie pagrindo: $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$. Be to, spindulys BO statmenas apskritimo liestinei: $\angle OBP = 90°$.

Dabar mums belieka atkakliai reikštis kampus per jau išreikštuosius. Trikampyje ABO turime $\angle AOB = 180° - \angle ABO - \angle BAO = 180° - 2\alpha$. Todėl $\angle BOP = 180° - \angle AOB = 2\alpha$. (Pastebėkime, kad šią lygybę galima gauti ir greičiau, žinant kampų apskritime savybes: $\angle BOP = 2\angle BAO = 2\alpha$, nes šie du kampai, centrinis ir įbrėžtinis, remiasi į tą patį apskritimo lanką.) Stačiajame trikampyje PBO turime $\angle BPO = 90° - \angle BOP = 90° - 2\alpha$. Rastąjį kampą dalija pusiaukampinė: $\angle BPC = \frac{\angle APB}{2} = \frac{90°-2\alpha}{2} = 45° - \alpha$.

Ir pagaliau trikampyje BCP turime $\angle BCP = 180° - \angle CBP - \angle BPC = 180° - (\angle ABO + \angle OBP) - \angle BPC = 180° - (\alpha + 90°) - (45° - \alpha) = 45°$. Tai ir yra ieškomas kampas.

18. C 10

! Dėdės Balio pergalių, lygiųjų ir pralaimėjimų skaičių pažymėkime atitinkamai a, b ir c. Galime sudaryti dvi lygtis. Bendras partijų skaičius yra $a + b + c = 40$, o pelnytų taškų skaičius yra $a \cdot 1 + b \cdot 0{,}5 + c \cdot 0 = a + 0{,}5b = 25$. Iš šių lygčių nežinomųjų rasti negalime, bet juk to ir nereikia. Prašoma rasti pergalių ir pralaimėjimų skirtumą $a - c$. Kad jį gautume, turėtume eliminuoti b. Tai ir padarykime. Išsireikškime b iš antrosios lygties ir įsistatykime į pirmąją: $0{,}5b = 25 - a$, todėl $b = 50 - 2a$ bei $a + (50 - 2a) + c = 40$. Suprastinkime: $50 - a + c = 40$ ir $-a + c = 40 - 50 = -10$. Randame $a - c = 10$.

19. D 36 Lt

? Jorei negalėtų trūkti lygiai trečdalio skėčio kainos, jei ta kaina (centais) nesidalytų iš 3. Skaičiai 16, 28 ir 112 iš 3 nesidalija, todėl nesidalija ir 1600, 2800 bei 11200. Mums lieka tik atsakymai **A** ir **D**. Bet atsakymas **A** negalimas, nes tada 9,40 Lt atpigęs kiekvienas iš trijų nupirktų skėčių atpigo daugiau nei trečdaliu, tuo labiau ketvirtadaliu ar penktadaliu. Seserims negalėjo nelikti pinigų – skėčiai atpigo labiau, nei joms pristigo. Lieka atsakymas **D**.

! Pradinę vieno skėčio kainą pažymėkime a (Lt). Seserims, kad galėtų nusipirkti tris skėčius, kartu sudėjus trūko $\frac{a}{3} + \frac{a}{4} + \frac{a}{5} = \frac{(20+15+12)a}{60} = \frac{47}{60}a$ (Lt). Šis trūkumas buvo panaikintas (ir tiksliai šis trūkumas, bet ne daugiau, nes trynukėms neliko pinigų), kai jų bendras pirkinys atpigo $9{,}40 \cdot 3 = 28{,}20$ (Lt). Todėl $\frac{47}{60}a = 28{,}2 = 3 \cdot 9{,}4$ ir $a = \frac{60}{47} \cdot 28{,}2 = \frac{60 \cdot 3 \cdot 9{,}4}{47} = \frac{60 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4{,}7}{47} = 60 \cdot 6 \cdot 0{,}1 = 36$ (Lt).

20. C 10

? Pastebėję, kad $p + \frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{25}{19} = 1 + \frac{6}{19} = 1 + 1 : \frac{19}{6}$ spėkime, kad $p = 1$ ir $q + \frac{1}{r} = \frac{19}{6}$. Pagrįsti tokį pasirinkimą nesunku. Juk jei $p \geq 2$, tai ir $\frac{25}{19} = p + \frac{1}{q+\frac{1}{r}} > p \geq 2$. Bet $\frac{25}{19} < 2$.

Pritaikykime tą pačią idėją dar kartą: $q + \frac{1}{r} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6} = 3 + \frac{1}{6}$. Aiškiai matome, kad galime priskirti reikšmes $q = 3, r = 6$. Gauname atsakymą $p + q + r = 1 + 3 + 6 = 10$.

! Įsitikinkime, kad kitų q ir r reikšmių negalėtume gauti. Čia verta prisiminti skaičiaus sveikosios dalies sąvoką. Sveikąja skaičiaus x dalimi vadiname didžiausią sveikąjį skaičių, neviršijantį x. Suprantama, toks skaičius tėra vienintelis.

Skaičiaus $3\frac{1}{6}$ sveikoji dalis yra 3. Jei $r = 1$, tai skaičius $q + \frac{1}{r} = q + 1$ yra sveikasis ir todėl tikrai nėra lygus $3\frac{1}{6}$. O jei $r > 1$, tai $\frac{1}{r} < 1$ ir $q + \frac{1}{r}$ yra tarp q ir $q + 1$. Didžiausias skaičius, neviršijantis $q + \frac{1}{r}$, yra q. Lygių skaičių $q + \frac{1}{r} = 3\frac{1}{6}$ sveikosios dalys sutampa: $q = 3$. Tada sutampa ir $\frac{1}{r} = \frac{1}{6}$, tad $r = 6$.

Tokie samprotavimai tiktų vietoj $\frac{25}{19}$ pradinėje lygtyje turint ir bet kokį kitą racionalųjį skaičių.

21. (D) 48

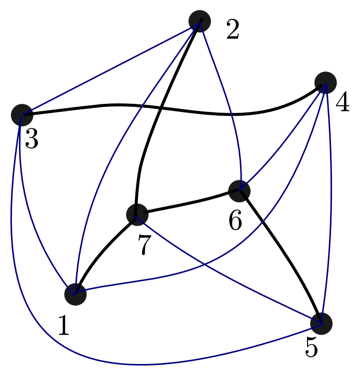
! Skaičių 33 visų pirma turime išskaidyti į 3 dauginamuosius. Du iš jų yra skirtingi skaitmenys N ir E. Tačiau 33 ir dalijasi tik iš dviejų skirtingų skaitmenų 1 ir 3. Todėl turime du variantus: $N = 1, E = 3$ arba $N = 3, E = 1$. Abiem atvejais $D + A + U + G = 11$. Jau sudėdami 4 mažiausius skaitmenis, nelygius 1 ar 3, gausime sumą $0+2+4+5 = 11$, todėl bet kurios kitos D, A, U, G reikšmės duos didesnę už 11 sumą. Kad gautume 11, turime imti skaitmenis 0, 2, 4, 5. Skaitmeniui D galime priskirti bet kurią iš šių 4 reikšmių, tada skaitmeniui A – vieną iš likusių 3, U – vieną iš likusių 2, o skaitmeniui G po to lieka vienintelė reikšmė. Taip gauname $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ atvejus. Prisiminkime, kad bet kuriuo iš šių atvejų dar galime skaitmenims N ir E priskirti reikšmes 1 ir 3 vienu iš dviejų būdų. Todėl iš viso gauname $24 \cdot 2 = 48$ būdus, kaip raides pakeisti skaitmenimis.

22. (D) 9

? Tarkime, kad Žibuoklei nubrėžus papildomų linijų kiekvienas taškas sujungtas su n kitų taškų. Kiek iš viso linijų gali būti brėžinyje? Iš kiekvieno taško išvesta po n linijų. Yra 7 taškai, tad gauname $7n$ linijų. Tačiau linijos turi po du galus, todėl kiekvieną liniją priskaičiavome po du kartus: kaip išeinančią iš vieno galo taško ir iš kito. Todėl linijų iš viso yra $\frac{7n}{2}$.

Pradžioje buvo nubrėžtos 5 linijos, tad Žibuoklė nubrėžė $\frac{7n}{2} - 5$ linijų. Reikia rasti mažiausią galimą šio reiškinio reikšmę. Kitaip tariant, skaičius n turi būti kuo mažesnis. Vienas taškas dar pradžioje buvo sujungtas su 3 kitais taškais, todėl $n \geq 3$. Jei $n = 3$, tai linijų skaičius $\frac{7n}{2} = \frac{21}{2}$ nėra sveikasis – taip būti negali. O tolimesnė reikšmė $n = 4$ yra galima. To įrodinėti nereikia: galima apsieiti ir be pavyzdžio, kaip sujungti taškus, kurį sugalvoti ne taip lengva. Juk jei $n \neq 4$, tai turėtume imti dar didesnes reikšmes. Bet kai $n \geq 5$, tai $\frac{7n}{2} - 5 \geq 12{,}5 > 10$ ir netinka nė vienas iš pateiktų atsakymų. Vadinasi, $n = 4$ ir turime atsakymą $\frac{7n}{2} - 5 = 14 - 5 = 9$.

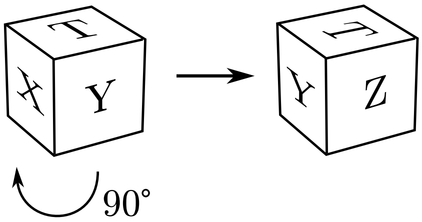
! Čia belieka pateikti taškų jungimo pavyzdį, kai $n = 4$ (žr. pav.).



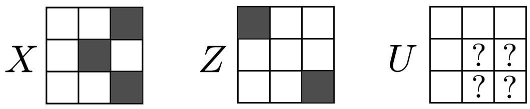
Sukonstruoti jį galima būtų taip. Pradžioje sujungiame visus 7 taškus iš eilės, stengdamiesi atkartoti kuo daugiau jau nubrėžtų linijų. Kad ir tokia tvarka: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1. Pastebėkime, kad dar yra sujungti taškai 7 ir 2, kuriuos sunumeruotų taškų cikle skiria taškas 1. Siekdami dėsningumo, garantuojančio, kad linijų taškuose sueis po lygiai, vėl sujungiame taškus ratu, bet dabar po vieną tašką iš jau turimo ciklo vis praleisdami: 7, 2, 4, 6, 1, 3, 5, 7. Taip mes pasiekėme, kad kiekvienas taškas būtų sujungtas su keturiais. Tarkime, taškas 5 sujungtas su taškais, kurių numeriai yra $5 - 1 = 4, 5 + 1 = 6, 5 - 2 = 3, 5 + 2 = 7$.

23. (D) 9

? Kaip pasukti kubą, kad iš kairiojo paveikslėlio gautume dešinįjį? Abiejuose kubo vaizduose regime tokias pačias viršutinę sieną T ir šoninę sieną Y, tik pasuktas $90°$ kampu (žr. pav.). Nesunku suvokti, kad sienos X ir Z yra priešingos.



Dabar suskaičiuokime juodus kubelius. Išskaidykime kubą į tris sluoksnius: sienas X ir Z bei tarp jų esantį vidurinį sluoksnį U, sudarytą iš 9 kubelių:



Sienoje X yra 3 juodi kubeliai, sienoje Z − tik 2. Sąlygos paveikslėlyje matome sluoksniui U priklausančius 5 kubelius (esančius sienose T ir Y). Likę paslėpti 4 kubeliai, paveikslėlyje pažymėti klaustukais, gali būti bet kurios spalvos. Taigi čia galime turėti daugiausiai 4 juodus kubelius. Iš viso gauname $3 + 2 + 4 = 9$ juodus kubelius.

! Neįrodėme, kad dešiniojo kubo vaizdo negalime kaip nors kitaip gauti iš kairiojo: gal yra kitoks kubas ir kitoks jo posūkis? Sąlygos paveikslėlio kairėje regime 3 juodus kampinius kubelius, esančius vienoje sienoje Y. Kiekvienoje iš likusių 5 sienų (išskyrus Y), regime bent po 2 baltus kampinius kubelius (net jei nematome visos sienos). Todėl siena Y su 3 juodais kampiniais kubeliais yra vienintelė tokia kubo siena ir privalo sutapti su atitinkama siena dešinėje, pasukta $90°$. Kartu su siena tokiu kampu turime pasukti ir visą kubą.

24. (B) 20%

! Mėlynbarzdžių barzdukų skaičių prieš 100 metų pažymėkime m, žaliabarzdžių − z. Po 100 metų mėlynbarzdžių skaičius padidėjo $0{,}6m$ ir tapo $m_1 = m + 0{,}6m = 1{,}6m$. Žaliabarzdžių skaičius sumažėjo $0{,}6z$ ir tapo $z_1 = z - 0{,}6z = 0{,}4z$. Vienų ir kitų barzdukų santykis nepakito, tik mėlynbarzdžiai su žaliabarzdžiais apsikeitė vietomis. Užrašykime šį faktą lygybe: $z : m = m_1 : z_1 = 1{,}6m : 0{,}4z$. Galime rasti pradinį barzdukų santykį: $\frac{z}{m} = \frac{1{,}6m}{0{,}4z} = 4\frac{m}{z}$. Padauginkime abi lygybės puses iš $\frac{z}{m}$: $\frac{z^2}{m^2} = 4$, todėl $\frac{z}{m} = 2$ ir $z = 2m$.

Dabar užsirašykime tai, ką reikia rasti. Uždavinyje prašoma rasti, kiek pakito visų barzdukų skaičius palyginus su jų pradiniu skaičiumi. Jis padidėjo $0{,}6m$ ir sumažėjo $0{,}6z$, tad iš viso padidėjo $0{,}6m - 0{,}6z = 0{,}6m - 0{,}6 \cdot 2m = -0{,}6m$. Kitaip tariant, sumažėjo $0{,}6m$. Kiek procentų pradinio barzdukų skaičiaus $m + z$ tai sudaro? Tereikia apskaičiuoti tokį santykį: $\frac{0{,}6m}{m+z} = \frac{0{,}6m}{m+2m} = \frac{0{,}6m}{3m} = 0{,}2 = 20\%$. Tiek procentų bendras barzdukų skaičius sumažėjo.

25. (C) 68

? Raskime skaičiaus 18 pirminius daugiklius: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Matome, kad turime stengtis sudauginti kuo daugiau skaičių, vengdami skaičių, dalių iš 2 ir 3. Juk jei sandaugoje bus bent vienas lyginis skaičius ir bent du, dalūs iš 3 (arba bent vienas, dalus iš 9), tai ji dalysis iš $2 \cdot 3^2 = 18$. Tačiau svarbu suvokti, kad nereikia vengti visų tokių skaičių. Jei mes atsisakysime lyginių skaičių, tai sandauga nesidalys iš 2, o jau vien dėl to taip pat nesidalys ir iš 18. Todėl galėsime dauginti tiek skaičių, dalių iš 3, kiek tik norėsime. Ir atvirkščiai: jei vengsime skaičių, dalių iš 3 ir taip užsitikrinsime, kad sandauga nebūtų dali iš 9, tai jos dalumas iš 2 mums nerūpės.

Jei vengtume lyginių skaičių, tai atsisakytume pusės visų skaičių nuo 1 iki 100. O vengdami skaičių, dalių iš 3, atsisakome tik apytiksliai trečdalio visų skaičių. Tad spėkime, kad taip ir reikia daryti.

Nuo 1 iki 99 yra $99 : 3 = 33$ skaičiai, dalūs iš 3, ir $99 - 33 = 66$ skaičiai, nedalūs iš 3. Be to, skaičius 100 nedalus iš 3. Visus 67 skaičius, nedalius iš 3, sudauginkime. Sandauga dalijasi iš 2, bet ne iš $2 \cdot 3$. Ją dar galime padauginti iš 68-o skaičiaus 3 ir gausime sandaugą, dalią iš $2 \cdot 3$, bet ne iš $2 \cdot 3^2 = 18$. Mums dar liko nepanaudotų skaičių, bet jie visi dalūs iš 3, tad papildomai padauginus sandaugą iš bet kurio tokio skaičiaus, joje atsirastų dar vienas daugiklis 3, ir ji jau dalytųsi iš $2 \cdot 3^2$. Taip būti negali, tad apsistokime ties 68 skaičiais.

! Įrodykime, kad imant virš 68 skaičių jų sandauga visada dalysis iš 18. Imkime bet kuriuos skirtingus 69 natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 100. Jau nustatėme (žr. **?** dalį), kad daugiausiai 67 iš tų skaičių nesidalija iš 3. Bent $69-67 = 2$ skaičiai dalijasi iš 3. Tada visų skaičių sandauga dalijasi iš $3 \cdot 3 = 9$. Be to, nuo 1 iki 100 yra tik 50 nelyginių skaičių, todėl tarp 69 skaičių tikrai yra lyginių ir jų sandauga dalijasi iš 2. Taigi sandauga dalijasi iš $9 \cdot 2 = 18$.

26. (C) 32

! Uždavinį paprasčiau spręsti suskaičiuojant, kiek trikampių, jungiančių kubo viršūnes, *netenkina* uždavinio sąlygos. Iš viso trikampių, jungiančių 3 iš 8 kubo viršūnių, yra $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ (derinių skaičius; iš 8 viršūnių galime bet kaip pasirinkti 3). Kiekvienoje kubo sienoje yra 4 trikampiai, jungiantys tos sienos viršūnes (siena yra kvadratas su 4 viršūnėmis, iš kurių reikia bet kaip pasirinkti 3). Sienų yra 6, tad gauname $4 \cdot 6 = 24$ trikampius, esančius kubo sienose. Todėl trikampių, nesančių kubo sienose, yra $56 - 24 = 32$.

27. (A) 4

! Kad sužinotume, iš kokio skaičiaus galime ištraukti nežinomo laipsnio šaknį reiškinyje $\sqrt[n]{2014 + m}$, panagrinėkime to paties laipsnio šaknį iš žinomo skaičiaus $\sqrt[n]{1024} = k - 1$. Pastebėkime, kad $1024 = 2^{10}$ ir $k - 1 = \sqrt[n]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{n}}$. Skaičius $k - 1$ yra sveikasis ir neturėtų būti sunku nuspėti, kad skaičius $2^{\frac{10}{n}}$ yra sveikasis tik tada, kai trupmena $\frac{10}{n}$ susiprastina, t. y. kai n yra skaičiaus 10 daliklis.

Norėdami tuo įsitikinti (dalyvaujant „Kengūros" konkurse tai, žinoma, nebūtina), abi nagrinėjamos lygybės puses pakelkime laipsniu n: $(k - 1)^n = 2^{10}$. Kad dešinėje gautume dvejeto laipsnį, kairėje $k - 1$ negali dalintis iš jokio pirminio skaičiaus, išskyrus 2, t. y. šis skaičius pats turi būti dvejeto laipsnis: $k - 1 = 2^l$ (čia l yra sveikasis neneigiamas skaičius). Todėl $2^{10} = (2^l)^n = 2^{ln}$ ir $ln = 10$. Vadinasi, skaičius n iš tiesų yra skaičiaus 10 daliklis, t. y. $n = 1$, 2, 5 arba 10.

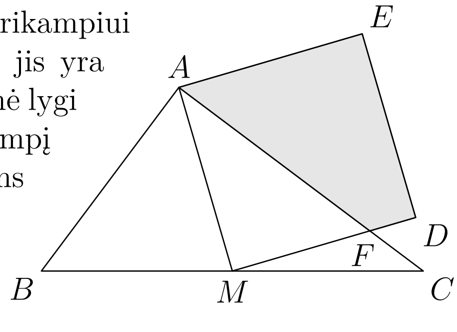
Kadangi $2 < n < 10$, tai $n = 5$. Gauname, kad $\sqrt[5]{2014+m} = \sqrt[5]{1024}+1 = \sqrt[5]{2^{10}}+1 = 2^2+1 = 5$ ir $2014+m = 5^5 = 3125$. Todėl $m = 3125 - 2014 = 1111$ (ir $k = 5$). Ieškoma skaitmenų suma lygi $1+1+1+1 = 4$.

28. (E) 4376521

! Kiek iš viso skaičių sąraše? Į pirmąją poziciją galime įrašyti bet kokį iš 7 skaitmenų, tada į antrąją – jau tik vieną iš likusių 6, į trečiąją – vieną iš likusių 5, ir t. t. Gauname $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$ gražių skaičių. Pradėdami nuo sąrašo pradžios bandykime „nukeliauti" į jo vidurį. Sąrašo pradžioje yra visi gražūs skaičiai, prasidedantys skaitmeniu 1. Kiek jų yra? Pirmoji pozicija jau užimta. Antrojoje pozicijoje turime 6 galimybes, toliau 5, 4 ir t. t. Iš viso $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ skaičių. Toliau sąraše eina visi skaičiai, prasidedantys 2, ir jų vėl bus 6!. Toliau eina 6! skaičių, prasidedančių 3, ir t. t. Sąrašas suskyla į 7 blokus po 6! skaičių. Sąrašo vidurys bus vidurinio iš jų viduryje. Viduriniame bloke yra pavidalo 4... skaičiai, kur vietoj daugtaškio visais įmanomais būdais įrašyti skaitmenys $1, 2, 3, 5, 6, 7$.

Ieškodami skaičių, esančių šio bloko viduryje, vėl mąstykime kaip anksčiau. Skaičių bloko pradžioje yra visi gražūs skaičiai, prasidedantys skaitmenimis 41, ir jų yra $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$. Toliau eina skaičiai, prasidedantys 42, 43, 45, 46 ir 47. Taip skaičių bloką padalijame į 6 mažesnius, po 5! skaičių kiekviename. Pirmąją didžiojo bloko pusę sudarys pirmieji 3 mažesni blokai, o antrąją – likę 3. Tad pirmoji didžiojo bloko pusė užsibaigs trečiuoju mažesniu bloku, kurio skaičiai prasideda 43. Šio trečiojo bloko gale (o kartu didžiojo bloko bei viso sąrašo viduryje) yra jo didžiausias skaičius. Kad gautume kuo didesnį skaičių, prasidedantį 43, prie jau užfiksuotų skaitmenų 43 iš dešinės turime pirmiau prirašyti didžiausią skaitmenį 7, tada didžiausią iš likusių skaitmenų 6, ir t. t. Kitaip tariant, didžiausią skaičių gausime surašę likusius skaitmenis nuo didžiausio iki mažiausio: 4376521.

29. (B) $\frac{125}{8}$



! Norint greitai išspręsti šį uždavinį svarbu pastebėti, kad trikampiui ABC galioja Pitagoro teorema: $6^2 + 8^2 = 10^2$, ir todėl jis yra statusis. Į stačiojo trikampio įžambinę išvesta pusiaukraštinė lygi pusei tos įžambinės. Iš tiesų, įžambinė yra apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo skersmuo. Mūsų atveju to skersmens vidurys M yra apibrėžtojo apskritimo centras, o MB, MA ir MC yra to apskritmo spinduliai. Todėl $MA = MB = MC = BC/2 = 5$. Galime rasti kvadrato $AMDE$ plotą $S_{AMDE} = AM^2 = 5^2 = 25$.

Dabar raskime stačiojo trikampio AMF plotą. Kol kas žinome tik vieną jo kraštinę. Jo kampas MAF lygus kampui ACM, nes trikampis AMC lygiašonis ($MA = MC$). Vadinasi, statieji trikampiai AMF ir CAB turi po lygų smailųjį kampą ($\angle MAF = \angle ACB$). Tačiau tai reiškia, kad ir kiti du atitinkami smailieji kampai lygūs ($\angle AFM = 90^\circ - \angle MAF = 90^\circ - \angle ACB = \angle ABC$). Tad trikampiai AMF ir CAB panašūs. Iš jų kraštinių santykių randame MF ilgį:

$$MF : MA = AB : AC = 6 : 8 = 3 : 4 \quad \text{ir} \quad MF = \frac{3}{4}MA = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}.$$

Trikampio AMF plotas lygus pusei statinių sandaugos: $S_{AMF} = \frac{1}{2}MA \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8}$.

Ir pagaliau ieškomas plotas lygus

$$S_{AFDE} = S_{AMDE} - S_{AMF} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}.$$

30. (C) 1007

? Nagrinėkime pateiktus atsakymus.

Tarkime, melagių yra 0 arba 1. Tada kairiausiojo tiesuolio kairėje yra ne daugiau nei 1 melagis, o dešinėje – bent $2014 - 1 - 1 = 2012$ tiesuolių. Šio tiesuolio teiginys klaidingas – taip negali būti.

Tarkime, melagių yra 1008 arba 2014. Tada dešiniausiojo melagio kairėje yra bent $1008 - 1 = 1007$ melagiai, o dešinėje – daugiausiai $2014 - 1008 = 1006$ tiesuoliai. Šio melagio teiginys teisingas – taip negali būti.

Belieka atsakymas **C**.

! Melagių skaičių eilėje pažymėkime n. **?** dalyje jau įrodėme, kad $0 < n < 2014$, t. y. eilėje stovi ir tiesuolių, ir melagių.

Nagrinėkime bet kurį eilėje stovintį tiesuolį. Jis nesumelavo, todėl kairėje nuo jo iš tikrųjų yra daugiau melagių nei dešinėje nuo jo tiesuolių. Dabar nagrinėkime bet kurį kitą žmogų, stovintį dešinėje nuo šio tiesuolio. Tokio žmogaus kairėje liks visi tie patys melagiai ir galbūt dar daugiau jų, o dešinėje — tik tie patys tiesuoliai, ir galbūt dalis jų jau atsidurs jo dešinėje. T. y. melagių skaičius kairėje galėjo tik padidėti, o tiesuolių dešinėje — tik sumažėti. Todėl toks žmogus tuo labiau nesumelavo, pasakydamas tą patį teiginį, ir yra tiesuolis. Vadinasi, į dešinę nuo bet kurio tiesuolio stovi tik tiesuoliai, melagis negali stovėti tiesuolio dešinėje, o tiesuolis — melagio kairėje.

Taigi žmonių eilė gali atrodyti tik taip: kairėje stovi n melagių, o į dešinę nuo jų stovi $2014 - n$ tiesuolių. Galima nujausti, kad daugiausiai informacijos apie n mums pasakys dešiniausio melagio ir kairiausio tiesuolio teiginiai. Dešiniausio melagio kairėje yra $n - 1$ melagis, o jo dešinėje yra $2014 - n$ tiesuolių. Jis sumelavo, kad $n - 1 > 2014 - n$, todėl iš tikrųjų $n - 1 \leq 2014 - n$. Išspręskime šią nelygybę: $2n \leq 2015$ ir $n \leq \frac{2015}{2} = 1007\frac{1}{2}$. Kairiausio tiesuolio kairėje yra n melagių, o jo dešinėje yra $(2014 - n) - 1 = 2013 - n$ tiesuolių. Jo teiginys reiškia, kad $n > 2013 - n$. Vėl išspręskime nelygybę: $2n > 2013$ ir $n > \frac{2013}{2} = 1006\frac{1}{2}$. Taigi $1007\frac{1}{2} > n > 1006\frac{1}{2}$. Vadinasi, $n = 1007$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	B
2	A
3	E
4	A
5	C
6	A
7	B
8	B
9	E
10	C
11	C
12	C
13	B
14	D
15	A
16	E
17	B
18	C
19	D
20	C
21	D
22	D
23	D
24	B
25	C
26	C
27	A
28	E
29	B
30	C