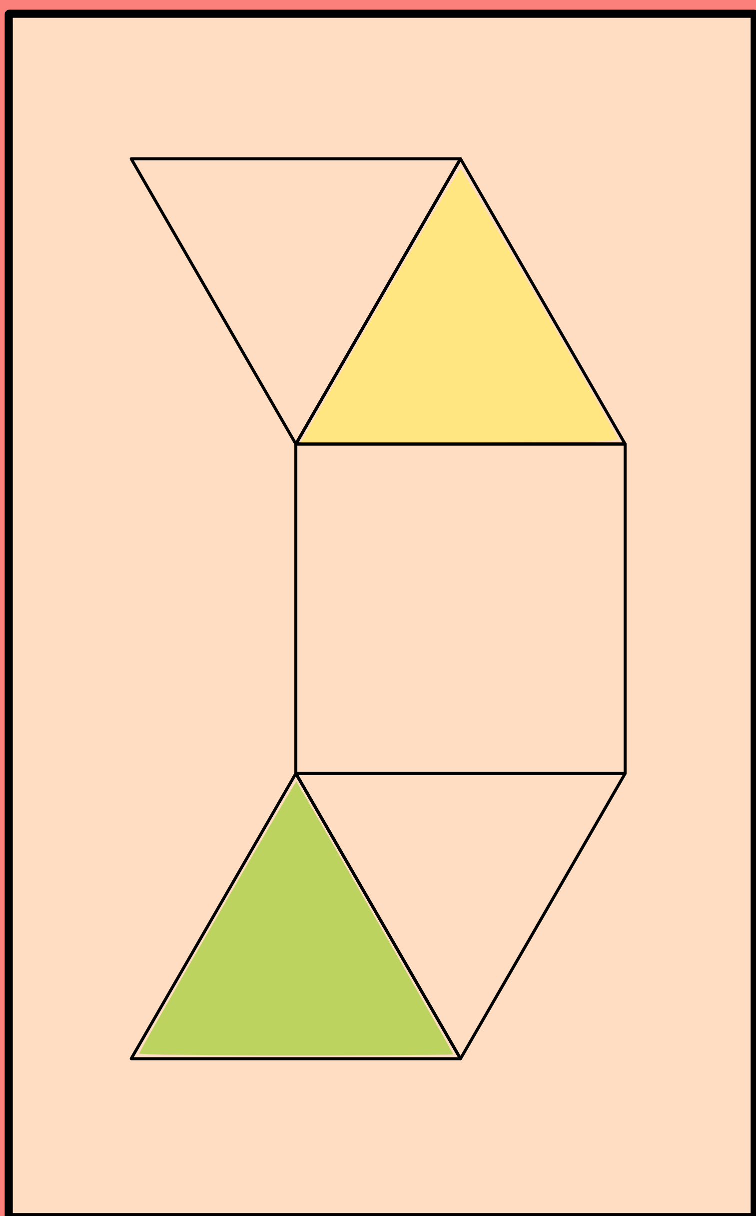
Kengūra 2015

Užduotys ir sprendimai



Ekspertas

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2015

Ekspertas

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Turinys

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų" vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų" vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

http://aksf.org/

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

http://kengura.lt/

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas.* Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online" režimu. Pirmajame konkurse varžėsi 47 dalyviai. Absoliučiai visus uždavinius išsprendė trys dalyviai: Dainius Dzindzalieta, Eduardas Juška ir Ignas Urbonavičius. Sveikiname!

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

http://www.ekspertas.kengura.lt/

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

Eksperto rezultatų lentelė

1,	Dainius Dzindzalieta,	150.00
1,	Eduardas Juška,	150.00
1,	Ignas Urbonavičius,	150.00
4,	Mykolas Blažonis,	146.25
5,	mabu,	140.00
6,	Mikalojus Ramanauskas,	138.75
7,	Karolis Martinkus,	137.50
7,	Vytautas Miežys,	137.50
9,	Romualdas Zovė,	137.00
10,	Daniil Bulanov,	135.00
11,	Karolis Žitkevičius,	133.75
12,	AlfredasR,	132.50
13,	Rita Norbutaitė,	124.75
14,	Ramūnas Valčeckas,	123.75
15,	Ingrida Lisonkienė,	121.25
15,	Martynas Melninkas,	121.25
17,	Irmantas Mačiulaitis,	120.00
18,	Vitalij Kozič,	119.50
19,	Justas Krasuckis,	118.75
20,	Michailas Traubas,	117.50
21,	Karolis Bartkus,	114.50
22,	Aistė Traubienė,	112.00
23,	Lukas Melninkas,	108.75
24,	Mantas Stasauskas,	105.00
25,	Aidas Liaudanskas,	103.75
25,	Lukas Vabalas,	103.75
27,	Grintas Junevičius,	102.50
28,	Neringa Vilutytė,	97.50
29,	Jogilė Repečkaitė,	96.25
30,	rp,	96.00
31,	tomas_a,	95.00
31,	Tautvydas Dagys,	95.00
33,	Egidija,	92.50
33,	Liuberte,	92.50
35,	Edita Genčauskienė,	89.75
36,	Pasiutus62,	88.75
37,	Justez,	86.25
38,	Jolanta2015,	85.00
39,	Erika Baranauskaitė,	81.00
40,	Simandra,	76.25
41,	Robertas Jasiulevičius,	71.25
42,	Rokas Žalnėravičius,	63.25
43,	Laura55,	62.25
44,	Aurimas Gedminas,	57.50
45,	Jonasekspertas,	54.00
46,	migvaira,	48.75
47,	ajž,	47.25

2015 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

1. $\frac{20}{15} =$

A) $\frac{2+0+1+5}{1+5}$ **B)** $\frac{2+0+1+5}{2+0}$ **C)** $\frac{2+0}{1+5}$ **D)** $\frac{20+15}{20}$ **E)** $\frac{20+15}{15}$

2. Močiutė turi 10 vištų. Ji pastebėjo, kad 5 iš jų padeda po kiaušinį kasdien, o likusios 5 vištos padeda po kiaušinį kas antrą dieną. Kiek kiaušinių visos 10 vištų padės per 10 dienų?

A) 75 **B)** 60 **C)** 50 **D)** 25 **E)** 10

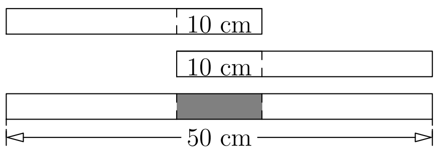
3. Mama sukabino išskalbtus marškinėlius iš eilės ant vienos virvės, o vaikams liepė tarp kiekvienų gretimų marškinėlių pakabinti po vieną išskalbtą kojinę. Taip ant virvės atsidūrė 29 skalbiniai. Kiek marškinėlių išskalbė mama?

A) 10 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

4. Kambarinio augalo kiekviena šakelė turi arba penkis lapelius, arba du lapelius ir vieną žiedą. Iš viso augalas turi 6 žiedus ir 32 lapelius. Kiek šakelių turi augalas?

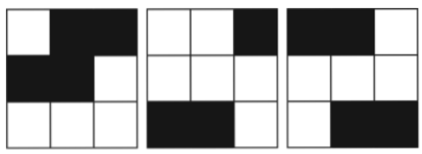
A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 16

5. Aistė turi 4 vienodo ilgio popierines juosteles. Suklijavusi 2 iš jų taip, kad persidengimo ilgis būtų 10 cm, ji gavo 50 cm juostelę. Kitas dvi juosteles ji nori suklijuoti taip, kad gautų 56 cm ilgio juostelę. Kokio ilgio turėtų būti persidengimas?



A) 4 cm **B)** 6 cm **C)** 8 cm **D)** 10 cm **E)** 12 cm

6. Paveikslėlyje pavaizduoti trys peršviečiamo popieriaus kvadratiniai lapai. Jų kai kurie langeliai uždažyti juodai ir yra neperšviečiami. Kiekvieną lapą galima pasukti, bet negalima apversti. Tada lapai uždedami vienas ant kito. Kiek daugiausia neperšviečiamų langelių galima pamatyti taip gautame kvadrate 3×3?

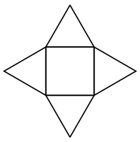
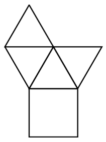
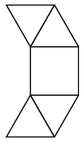
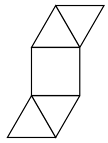
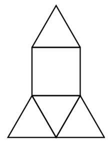


A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

7. Marija visus metus kasdien užsirašo tos dienos datą ir suskaičiuoja jos mėnesio ir dienos skaitmenų sumą. Pavyzdžiui, kovo 19 dieną ji rašo 03.19 ir sudeda: $0 + 3 + 1 + 9 = 13$. Kokią didžiausią skaitmenų sumą ji gali gauti?

A) 7 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 20

8. Kuri iš šių penkių išklotinių negali būti piramidės išklotinė?

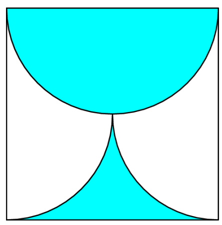
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. Lygybėje $2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 = 0$ kiekvieną žvaigždutę $*$ reikia taip pakeisti ženklu $+$ arba $-$, kad gautume teisingą lygybę. Kiek mažiausiai žvaigždučių reikia pakeisti ženklu $+$?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

10. Koks yra skaičiaus $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$ paskutinis skaitmuo?
A) 1 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

11. Austėja sudėjo stačiakampio trijų kraštinių ilgius ir gavo skaičių 44. Gerda taip pat sudėjo trijų to paties stačiakampio kraštinių ilgius ir gavo skaičių 40. Kam lygus šio stačiakampio perimetras?
A) 42 **B)** 56 **C)** 64 **D)** 84 **E)** 112

12. Mokytoja Dalia kiekvieno iš penkių savo mokinių paklausė, keli iš jų paruošė pamokas. Iš mokinių ji sulaukė tokių atsakymų: „0“, „1“, „2“, „3“, „4“. Vėliau paaiškėjo, kad visi pamokų neparuošę mokiniai melavo, o pamokas paruošę – sakė tiesą. Kiek mokinių paruošė pamokas?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

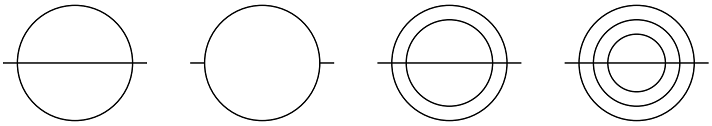


13. Kvadrato, kurio kraštinė lygi a, viduje nubrėžtas pusapskritimis ir du apskritimo ketvirčiai. Koks yra nudažytos kvadrato dalies plotas?
A) $\frac{\pi a^2}{8}$ **B)** $\frac{a^2}{2}$ **C)** $\frac{\pi a^2}{2}$ **D)** $\frac{a^2}{4}$ **E)** $\frac{\pi a^2}{4}$

14. Audros metu į kiekvieną kvadratinį metrą ploto prilijo 15 litrų vandens. Kiek atvirame lauko baseine pakilo vandens lygis?
A) 150 cm **B)** 0,15 cm **C)** 15 cm **D)** 1,5 cm **E)** Tai priklauso nuo baseino dydžio

15. Šykštusis ponas Žabtas nusipirko 100 žvakių. Kasdien jis sudegina po žvakę, o likusį vašką surenka. Iš 7 sudegintų žvakių likučių jis pats tučtuojau pagamina vieną naują žvakę. Po kelių dienų ponas Žabtas bus priverstas vėl palikti savo namus ir eiti pirkti naujų žvakių?
A) 112 **B)** 114 **C)** 115 **D)** 116 **E)** 117

16. Kelios iš keturių pavaizduotų figūrų gali būti nubrėžtos, neatitraukiant pieštuko ir jokios linijos atkarpos nebrėžiant du kartus?

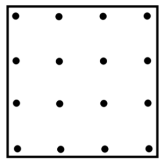


A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

17. Kengūrų grupėje dviejų lengviausių kengūrų svoris sudaro 25% visos grupės svorio. Trijų sunkiausių kengūrų svoris sudaro 60% visos grupės svorio. Kiek grupėje yra kengūrų?
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 20

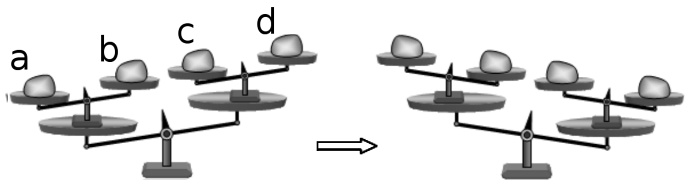
18. Austėja skaičių 2015 paeiliui padalijo iš skaičių 1, 2, 3, ..., 1000 ir dalybos liekanas užrašė lentoje. Kam lygus didžiausias lentoje parašytas skaičius?
A) 503 **B)** 504 **C)** 671 **D)** 672 **E)** Kitas skaičius

19. Paveikslėlyje parodytas popieriaus lapas, kuriame pažymėti taškai. Atstumas tarp bet kurių dviejų horizontaliai iš eilės einančių taškų lygus 1. Be to, atstumas tarp bet kurių dviejų vertikaliai iš eilės einančių taškų taip pat lygus 1. Kiek daugiausiai skirtingo ploto kvadratų, kurių viršūnės yra pažymėti taškai, galima sudaryti?



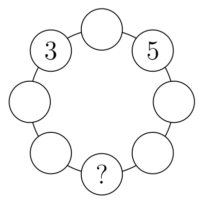
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

20. Ant dviaukščių svirtinių svarstyklių padėti svoriai a, b, c, d. Sukeitus du svorius vietomis, svarstyklės pakrypo, kaip parodyta paveikslėlyje. Kurie svoriai sukeisti?



A) a ir b **B)** b ir d **C)** b ir c **D)** a ir d **E)** a ir c

21. Į kiekvieną skrituliuką (žr. pav.) įrašyta po skaičių. Ignas pastebėjo, kad bet kuris skaičius lygus dviejų gretimų skaičių sumai. Koks skaičius įrašytas klaustuku pažymėtoje vietoje?



A) -5 **B)** -16 **C)** -8 **D)** -3 **E)** Ignas apsiriko

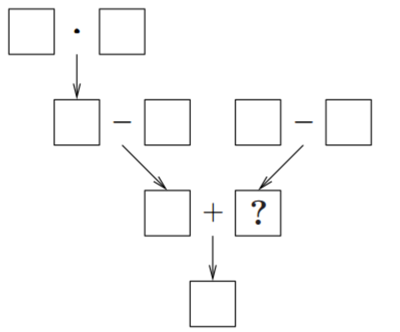
22. Penki skirtingi natūralieji skaičiai a, b, c, d, e tenkina lygybes $c : e = b$, $a + b = d$ ir $e - d = a$. Kuris skaičius didžiausias?
A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** e

23. Ant kiekvienos iš penkių kortelių užrašyta po natūralųjį skaičių, ir tie skaičiai nebūtinai skirtingi. Adomas suskaičiavo ant kiekvienų dviejų kortelių parašytų skaičių sumą ir gavo tik tris skirtingus skaičius: 57, 70, 83. Kam lygus didžiausias ant kortelių užrašytas skaičius?
A) 35 **B)** 42 **C)** 48 **D)** 53 **E)** 82

24. Tiesėje pažymėti penki taškai. Gerda pamatavo atstumus tarp kiekvienų dviejų pažymėtų taškų ir gautus skaičius surašė didėjimo tvarka: 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 ir 22. Kam lygus k?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

25. Keliais būdais galima parinkti tris skirtingus skaitmenis a, b, c, kad galiotų nelygybės $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$? (Užrašas $\overline{xy}$ žymi dviženklį skaičių su skaitmenimis x ir y.)
A) 84 **B)** 96 **C)** 125 **D)** 201 **E)** 502

26. Į paveikslėlio langelius reikia įrašyti po vieną skaitmenį nuo 1 iki 9. Skirtinguose langeliuose turi būti įrašyti skirtingi skaitmenys. Be to, kiekvienos paveikslėlyje nurodytos operacijos rezultatas turi sutapti su rodykle pažymėto langelio skaičiumi. Koks skaičius turi būti įrašytas į langelį, pažymėtą klaustuku?
A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



27. Elena nori taip nuspalvinti visus natūraliuosius skaičius raudonai arba žaliai, kad dviejų vienodos spalvos skirtingų natūraliųjų skaičių suma būtų tos pačios spalvos. Keliais skirtingais būdais Elena gali tai padaryti?
A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** Daugiau nei 6

28. Mažoji Karolina nupiešė ant lentos kelis stačiakampius: vienus mėlyna kreida, kitus raudona. Lygiai 7 stačiakampiai yra kvadratai. Raudonų stačiakampių yra trimis daugiau nei mėlynų kvadratų. Raudonų kvadratų yra dviem daugiau nei mėlynų stačiakampių. Kiek mėlynų stačiakampių nupiešė Karolina?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

29. Tomas užrašė 10 skirtingų realiųjų skaičių, o tada pabraukė kiekvieną skaičių, lygų likusių 9 skaičių sandaugai. Kiek daugiausiai skaičių jis galėjo pabraukti?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** 10

30. Skaičiuočių klube susirinko 96 nariai ir sustojo ratu. Jie ratu iš eilės ėmė garsiai skaičiuotis: 1, 2, 3 ir t. t. Žmogus, ištaręs lyginį skaičių, tuojau pasitraukia iš rato. Apėjus pilną ratą, žmonės skaičiavosi toliau: 97, 98, …, kol rate liko tik vienas žmogus. Koks buvo pirmas skaičius, kurį skaičiuotės metu ištarė paskutinis likęs žmogus?
A) 1 **B)** 17 **C)** 33 **D)** 65 **E)** 95

Eksperto užduočių sprendimai

1. (**A**) $\frac{2+0+1+5}{1+5}$

! Paeiliui skaičiuojame:

$$\frac{20}{15} = \frac{4\cdot5}{3\cdot5} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2+0+1+5}{1+5} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2+0+1+5}{2+0} = \frac{8}{2} = 4 \neq \frac{4}{3},$$

$$\frac{2+0}{1+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{4}{3}, \qquad \frac{20+15}{20} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4} \neq \frac{4}{3}, \qquad \frac{20+15}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3} \neq \frac{4}{3}.$$

Taigi teisingas atsakymas **A**.

2. (**A**) 75

! Kiekviena višta, kuri deda kasdien, per 10 dienų padės 10 kiaušinių. Tokių vištų yra 5, tai iš viso jos padės $5 \cdot 10 = 50$ kiaušinių. Višta, kuri deda kas antrą dieną, per 10 dienų padės 5 kiaušinius. Tokių vištų irgi yra 5 ir iš viso jos padės $5 \cdot 5 = 25$ kiaušinius. Taigi per 10 dienų vištos padės $50 + 25 = 75$ kiaušinius.

!! Penkios močiutės vištos deda kasdien, tai per 10 dienų jos padės $5 \cdot 10 = 50$ kiaušinių. Kitos 5 vištos deda dvigubai rečiau, tai ir kiaušinių padės dvigubai mažiau: $50 : 2 = 25$. Taigi iš viso vištos padės $50 + 25 = 75$ kiaušinius.

3. (**E**) 15

? Lengva pastebėti, kad tinka atsakymas **E**, o kiti atsakymai netinka. Pavyzdžiui, jei būtų pakabinta 10 marškinėlių, tai turėtume 9 tarpus, kuriuose pakabintos kojinės. Tada skalbinių būtų $10 + 9 = 19$. Bet jei marškinėlių pakabinta 15, tai turime 14 tarpų ir todėl 14 kojinių. Iš viso turime $15 + 14 = 29$ skalbinius.

! Tarkime, yra n marškinėlių. Tada turime $n - 1$ tarpą (tarp pirmų ir antrų marškinėlių, tarp antrų ir trečių, …, tarp priešpaskutinių $n - 1$-ųjų ir paskutinių n-tųjų) ir todėl $n - 1$ kojinę. Gauname lygtį $n + (n - 1) = 2n - 1 = 29$, iš čia $n = 15$.

4. (**A**) 10

! Tarkime, kad augalas turi x šakelių su žiedais ir y šakelių be žiedų. Tuomet jis turi $2x + 5y$ lapelius. Mes žinome, kad yra 6 šakelės su žiedais ir 32 lapeliai. Taigi $x = 6$ ir $2 \cdot 6 + 5y = 32$. Iš pastarosios lygties randame, kad $y = 4$. Iš viso šakelių yra $x + y = 10$.

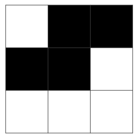
!! Aišku, kad augalas turi 6 „žydinčias“ šakeles. Kiekviena jų turi 2 lapelius, taigi žydinčios šakelės turi $6 \cdot 2 = 12$ lapelių. Kiti $32 - 12 = 20$ lapelių priklauso „penkialapėms“ šakelėms, taigi jų yra $20 : 5 = 4$. Iš viso yra $6 + 4$ šakelių.

5. A 4 cm

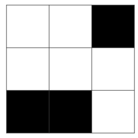
! Tarkime, kad juosteles ne klijuojame, o tik uždedame vieną ant kitos. Iš sąlygos žinome, kad sudėję 2 juosteles taip, kad persidengimo ilgis būtų 10 cm, gauname 50 cm ilgio juostelę. Dabar vieną juostelę laikykime prispaudę, o kitą traukime tol, kol gausime 56 cm ilgio juostelę. Kiek mes patraukėme? 6 cm. Taigi ir persidengimas sumažėjo 6 cm ir dabar yra lygus 10 cm − 6 cm = 4 cm.

6. D 8

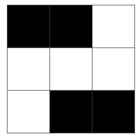
? Užstumkime antrą lapą ant trečio – gausime 4 paveikslėlio vaizdą. Todėl užstūmus ant jų pirmą lapą, juodi bus 8 langeliai (5 pav.). Net ir vartant lapus padaryti juodus visus 9 langelius nepavyksta.



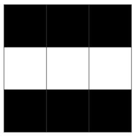
1 pav.



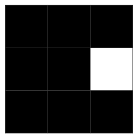
2 pav.



3 pav.



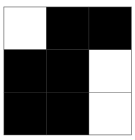
4 pav.



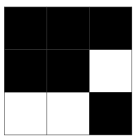
5 pav.

Renkamės atsakymą **D**.

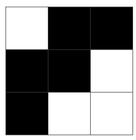
! Įrodysime, kad ir sukiodami lapus 9 langelių neuždengsime. Aišku, kad pirmo lapo galima nesukioti. Ant pirmo lapo uždėję sukiodami antrą lapą, gausime 4 padėtis (6, 7, 8, 9 pav.).



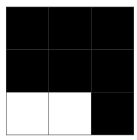
6 pav.



7 pav.



8 pav.



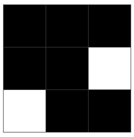
9 pav.

Bet pasirodo, kad visų padėčių nagrinėti nereikia: juk jeigu neuždengsime trečiu lapu 9 pav., tai juo labiau neuždengsime 7 pav. – jame be 9 pav. neuždengtų tų pačių langelių yra dar vienas neuždengtas. Panašiai jei lapu 3 neuždengsime visų 6 pav. langelių, tai juo labiau neuždengsime 8 pav. visų langelių. Vadinasi, liko 6 pav. ir 9 pav. Dar daugiau – jei lapu 3 neuždengsime 9 pav., tai juo labiau neuždengsime 6 pav. – juk pasukę pastarąjį turėsime du tuos pačius neuždengtus langelius kaip ir 9 pav. ir dar papildomą neuždengtą.

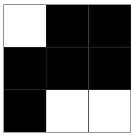
Vadinasi, užtenka įsitikinti, kad lapu 3 neįmanoma uždengti iš karto abiejų baltų 9 pav. langelių. Lapas 3 sukiojamas (dėl simetriškumo) duoda tik dvi konfigūracijas: pradinę (3 pav.) ir pasuktą. Užklojus lapą 3 nepasuktą, lieka neuždengtas kairysis apatinis langelis. Užklojus lapą 3 pasuktą, apačioje lieka neuždengtas vidurinis langelis.

Vadinasi, galima uždengti daugiausia 8 langelius.

!! Dabar jau nesunku rasti dar glaustesnį sprendimą. Pirmo lapo (1 pav.) nesukiokime. Trečias lapas sukiojamas (dėl simetrijos) turi tik dvi padėtis – nepasuktą ir pasuktą. Užkloję jį nepasuktą ant pirmojo, turime 10 pav.



10 pav.



11 pav.

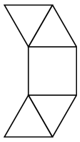
Užkloję jį pasuktą ant pirmojo, turime 11 pav. Užtenka nagrinėti tik 10 pav.: jis turi du neuždengtus langelius, o 11 pav. pasuktas turi neuždengtus tuos pačius du langelius ir vieną papildomą. Taigi jei 10 pav. uždengti antru lapu negalima, tai juo labiau neįmanoma uždengti 11 pav.

Dengiant 10 pav. antru lapu (2 pav.), lieka neuždengtas vidurinis langelis dešinėje. Tą langelį uždengti galima tik suktelėjus antrą lapą prieš laikrodžio rodyklę, bet tada lieka neuždengtas apatinis kairysis langelis.

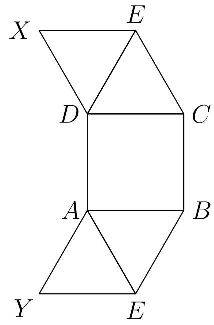
7. E 20

! Skaičiuokime mėnesio ir dienos skaitmenų sumą atskirai. Mėnesiai numeruojami nuo 1 iki 12. Kuris iš šių skaičių turi didžiausią skaitmenų sumą? Čia reikia neapsirikti – didžiausio skaičiaus skaitmenų suma nebūtinai didžiausia. Pavyzdžiui, nors 10 yra didesnis skaičius už 9, bet jo skaitmenų suma yra mažesnė. Mėnesių skaičius gali arba neturėti dešimčių skaitmens (tada galime laikyti, kad dešimčių skaitmuo yra 0: išties, jis nekeičia skaitmenų sumos), arba dešimčių skaičius gali būti lygus 1. Jeigu dešimčių skaitmuo yra 0, tai didžiausias galimas vienetų skaitmuo yra 9, o jei dešimčių skaitmuo yra 1, tai didžiausias vienetų skaitmuo tegali būti 2. Telieka palyginti du skaičius: 09 ir 12. Iš jų didesnę skaitmenų sumą (taigi ir didžiausią skaitmenų sumą iš visų mėnesių numerių) turi 09.

Panašiu būdu surasime, kokia mėnesio diena turi didžiausią skaitmenų sumą. Didžiausias dienų skaičius mėnesyje gali būti 31. Taigi, dešimčių skaitmuo kinta nuo 0 iki 3. Kai dešimčių skaitmuo yra 0, 1 arba 2, tai didžiausias vienetų skaitmuo gali būti 9. Tada didžiausią skaitmenų sumą turės ta diena, kurios dešimčių skaitmuo yra didžiausias, t. y. 29 diena. O jei dienos dešimčių skaitmuo yra 3, tai vienetų skaitmuo tegali būti 0 arba 1. Matome, kad taip gausime mažesnę skaitmenų sumą. Taigi, tarp 1 ir 31 didžiausią skaitmenų sumą turi skaičius 29. Kadangi devintas mėnuo – rugsėjis – turi 30 dienų, tai jis turės ir 29-ą dieną (skirtingai nei vasaris, nekeliamaisiais metais turintis tik 28 dienas). Taigi didžiausią skaitmenų sumą Marija gavo rugsėjo 29 d. Ji lygi $9 + 2 + 9 = 20$.

8. (C) 

! Įrodykime, kad atsakyme **C** pavaizduota išklotinė nėra piramidės išklotinė. Tarkime priešingai – ši išklotinė yra piramidės. Iš išklotinės nesunku suprasti, kad šios piramidės pagrindas yra kvadratas, o sienos – lygiakraščiai trikampiai. Piramidės pagrindą pažymėkime raidėmis A, B, C ir D, o viršūnę raide E. Iš išklotinės vėl sulanksčius piramidę, taškas X turi sutapti su vienu iš taškų A, B, C, D arba E. Jis negali sutapti nei su D, nei su E (visi šie taškai yra vienoje sienoje). Taip pat negali sutapti su C, nes tuo atveju sienos XDE ir DEC sutaptų. Taip pat jis negali sutapti su viršūne B, nes tokiu atveju atkarpa XD sutaptų su atkarpa DB, bet $XD = DC < DB$. Taigi X būtinai sutaps su A. Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad Y būtinai sutaps su D. Bet tokiu atveju sienos XED ir YAE sutampa, o taip būti negali, nes piramidė turi 5 skirtingas sienas.



Kad atsakymuose **A**, **B**, **D** ir **E** iš tiesų pavaizduotos piramidės išklotinės galima įsitikinti jas išsikirpus ir sulanksčius.

9. (B) 2

! Kadangi mūsų „metų“ skaičiaus 2015 skaitmenų suma yra $2 + 0 + 1 + 5 = 8$, tai reiškinio, kuriame skaičiaus 2015 skaitmenys pasikartoja 3 kartus, skaitmenų suma yra $8 \cdot 3 = 24$. Kadangi bendroji visų reiškinio skaičių „suma“ yra lygi 0, tai su teigiamais reiškinio skaitmenimis reikia surinkti pusę tos sumos, arba 12.

Taigi mūsų uždavinys nejučia transformavosi į aritmetines pratybas „kuo greičiau surinkti 12“; tik mums būtų privalu atkreipti dėmesį į tai, kad prieš pirmąjį dvejetą jokios žvaigždutės nėra, todėl šis 2 visada įeis į skaičiavimus „su pliusu“, todėl mums beliktų likusiais teigiamais skaičiais kuo greičiau „pritrupinti pilną dešimtį“, o tai, savo ruožtu, greičiausiai pasiekiama pasirenkant pliusus prieš du 5-tus.

Vadinasi, teisingas yra atsakymas **B**, arba 2. Tikrai, teisinga būtų kad ir tokia lygybė su prieš du 5-tus parašytais pliusais:

$$2 - 0 - 1 + 5 - 2 - 0 - 1 + 5 - 2 - 0 - 1 - 5 = 0.$$

10. (C) 6

! Sudedant arba dauginant (todėl ir keliant natūraliuoju laipsniu) natūraliuosius skaičius, rezultato paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dėmenų arba dauginamųjų paskutinių skaitmenų. Be to, $2015^0 = 1$. Todėl pakanka nustatyti, kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius $5^2 + 1 + 5 + 5^5 = 31 + 5^5$. Skaičius 5^5 baigiasi skaitmeniu 5, nes dalijasi iš 5 ir yra nelyginis (lyginis dalus iš 5 skaičius baigtųsi nuliu). Ieškomas skaitmuo vėlgi priklauso tik nuo dėmenų paskutinių skaitmenų sumos ir yra lygus $1 + 5 = 6$.

11. (B) 56

! Kadangi Austėja ir Gerda sudėjo trijų stačiakampių kraštinių ilgius (taigi tik vieną kraštinę iki „pilno“ perimetro „įskaityti“ pamiršo) ir gavo skirtingus skaičius, tai jos pamiršo įskaityti skirtingas stačiakampio kraštines. Jeigu Austėja pamiršo antrą kartą paimti kraštinę y, o Gerda – kraštinę x, tai Austėjos suma yra $x+y+x=2x+y$, o Gerdos – $y+x+y=x+2y$. Pagal sąlygą $2x+y=44$ ir $x+2y=40$. Sudėję viską, ką turime, gauname $2x+y+x+2y = 3x+3y=44+40=84$. Vadinasi, $x+y=84:3=28$, ir $2x+2y$ (o tai jau ir yra tas paieškomas perimetras) yra 56. Teisingas yra atsakymas **B**.

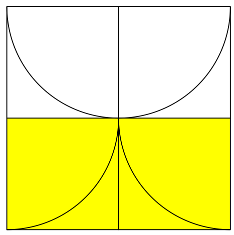
12. (B) 1

! Daugiausiai vienas mokinys galėjo sakyti tiesą, nes jeigu tiesą būtų sakę bent du mokiniai, tai tada būtų buvę ir bent du vienodi atsakymai. Taigi tiesą sakė tik vienas mokinys arba jos nesakė niekas.

Jeigu paruošusių pamokas mokinių visai nebūtų buvę, tai tada mokinys pasakęs „0“, būtų sakęs tiesą. Bet sakantis tiesą yra paruošęs pamokas, vadinasi, yra paruošusių pamokas, ir „0“ negali būti teisingas atsakymas.

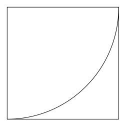
Taigi yra vienas paruošęs pamokas mokinys, jis sako tiesą, jis sako „1“, o kiti atsakymai yra neteisingi, taigi jie yra mokinių, neparuošusių pamokų, atsakymai. Teisingas atsakymas yra **B**.

13. (B) $\frac{a^2}{2}$



? Kadangi skaičiuojame nudažytos figūros plotą, kalbėkime verčiau apie pusskritulį, o ne pusapskritimį.

Tai geometrinio pastabumo uždavinys. Dviem atkarpomis kvadratą padalykime į keturis lygius mažesnius kvadratėlius, kurių kraštinės ilgis yra $a/2$ (žr. pav.). Matome, kad atkarpų susikirtimo taškas (kvadrato centras) sutampa su bendruoju apskritimo lankų tašku. Viršuje pusskritulis padalytas į du skritulio ketvirčius, o apačioje horizontalioji atkarpa atkerta dar du tokius pat ketvirčius. Todėl jei vietoj viršutinio pusskritulio nudažysime apatinius du ketvirčius (kaip tai padaryta paveikslėlyje), nudažytos kvadrato dalies plotas nepasikeis. Dabar nudažyti du kvadratėliai, sudarantys pusę kvadrato. Taigi ir ieškomas plotas yra lygus pusei kvadrato ploto a^2.



! Įsitikinkime, kad išnagrinėta situacija įmanoma. Imkime kvadratėlį, kurio kraštinė yra $a/2$, ir jo viduje nubrėžkime apskritimo su centru kvadratėlio viršūnėje ir spinduliu $a/2$ lanką. Lanko galai bus būtent tokiu atstumu nuo centro nutolusios kitos dvi kvadratėlio viršūnės (žr. pav.). Tai bus apskritimo ketvirtis, nes centrinis kampas, besiremiantis į šį lanką, bus statusis, o tai yra ketvirtis pilnojo kampo ($360^\circ : 4 = 90^\circ$). Iš 4 tokių vienodų kvadratėlių galime sudėti kvadratą, koks pavaizduotas pradiniame paveikslėlyje: du apatiniai lankai bus apskritimo ketvirčiai, o du viršutiniai suglausti skritulio ketvirčiai sudarys pusskritulį. Kaip pastebėjome **?** dalyje, visi lankai eis per kvadrato centrą ir visi skritulio ketvirčiai bus lygūs ir lygiapločiai.

Tačiau ar ši situacija vienintelė? Sąlygos paveikslėlis *atrodo* simetriškas, apskritimų lankų spinduliai *atrodo* lygūs. Bet juk sąlygoje to nepasakyta.

Apskritimą vienareikšmiškai apibrėžia jo centras ir spindulys. Pusapskritimio skersmuo yra ilgio a kvadrato kraštinė. Todėl pusapskritimio centras yra šios kraštinės vidurys, o spindulys lygus $a/2$; lanko galai – duotojo kvadrato viršūnės. Taigi pusapskritimio kitaip nubrėžti neišeis ir jis eina per kvadrato centrą.

Jei ir ketvirčių galai sutampa su kvadrato centru, tai ketvirčių centrai ir spinduliai taip pat randami vienareikšmiškai. Ketvirčio centras yra šio lanko galus jungiančios stygos vidurio statmens bei apskritimo, kurio skersmuo yra minėtoji styga, sankirta. Nors tokių sankirtų apskritai yra dvi, viena iš jų netinka dėl to, į kurią pusę nukreiptas apskritimo lankas (ketvirtis). Spindulys yra atstumas nuo centro iki apskritimo lanko bet kurio galo.

Bet ar būtinai ketvirčiai eina per kvadrato centrą, žemiausią pusapskritimio tašką? Jei ir čia nepasitikėtume paveikslėliu, galėtume įrodyti, kad priešingu atveju vienas iš apskritimo ketvirčių turi su apatine kvadrato kraštine ne vieną, bet du bendrus taškus (šį įrodymą, kiek sunkesnį, praleidžiame).

Taigi yra galima vienintelė situacija, kurią jau išnagrinėjome.

14. (D) 1,5 cm

! Net ir kiek santūriau su matmenų kalba, ar jau bent su matais, svoriais ir metrais bendravę žmonės tikrai yra daug kartų girdėję, kad vienas kubinis metras yra „metras kart metras kart metras“ ir kad vienas kubas vandens yra tūkstantis litrų vandens. Nieko daugiau ir nereikia, norint prieiti prie teisingo šio uždavinio atsakymo.

Pirmiausia iš to, kas jau pasakyta, neatremiamai išplaukia, kad jeigu į kiekvieną kvadratinį metrą būtų prilíję 1000 litrų vandens, tai vandens lygis atvirame lauko baseine būtų pakilęs vienu metru, o vienas metras visada yra 100 centimetrų. Toliau, jeigu į kiekvieną kvadratinį baseino metrą būtų prilíję dešimt kartų mažiau, arba tik 100 litrų vandens, tai ir vandens lygis atvirame lauko baseine būtų pakilęs dešimtį kartų žemiau, arba jau tik į 10 centimetrų aukštį. Panašiai, jeigu į vieną kvadratinį metrą būtų prilíję jau vos 10 litrų vandens, tai vandens lygis atvirame lauko baseine jau būtų pakilęs tik per vieną centimetrą. Taigi 10 litrų vandens į vieną kvadratinį metrą pakelia vandens lygį 1 centimetru ir bet kuriame kitame ploto vienete, taip pat ir baseine. O kadangi pas mus prilijo po 15 litrų į kiekvieną kvadratinį metrą, tai vandens lygis pakilo jau ne vienu, o ištisais pusantro centimetro.

Pažiūrėję į atsakymus matome, kad teisingas atsakymas, arba atsakymas atsakymų sąraše turi vardą **D**.

15. (D) 116

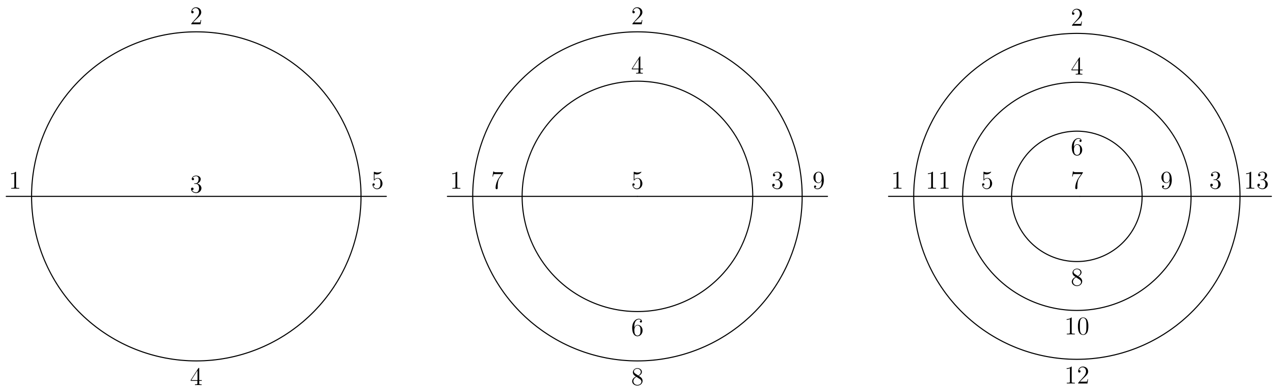
! Žvakių, žinoma, užteks 100 dienų. Padalykime 100 iš 7 su liekana. Kadangi $100 = 7 \cdot 14 + 2$, tai po 100 dienų Žabtas bus pagaminęs 14 papildomų žvakių ir turės dar dviejų žvakių likučius. Tad gauname 14 papildomų dienų ir dar 14-os sudegintų žvakių likučius. Iš viso 16-os žvakių likučiai leis Žabtui pagaminti dar dvi papildomas žvakes ir jam vėl liks dviejų žvakių likučiai (nes $16 = 2 \cdot 7 + 2$). Žabtui tai suteikia dar dvi dienas, po kurių jis turės dviejų ką tik sudegintų žvakių likučius, taigi iš viso $2 + 2 = 4$ žvakių likučius, iš kurių negalės pagaminti naujos žvakės ir turės eiti pirkti naujų. Taip nutiks po $100 + 14 + 2 = 116$ dienų.

!! Vienos žvakės likučiai yra lyg žvakės septyntadalis. Todėl galima laikyti, kad Žabtas negamina naujų žvakių, bet kasdien sudegina po $\frac{6}{7}$ žvakės. Kadangi iš likusių septyntadalių iš karto formuojama nauja sveika žvakė, tai Žabtas visada turi tiek sveikų žvakių, kokia yra bendro žvakių kiekio sveikoji dalis. O bendras žvakių kiekis kasdien sumažėja lygiai $\frac{6}{7}$ žvakės, kol tas kiekis netampa mažesnis už 1. Todėl jei ponas Žabtas nusiperka n žvakių, jis jas degins tiek dienų, kiek kartų iš n galima taip atimti $\frac{6}{7}$. Kadangi $100 = \frac{6}{7} \cdot 116 + \frac{4}{7}$, tai turime 116 dienų.

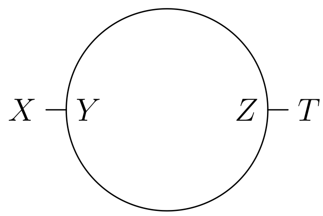
(Bendru atveju n žvakių Žabtas degintų $[(7n-1)/6]$ dienų; čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį.)

16. **D** 3

! Pirmąją, trečiąją ir ketvirtąją figūras galima nubrėžti nurodytu būdu. Galima pradėti nuo kairiojo figūros galo, o priėjus kelių linijų susikirtimą rinktis kryptį pagal tokią taisyklę: sukti į kairę, jei prieitas taškas yra kairėje nuo figūros centro, ir sukti į dešinę priešingu atveju. Figūras sudarančios atkarpos apeinamos paveikslėliuose nurodyta tvarka.



Antrosios figūros neįmanoma nubrėžti nurodytu būdu. Pradėję nuo bet kurio jos taško, pateksime į aklavietę. Figūra pakankamai nesudėtinga, todėl galima greitai patikrinti visas galimybes. Čia pateikiame matematinį samprotavimą, galintį padėti išspręsti panašius, bet sudėtingesnius uždavinius.



Jei kuris nurodytu būdu brėžiamos linijos taškas nėra nei pradžios, nei galo taškas, tai iš jo išeina lyginis skaičius linijos atkarpų. Taip yra, nes linija gali kirsti tašką kelis kartus, bet kiek kartų į jį sueina, tiek kartų iš jo ir išeina. Taigi nelyginis skaičius atkarpų gali išeiti iš daugiausiai dviejų figūros taškų – pradžios ir galo taškų. Tačiau antrojoje figūroje yra net 4 tokie taškai: iš X ir T išeina po vieną atkarpą, o iš Y ir Z – po tris (žr. pav.). Todėl jos nurodytu būdu nubrėžti neįmanoma.

Turime iš viso 3 tinkamas figūras.

17. **A** 6

! Sakykime, kad visų kengūrų bendras svoris yra S. Trijų sunkiausių ir dviejų lengviausių kengūrų bendras svoris yra $0{,}25S + 0{,}6S = 0{,}85S$. Taigi likusių „vidutinių“ kengūrų svoris yra $0{,}15S$. Kita vertus, kadangi dviejų lengviausių kengūrų svoris yra $0{,}25S$, tai bent viena iš jų sveria ne mažiau negu $0{,}125S$. Vadinasi, kiekvienos „vidutinės“ kengūros svoris ne mažesnis negu $0{,}125S$. Todėl yra tik viena vidutinė kengūra. Taigi grupėje yra $2+1+3 = 6$ kengūros.

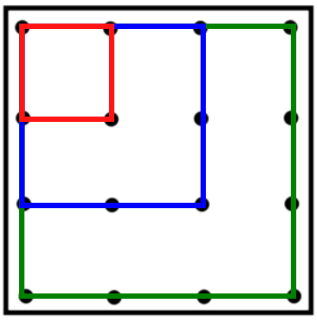
18. (C) 671

! Didžiausią lentoje parašytą liekaną pažymėkime r. Be to, skaičių, iš kurio dalijant 2015 buvo gauta liekana r, pažymėkime m. Tarkime, kad $r \geqslant 672$. Tada $m \geqslant 673$, nes $m > r$. Kadangi $2015 < 3 \cdot 673 = 2019$, tai $2015 = m + r$ arba $2015 = 2m + r$. Tačiau, $m + r < 1000 + 999 < 2015$, o $2m + r \geqslant 2 \cdot 673 + 672 = 2018 > 2015$. Vadinasi, $r \leqslant 671$. Belieka įsitikinti, kad skaičius 671 yra parašytas lentoje. Iš tikrųjų, nesunkiai įsitikiname, kad $2015 = 2 \cdot 672 + 671$.

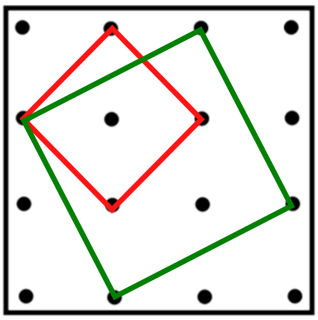
19. (D) 5

! Kiekviena atkarpa, jungianti du pažymėtus taškus, yra stačiojo trikampio, kurio statinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, įžambinė. (Jei atkarpa horizontali arba vertikali, tai vieno iš tokio stačiojo trikampio statinių ilgis bus lygus nuliui.) Todėl, remiantis Pitagoro teorema, kiekvienos tokios atkarpos ilgis yra skaičius, turintis pavidalą $\sqrt{a^2+b^2}$, kur a ir b yra neneigiami sveikieji skaičiai. Vadinasi, bet kurio kvadrato, kurio viršūnės yra pažymėti taškai, plotas yra skaičius, turintis pavidalą $a^2 + b^2 = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ (kur a ir b yra neneigiami sveikieji skaičiai). Be to, bet kurio tokio kvadrato plotas yra ne didesnis už $3 \cdot 3 = 9$. Nesunku patikrinti, kad tarp skaičių $1, 2, \ldots, 9$ tik skaičius 1, 2, 4, 5, 8 ir 9 galima išreikšti dviejų neneigiamų sveikųjų skaičių kvadratų suma, t. y. iš viso skirtingo ploto kvadratų, kurių viršūnės yra pažymėti taškai, yra ne daugiau negu 6. Įrodysime, jog neįmanoma nubrėžti kvadrato, kurio viršūnės būtų pažymėti taškai, ir kurio plotas būtų lygus 8. Iš tikrųjų, jei tokį kvadratą galima būtų nubrėžti, tai jo įstrižainė būtų lygi 4. Tačiau, įstrižainė taip pat jungtų du pažymėtus taškus, todėl ją galima būtų išreikšti pavidalu $\sqrt{a^2+b^2}$, kur a ir b yra neneigiami sveikieji skaičiai. Tada iš $4 = \sqrt{a^2+b^2}$ gautume $16 = a^2 + b^2$, o iš čia $a = 0$ ir $b = 4$ arba $a = 4$ ir $b = 0$, t. y. įstrižainė jungtų du pažymėtus taškus, kurie abu priklausytų vertikaliai arba horizontaliai tiesei. Tačiau atstumas tarp bet kurių dviejų pažymėtų taškų, esančių vienoje horizontalioje (arba vertikalioje) tiesėje yra ne didesnis už 3.

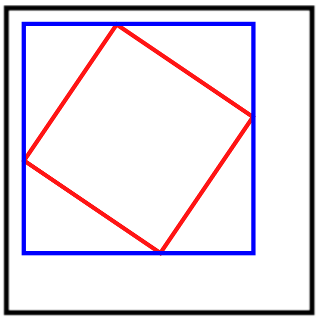
Taigi yra ne daugiau negu 5 skirtingo ploto kvadratai, kurių viršūnės yra pažymėti taškai. Kita vertus, 5 tokius kvadratus nubrėžti galima (žr. 1 ir 2 pav.).



1 pav.: kvadratai, kurių plotai yra atitinkamai 1, 4 ir 9.



2 pav.: kvadratai, kurių plotai yra atitinkamai 2 ir 5.

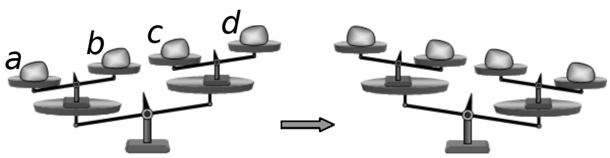


3 pav.

!! Tarkime, kad nubrėžėme kvadratą, kurio viršūnės – pažymėti taškai. Jei jo kraštinė horizontali arba vertikali, tai ji lygi 1, 2 arba 3, o plotas 1, 4 arba 9. Jei jo kraštinė pražulni, apibrėžkime apie jį stačiakampį, kurio kraštinės vertikalios ir horizontalios (žr. 3 pav.) Kiekviena stačiakampio kraštinė ne didesnė už 3 ir sveika, ją sudaro dvi atkarpos, kurių mažesnioji ne didesnė už 1,5. Bet tos atkarpos sveikos, vadinasi, mažesnioji lygi 1, o didesnioji 1 arba 2. Pagal Pitagoro teoremą kvadrato kraštinė lygi $\sqrt{1^2+b^2}$, o plotas lygus $1+b^2$, kur $b=1$ arba 2. Vadinasi, kvadrato plotas lygus 2 arba 5. Visi penki kvadratai pavaizduoti 1 ir 2 pav.

20. (D) a ir d

? Raides a, b, c, d interpretuokime kaip atitinkamų svorių mases.



Pradinė svarstyklių padėtis rodo, kad svoris a nusveria b, svoris c nusveria d (viršutinis svarstyklių aukštas) bei kad du svoriai a ir b nusveria c ir d (apatinis aukštas). T. y. turime nelygybes $a > b$, $c > d$, $a + b > c + d$. Nauja svarstyklių padėtis reiškia tris naujus, mums kol kas nežinomus sąryšius tarp dydžių a, b, c, d.

Paprasčiausia atspėti tokias konkrečias a, b, c, d reikšmes, kurioms pavaizduota situacija galima. Turimas nelygybes tenkins bet kokie skaičiai, kuriems $a > b = c > d$, pvz., $(a, b, c, d) = (3, 2, 2, 1)$. Kuriuos svorius galima apkeisti, kad svarstyklės atsidurtų naujojoje padėtyje? Atkreipkime dėmesį, jog naujoji padėtis simetriška senajai, t. y. naujai padėtų svorių masės galėtų būti (iš kairės į dešinę) 1, 2, 2, 3. O kad gautume tokią padėtį, pradinėje padėtyje tereikia sukeisti vietomis skaičius 1 ir 3, t. y. svorius a ir d.

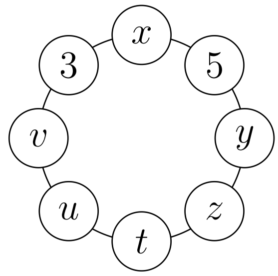
! Įrodykime, kad apkeitę bet kuriuos kitus svorius pavaizduotos situacijos niekaip negausime (kokios bebūtų skaičių a, b, c, d reikšmės). Apkeitus a ir b arba c ir d, kitaip pakryptų tik viena iš viršutinio aukšto svirčių (apkeitimas įvyksta tik tarp ant vienos svirties kabančių lėkščių). Lieka keturi variantai: sukeičiame a su c, a su d, b su c, b su d. Vienas iš jų (a su d) yra teisingasis, likusius dar turime atmesti.

Jei sukeisime a su c, tai gausime naują svorių seką (iš kairės į dešinę) (c, b, a, d). Kad svarstyklės būtų naujojoje padėtyje, reikia tokių nelygybių: $c < b, a < d, c + b < a + d$. Taip pat prisiminkime jau turėtas nelygybes $a > b$, $c > d$, $a+b > c+d$. Iš eilės panaudoję nelygybes $a > b$, $c < b$, $c > d$ ir $a < d$ gauname, kad $a > b > c > d > a$, t. y. $a > a$, bet taip būti negali.

Panašiai, kad sukeitus b su d svarstyklės pakryptų, kaip parodyta, vėl vienu metu turi galioti prieštaringos nelygybės $a > b > c > d > a$.

Kad sukeitus b su c svarstyklės pakryptų, kaip parodyta, turi būti teisingos nelygybės $a < c, b < d$ ir $a + c < b + d$. Jei sudėsime pirmąsias dvi nelygybes, gausime $a + b < c + d$, bet tai prieštarauja nelygybei $a + b > c + d$.

21. (**E**) Ignas apsiriko



! Įrašytus skaičius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Reikia rasti t.

Jei Ignas neapsiriko, turėtume tokias skaičių reikšmes:

$$x = 3 + 5 = 8, \quad 5 = x + y = 8 + y, \quad y = -3, \quad -3 = y = 5 + z,$$

$$z = -8, \quad -8 = z = y + t = -3 + t, \quad t = -5.$$

Taigi galėtume pasirinkti atsakymą **A**. Bet tai būtų klaida – bent jau kol kas negalime atmesti atsakymo **E**, kuris verčia patikrinti, ar toks skaičių surašymas egzistuoja.

Toliau eikime ratu:

$$-5 = t = z + u = -8 + u, \quad u = 3, \quad 3 = u = t + v = -5 + v,$$

$$v = 8, \quad 8 = v = u + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 8.$$

Gavome prieštarą. Taigi Ignas apsiriko.

!! Prieštarą galima gauti ir greičiau.

Turi galioti šios dvi lygybės: $y = 5 + z, z = y + t$. Jas pasirinkome, nes jose yra net po du bendrus nežinomuosius y ir z. Sudėjus lygtis, šie nežinomieji išnyksta: $y + z = 5 + z + y + t = t + 5 + (y + z)$ ir $0 = t + 5$. Taigi $t = -5$.

Iš analogiškų lygybių $v = 3 + u, u = v + t$ randame $t = -3 \neq -5$.

22. (**C**) c

! Kad būtų paprasčiau, dalybą pakeiskime daugyba, o atimtį sudėtimi: $c = be$, $d = a + b$, $e = a + d$. Žinoma, natūraliųjų skaičių suma didesnė nei bet kuris iš dėmenų, todėl $d > a$, $d > b$, $e > a$ ir $e > d$. Natūraliųjų skaičių sandauga ne mažesnė nei bet kuris iš dauginamųjų (gali būti lygi dauginamajam, jei kitas dauginamasis lygus 1). Todėl $c \geqslant b$ ir $c \geqslant e$. Duota, kad 5 skaičiai yra skirtingi, todėl $c > b$ ir $c > e$.

Gautąsias nelygybes galima panaudoti klaidingiems atsakymams eliminuoti:

$e > a$ (ir $d > a$), tad skaičius a nėra didžiausias;

$c > b$ (ir $d > b$), tad skaičius b nėra didžiausias;

$e > d$, tad skaičius d nėra didžiausias;

$c > e$, tad skaičius e nėra didžiausias.

Vadinasi, didžiausias yra skaičius c.

Atkreipkime dėmesį, kad įrodymas lieka galioje, net jei pamiršime apie lygybę $d = a + b$ ir iš jos išplaukiančias nelygybes. Kad sprendimas būtų pilnas, pateikiame pavyzdį, įrodantį, jog sąlygą tenkinantys skaičiai egzistuoja: $a = 1$, $b = 2$, $c = 8$, $d = 3$, $e = 4$.

23. **C** 48

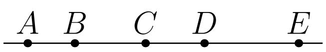
! Kadangi sudėdami po du skaičius tegavome tik tris skirtingus rezultatus, tai pasikartojimų kortelėse garantuotai yra. Tačiau kartotis negali nei kortelė su pačiu mažiausiuoju skaičiumi m, nei su pačiu didžiausiuoju skaičiumi d, nes tada $m + m = 2m$ (kuri yra lyginė) tikrai privalėtų pati mažiausioji iš visų galimų sumų, gautų sumuojant po du skaičius iš skirtingų kortelių, o pagal mūsų sumų sąrašą taip tikrai nėra, nes ten parašytoji mažiausioji suma yra 57. Analogiškai baigtųsi reikalai, jeigu kortelių su pačiu didžiausiu skaičiumi d būtų kelios – tada vėl didžiausia suma privalėtų būti suma $d + d = 2d$, kuri tada vėl būtų akivaizdžiai lyginė ir dar turėtų būti pati didžiausia iš visų sumų, gaunamų sumuojant po skaičių iš dviejų skirtingų kortelių, o taip vėl nėra, nes sąlygoje nurodyta, kad pati didžiausia iš visų tokių sumų yra 83. Čia niekur nevalia pamiršti ar kitaip kaip išleisti iš akių, kad kortelėse buvo rašomi būtent sveikieji skaičiai.

Vadinasi, kartotis gali tik „griežtai viduje“ esantys skaičiai. Tačiau tada tų skirtingų skaičių tegali būti tik trys. Iš tikrųjų, jei ant penkių kortelių būtų parašyti keturi skirtingi skaičiai $a < b < c < d$, tai, skaičiuodami visas įmanomas ant dviejų kortelių parašytų skaičių sumas, gautume bent keturis skirtingus skaičius, nes $a + b < a + c < a + d < c + d$.

Vadinasi, tėra tik trys skirtingi skaičiai, ir, kadangi mažiausias bei didžiausias skaičiai kartotis negali, tai kartojasi viduriniai skaičiai. Taigi galime laikyti, kad ant penkių kortelių parašytų skaičių rinkinys yra a, b, b, b, c, kur $a < b < c$. Tada visos įmanomos ant dviejų kortelių parašytų skaičių sumos yra $a + b$, $a + c$, $2b$, $b + c$. Be to, $a + b < 2b < b + c$. Todėl pagal uždavinio sąlygą $a + b = 57$, $2b = 70$, $b + c = 83$. Iš lygybės $2b = 70$ gauname $b = 35$, o iš lygybių $a + b = 57$ ir $b + c = 83$ gauname $a = 22$ ir $c = 48$. Taigi didžiausias ant kortelių užrašytas skaičius yra 48. Todėl teisingas atsakymas yra **C**.

24. **E** 14

! Tiesėje pažymėtus penkis taškus žymėkime raidėmis A, B, C, D, E. Be to, sakykime, kad taškas B priklauso atkarpai AC, taškas C priklauso atkarpai BD, o taškas D – atkarpai CE (žr. pav.).



Didžiausias atstumas tarp pažymėtų taškų lygus 22, todėl $AE = 22$. Antras pagal didumą atstumas tarp pažymėtų taškų lygus atkarpos AD arba atkarpos BE ilgiui ir, pagal uždavinio sąlygą, lygus 20. Vadinasi, $AB = 2$ arba $DE = 2$. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $AB = 2$ (jei $DE = 2$, tai taškus A, B, C, D, E pervadintume atitinkamai E, D, C, B, A ir tada gautume $AB = 2$). Panagrinėkime atkarpos AB kaimynę BC. Kadangi $CE = CD + DE \geqslant 5 + 6 = 11$, tai $BC = AE - AB - CE = 22 - 2 - CE \leqslant 22 - 2 - 11 = 9$. Vadinasi, atkarpos BC ilgis lygus 5, 6, 8 arba 9. Įrodysime, kad $BC = 6$.

Jei $BC = 5$, tai $AC = AB + BC = 7$. Tačiau pagal uždavinio sąlygą atstumas tarp dviejų pažymėtų taškų negali būti lygus 7.

Jei $BC = 8$, tai $AC = AB + BC = 10$, o $CE = AE - AC = 22 - 10 = 12$. Tačiau pagal uždavinio sąlygą taip būti negali.

Jei $BC = 9$, tai $AC = 11$ ir $CE = 11$. Vėlgi pagal uždavinio sąlygą taip būti negali. Vadinasi, $BC = 6$. Tada $AC = 8$, o $CE = 22 - 8 = 14$. Taigi $k = 14$.

Įrodėme, kad jei taškai tenkina uždavinio sąlygą, tai $k = 14$. Nesunku patikrinti, kad jei $AB = 2$, $BC = 6$, $CD = 9$, o $DE = 5$ (taškas B priklauso atkarpai AC, taškas C priklauso atkarpai BD, o taškas D – atkarpai CE), tai taškai A, B, C, D ir E tikrai tenkina uždavinio sąlygą.

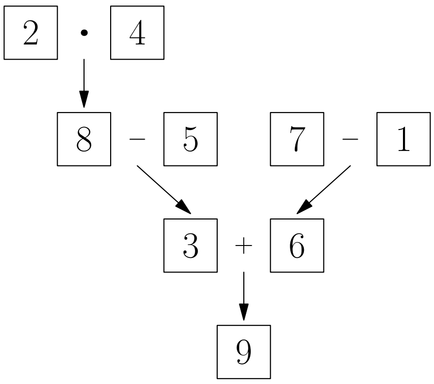
25. **A** 84

! Čia visų pirma galima palengvinti užduotį tokiu būdu. Atkreipkime dėmesį, kad $a, b, c > 0$ (skaičiai $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ turi būti dviženkliai). Bet svarbiausia, kad jei $a > b$, tai bet kuris dviženklis skaičius, kurio pirmasis skaitmuo yra a, bus didesnis už bet kurį dviženklį skaičių, kurio pirmasis skaitmuo yra b. Pvz., jei $a = 6$ ir $b = 5$, tai bet kuris skaičius 60, 61, …, 69 yra didesnis nei skaičiai 50, 51, …, 59. Tokiu atveju turėtume $\overline{ab} > \overline{bc}$. Vadinasi, $a \leqslant b$, o kadangi skaitmenys turi būti skirtingi, tai $a < b$. Panašiai $b < c$. Kita vertus, jei $a < b < c$, tai (dėl tų pačių priežasčių) $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$. Vadinasi, mums tereikia nustatyti, keliais būdais galima parinkti tris skirtingus skaitmenis a, b, c, kad galiotų nelygybės $0 < a < b < c$.

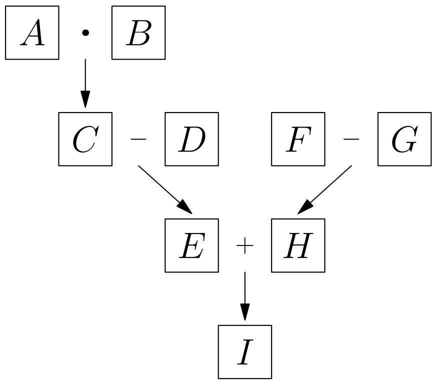
Užduotį suformuluokime dar kitaip. Reikia nustatyti, keliais būdais galima pasirinkti 3 skirtingus skaitmenis iš 9 skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir surikiuoti juos didėjimo tvarka. Pasirinktus skaitmenis surikiuoti didėjimo tvarka galima vieninteliu būdu, taigi lieka klausimas: keliais būdais galima pasirinkti 3 skirtingus skaitmenis iš 9? Skaičiuojame 3 elementų iš 9 derinius. Jų yra $C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$. (Kitaip: pirmą skaitmenį galime pasirinkti 9 būdais, antrą – 8, trečią – 7 būdais, kiekvieną nesutvarkytą skaitmenų trejetą taip pasirenkame 6 kartus, todėl iš viso gauname $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ trejetus.)

26. **D** 6

! Nesunku įsitikinti, kad skaičius nuo 1 iki 9 uždavinio sąlygoje nurodytu būdu į langelius įrašyti galima (žr. 1 pav.).



1 pav.



2 pav.

Beliko kažkokiu būdu įtikinti save, kad kitaip negali būti, arba kad atsakymas **D** yra vienintelis teisingas.

Tarkime, kad skaitmenis 1, 2, ..., 9 pavyko taip įrašyti į langelius, kad kiekvienos 2 paveikslėlyje nurodytos operacijos rezultatas sutampa su rodykle pažymėto langelio skaičiumi. Langeliuose įrašytus skaičius pažymėkime raidėmis A, B, C, D, E, F, G, H ir I (žr. 2 pav.). Pastebėsime, kad jei skaitmenis A ir B sukeistume vietomis, tai langeliuose įrašyti skaičiai vis tiek tenkintų uždavinio sąlygą. Todėl galime laikyti, kad $A \leqslant B$.

Skaitmenų A ir B sandauga C taip pat turi būti skaitmuo. Be to, skaitmenys A, B ir C visi yra skirtingi, todėl $A = 2$ ir $B = 3$ arba $A = 2$ ir $B = 4$.

Sakykime, kad $A = 2$ ir $B = 3$. Tada $C = 6$ ir $D = 1$ arba $D = 5$ (jei D būtų lygus 2, 3 arba 4, tai kurie nors du iš skaičių A, B, D ir E sutaptų). Taigi tarp skaičių A, B, C, D ir E yra skaitmenys 1, 2, 3, 5 ir 6. Bet tada $F = G + H \geqslant 4 + 7 = 11$, o taip būti negali.

Vadinasi, $A = 2$ ir $B = 4$. Tada $C = 8$ ir iš lygybės $C = D + E$ gauname, kad arba $D = 1$ ir $E = 7$ arba $D = 7$ ir $E = 1$ arba $D = 3$ ir $E = 5$ arba $D = 5$ ir $E = 3$.

Tarkime, kad $D = 1$ ir $E = 7$ arba $D = 7$ ir $E = 1$. Tada skaičiams F, G, H ir I lieka skaitmenys 3, 5, 6 ir 9. Be to, $F = G + H$, todėl $F = 9$. Taigi $H = 3$ ir $G = 6$ arba $H = 6$ ir $G = 3$. Bet kuriuo atveju $I = 5$. Tačiau, $5 = I = E + H$, vadinasi, E arba H lygus 2 arba 4, t. y. bent du iš skaitmenų A, B, E ir H sutampa.

Lieka atvejai $D = 3$ ir $E = 5$ arba $D = 5$ ir $E = 3$. Tada skaičiams F, G, H ir I lieka skaitmenys 1, 6, 7 ir 9. Be to, $F = G + H$, todėl $F = 7$. Taigi $H = 1$ ir $G = 6$ arba $H = 6$ ir $G = 1$. Bet kuriuo atveju $I = 9$. Kadangi $I = E + H$, tai tinka tik $E = 3$ ir $H = 6$. Tada $D = 5$, o $G = 1$.

27. D 6

! Tarkime, kad Elenai pavyko taip nudažyti visus natūraliuosius skaičius, kad būtų tenkinama uždavinio sąlyga. Jei paeiliui kiekvieną natūralųjį skaičių perdažysime priešinga spalva (t. y. raudoną spalvą keičiame žalia, ir atvirkščiai), tai gautas natūraliųjų skaičių nudažymas vėl tenkins uždavinio sąlygą. Vadinasi, užtenka rasti visus natūraliųjų skaičių nudažymus, kuriuose skaičius 1 nudažytas raudonai. Gautą tokių nudažymų skaičių padvigubinę, gausime visų ieškomų nudažymų skaičių. Taigi laikysime, kad skaičius 1 nudažytas raudonai.

Jei skaičius 2 nudažytas raudonai, tai skaičius $1 + 2 = 3$ taip pat nudažytas raudonai. Bet tada ir skaičius $4 = 3 + 1$ nudažytas raudonai. Taip tęsdami gauname, kad visi natūralieji skaičiai yra nudažyti raudonai. Taigi gavome tokį nudažymą:

$$RRRRRRRR\ldots$$

Sakykime, kad skaičiai 2 ir 3 nudažyti žaliai. Tada skaičius $5 = 2 + 3$ taip pat nudažytas žaliai. Be to, skaičius 4 turi būti nudažytas žaliai, nes priešingu atveju skaičius $5 = 4 + 1$ turėtų būti nudažytas raudona spalva. Taigi nagrinėjamame nudažyme skaičiai 2, 3 ir 4 nudažyti žaliai. Tada kiekvienas natūralusis skaičius $n \geqslant 5$ taip pat nudažytas žaliai, nes jei skaičius $n \geqslant 5$ yra lyginis, tai jis gaunamas prie žaliai nudažyto skaičiaus 4 paeiliui kartus pridėjus žaliai nudažytą skaičių 2, o jei skaičius $n \geqslant 5$ yra nelyginis, tai jis gaunamas prie žaliai nudažyto skaičiaus 3 paeiliui kartus pridėjus žaliai nudažytą skaičių 2. Šiuo atveju gautą nudažymą galime pavaizduoti taip:

$$R\check{Z}\check{Z}\check{Z}\check{Z}\check{Z}\check{Z}\check{Z}\ldots$$

Sakykime, kad skaičius 2 yra nudažytas žaliai, o skaičius 3 nudažytas raudonai. Tada kiekvienas natūralusis skaičius $n \geqslant 4$ yra nudažytas raudonai, nes prie raudona spalva nudažyto skaičiaus 3 paeiliui $n - 3$ kartus pridėdami raudonai nudažytą skaičių 1, gausime skaičių n. Taigi gavome nudažymą

$$R\check{Z}RRRRRR\ldots$$

Vadinasi, iš viso yra 3 natūraliųjų skaičių nudažymai, tenkinantys uždavinio sąlygą, kuriuose skaičius 1 nudažytas raudonai. Todėl, ieškomas nudažymų skaičius yra $2 \cdot 3 = 6$.

28. (B) 3

! Nupiešti stačiakampiai skirstomi pagal du požymius: kvadratas arba nekvadratas, raudonas arba mėlynas. Taigi turime keturias stačiakampių grupes: raudoni ir mėlyni kvadratai, raudoni ir mėlyni nekvadratai. Stačiakampių, priklausančių atitinkamoms grupėms, skaičių pažymėkime r_1 ir m_1, r_2 ir m_2. Reikia rasti bendrą mėlynų stačiakampių skaičių $m_1 + m_2$.

Uždavinio informaciją užrašykime lygtimis. Raudonų ir mėlynų kvadratų kartu yra 7, $r_1 + m_1 = 7$. Parašykime dar dvi lygybes:

$$r_1 + r_2 = 3 + m_1, \quad r_1 = 2 + (m_1 + m_2).$$

Sugretinkime jas. Atitinkami teiginiai panašūs: abiejuose kalbama, kad raudonų figūrų yra daugiau nei mėlynų. Tad atėmus iš vienos lygybės kitą, šis tas turėtų susiprastinti:

$$r_1 + r_2 - r_1 = 3 + m_1 - (2 + m_1 + m_2), \quad r_2 = 1 - m_2, \quad r_2 + m_2 = 1.$$

Kadangi abu skaičiai r_2 ir m_2 yra neneigiami, tai jie gali būti lygūs tik 0 arba 1. Jei $m_2 = 0$, tai $r_1 = 2 + m_1$ ir $r_1 + m_1 = 7$. Šių tiesinių lygčių sistemos sprendinys nėra sveikasis (tai lemia skirtingas skaičių 2 ir 7 lyginumas).

Taigi $m_2 = 1$. Tada $r_1 = 3 + m_1$ ir $r_1 + m_1 = 7$. Šių lygčių sistema jau turi sprendinį $r_1 = 5$, $m_1 = 2$ (ir $r_2 = 1 - m_2 = 0$). Mėlynų stačiakampių iš viso yra $m_1 + m_2 = 2 + 1 = 3$.

Pastebėsime, kad uždavinio situacija išties galima: kai turime 3 mėlynus stačiakampius, iš jų 2 kvadratus, bei 5 raudonus stačiakampius, kurie visi yra kvadratai.

29. (B) 2

! Dažnai sprendžiant uždavinį apsimoka pirmiau sugalvoti jį atitinkantį pavyzdį, o jau tada ieškoti bendro sprendimo. Sprendžiant šį uždavinį verta daryti atvirkščiai.

Abstrakčiai nagrinėkime sąlygoje įvardytą situaciją. Tarkime, kad turime 10 skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Mums rūpi, kelios iš 10 lygybių

$$x_1 = x_2 x_3 \ldots x_{10}, \qquad x_2 = x_1 x_3 \ldots x_{10}, \ \ldots, \qquad x_{10} = x_1 x_2 \ldots x_9$$

gali būti teisingos.

Akivaizdu, kad viena iš jų gali būti teisinga (pvz., jei turime 9 skaičius 1, 2, 3, …, 9 ir dešimtą skaičių $9! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9$). Elkimės atsargiai ir toliau iš eilės klauskime, ar gali būti teisingos dvi lygybės. Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad tai pirmosios dvi lygybės (jei ne, pakeiskime skaičių numeraciją). Bandykime išsiaiškinti, kaip šios lygtys susieja nežinomuosius. Lygtys yra panašios – jų dešinėje pusėje daug sutampančių dauginamųjų. Todėl kai padalysime vieną lygtį iš kitos, daug jų susiprastins ir gausime paprastesnę, daugiau mums pasakančią lygybę.

Kad jau dalysime, pasitikrinkime, ar nedalijame iš 0. Jei kuris iš nežinomųjų lygus 0, pvz., $x_1 = 0$, tai likę 9 nežinomieji nelygūs 0. Tada nė viena iš 10 lygybių negalioja (pirmosios kairė pusė lygi 0, bet ne dešinė, o likusiose lygybėse dešinė pusė lygi 0, bet ne kairė). Taigi toliau galime laikyti, kad visi 10 skaičių nelygūs 0.

Padalijęs pirmąją lygtį iš antrosios, tada kryžmai sudauginę trupmenų skaitiklius ir vardiklius bei ištraukę šaknį iš abiejų lygybės pusių, gauname lygybes

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2 \cdot (x_3 \dots x_{10})}{x_1 \cdot (x_3 \dots x_{10})} = \frac{x_2}{x_1}, \qquad x_1^2 = x_2^2, \qquad x_1 = \pm x_2.$$

Taigi $x_1 = x_2$ arba $x_1 = -x_2$. Kadangi skaičiai turi būti skirtingi, tai būtinai galioja lygybė $x_1 = -x_2$.

Taip iš karto sužinome, kad trys iš 10 lygybių teisingos būti negali. Juk jei teisinga būtų dar viena lygybė, pvz., trečioji, tai pakartoję tuos pačius veiksmus su pirmąja ir trečiąja lygybėmis, gausime $x_1 = -x_3$. Tada $-x_2 = -x_3$ ir $x_2 = x_3$, o taip negali būti, nes visi 10 skaičių turi būti skirtingi.

Beliko įsitikinti, kad dvi lygybės gali būti teisingos, sukonstruojant atitinkamą pavyzdį. Bet kaip pasirinkime $x_1 \neq 0$, pvz., $x_1 = 1$. Tada $x_2 = -x_1 = -1$. Taip pat bet kaip (tik vengdami jau panaudotų reikšmių ir nulio) galime pasirinkti 7 iš likusius 8 skaičių, pvz., 2, 3, …, 8. Paskutinis skaičius x_{10} su jau parinktais skaičiais turi tenkinti dvi lygybes:

$$1 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot 8 \cdot x_{10} = -8! \cdot x_{10}, \qquad -1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot x_{10} = 8! \cdot x_{10}.$$

Lygybės ekvivalenčios (vieną gauname, kitą padauginę iš -1) ir turi sprendinį $x_{10} = -\frac{1}{8!}$ (čia 8! žymi skaičiaus 8 faktorialą $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8$). Taigi du skaičiai bus pabraukti, jei 10 skaičių yra $-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, -\frac{1}{8!}$.

!! Uždavinį greičiau išspręs tas, kas kitaip užrašys 10 lygybių. Vėl pastebėkime, kad jei kuris iš 10 skaičių lygus 0, tai nė vienas skaičius nebus pabrauktas. Visų 10 skaičių sandaugą pažymėkime P. Lygybių dešiniosios pusės „beveik" lygios P, kiekvienoje iš jų trūksta tik vieno dauginamojo. Kiekvieną iš lygybių padauginkime iš atitinkamo dauginamojo (pirmąją lygtį iš x_1, antrąją iš x_2 ir t. t.). Jei nė vienas skaičius nelygus 0, tai gausime 10 lygybių, ekvivalenčių pradinėms:

$$x_1^2 = x_1 x_2 \dots x_{10} = P, \qquad x_2^2 = P, \quad \dots, \qquad x_{10}^2 = P.$$

Jei $P < 0$, tai negalioja nė viena lygybė (jokio skaičiaus kvadratas nebus nelygus neigiamam skaičiui). O jei $P > 0$, tai turime lygybes

$$x_1 = \pm\sqrt{P}, \qquad x_2 = \pm\sqrt{P}, \quad \dots, \qquad x_{10} = \pm\sqrt{P}.$$

Kadangi visi skaičiai skirtingi, iš karto matome, kad tik dvi lygybės gali būti teisingos (viena su ženklu „+", kita su ženklu „−").

Dabar paprasta sugalvoti ir pavyzdį, kad galiotų dvi lygybės. Imkime $x_1 = 1, x_2 = -1$, o likusius skaičius tereikia parinkti taip, kad galiotų $P = 1$, nes tada $x_1 = \sqrt{P}, x_2 = -\sqrt{P}$. Pvz., tinka **!** dalies pavyzdys.

30. (D) 65

! Apėjus pilną ratą, žmonių rate sumažėjo perpus, t. y. liko 48 žmonės, kurie toliau skaičiavosi nuo $96 + 1$ iki $96 + 48$. Po dar vieno etapo liko 24, toliau 12, 6 ir pagaliau tik 3 žmonės. Kai liko 6 žmonės ir skaičiavosi toliau, jų ištarti skaičiai buvo $96+48+24+12+1 = 181$, 182, 183, 184, 185, 186. Likę 3 žmonės ištarė skaičius 187, 188, 189, ir tas, kuris ištarė 188, pasitraukė. Iš likusių žmonių pirmasis ištarė skaičių 190 ir pasitraukė. Liko tik tas, kuris prieš tai ištarė skaičių 189. Reikia nustatyti, kokį skaičių tas žmogus ištarė pradžioje.

Vėl pradėkime nuo pradžios. Pirmojo skaičiuotės etapo rezultatai iš karto pasako, kad ieškomas skaičius negali būti lyginis. Ką pasako antrojo etapo, kai ištarti dar 48 skaičiai, rezultatai? Skaičiavosi žmonės, pradžioje ištarę skaičius 1, 3, 5, ..., 95, ir naują lyginį skaičių ištarė bei pasitraukė kas antras. Gretimų sekos skaičių skirtumai yra lygūs 2, o išbraukę kas antrą skaičių gausime seką 1, 5, 9, ..., 93, vis tiek pasidedančią skaičiumi 1, bet gretimų skaičių skirtumai lygūs 4 (tai yra skaičiai, kurie užrašomi pavidalu $4k + 1$, kur skaičius k sveikasis, ir besidalijantys iš 4 su liekana 1).

Panašiai trečiojo etapo rezultatai vėl leidžia išbraukti kas antrą skaičių ir gauti seką 1, 9, 17, ..., (skirtumai tarp skaičių lygūs 8), o po ketvirtojo etapo rate lieka 6 žmonės, pradžioje ištarę skaičius 1, 17, 33, 49, 65, 81 (skirtumai tarp skaičių lygūs 16). Pagaliau po penktojo etapo lieka skaičiai 1, 33 ir 65. Juos ištarę žmonės atitinkamai ištaria skaičius 187, 188 ir 189. Skaičius 189 atitinka skaičių 65. Tad 65 ir yra atsakymas.

!! Spręskime uždavinį abstrakčiau. Tarkime, kad žmogus X, stovintis rate, kažkuriuo metu ištarė skaičių k ir nepasitraukė. Kokį skaičių jis ištars kitą kartą? Skaičius k yra nelyginis. Prieš tai jau ištarta $k - 1$ skaičių ir kas antras žmogus pasitraukė. Taigi rate yra likę $96 - (k - 1)/2$ žmonių. Visi jie dar ištars bent po vieną skaičių ir paskutinis iš jų bus žmogus X. Skaičiai tariami iš eilės, tad jis ištars skaičių $l = k + 96 - (k - 1)/2 = 96 + (k + 1)/2$.

Gautoji formulė leidžia rasti ištartų skaičių seką bet kuriam žmogui. Formulę galima ir apversti. Jei žmogus ištarė skaičių l, tai prieš tai jis ištarė skaičių k, kurį galima išreikšti per l:

$$k = 2l - 193.$$

Kaip ir **!** dalyje, nustatę, kad paskutinis žmogus ištarė skaičių 189, galime iš eilės rasti skaičius, kuriuos jis ištarė prieš tai: $2 \cdot 189 - 193 = 185$, $2 \cdot 185 - 193 = 177$, $2 \cdot 177 - 193 = 161$, $2 \cdot 161 - 193 = 129$, $2 \cdot 129 - 193 = 65$. Taip randame atsakymą 65.

Pabaigai pastebėsime, kad apibendrinant gautąsias formules galima įrodyti tokį teiginį. Jei ratu sustoja n žmonių (nebūtinai 96) ir paskutinis likęs žmogus pradžioje ištaria skaičių k, tai skaičius k yra toks skaičius nuo 1 iki n, kad $2n + 1 - k$ dalijasi iš didžiausio galimo dvejeto laipsnio. Iš šio teiginio išplaukia gana paprastas skaičiaus k gavimo algoritmas: reikia užrašyti skaičių n dvejetainiu pavidalu, o tada nubraukti pirmąjį skaitmenį 1 ir parašyti jį skaičiaus gale. Taip gaunamas skaičiaus k dvejetainis pavidalas. Pvz., jei $n = 96 = 1100000_{(2)}$, tai $k = 1000001_{(2)} = 65$. Matematikoje labiau pasikausčiusiam skaitytojui siūlome visa tai įrodyti!

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	A
2	A
3	E
4	A
5	A
6	D
7	E
8	C
9	B
10	C
11	B
12	B
13	B
14	D
15	D
16	D
17	A
18	C
19	D
20	D
21	E
22	C
23	C
24	E
25	A
26	D
27	D
28	B
29	B
30	D