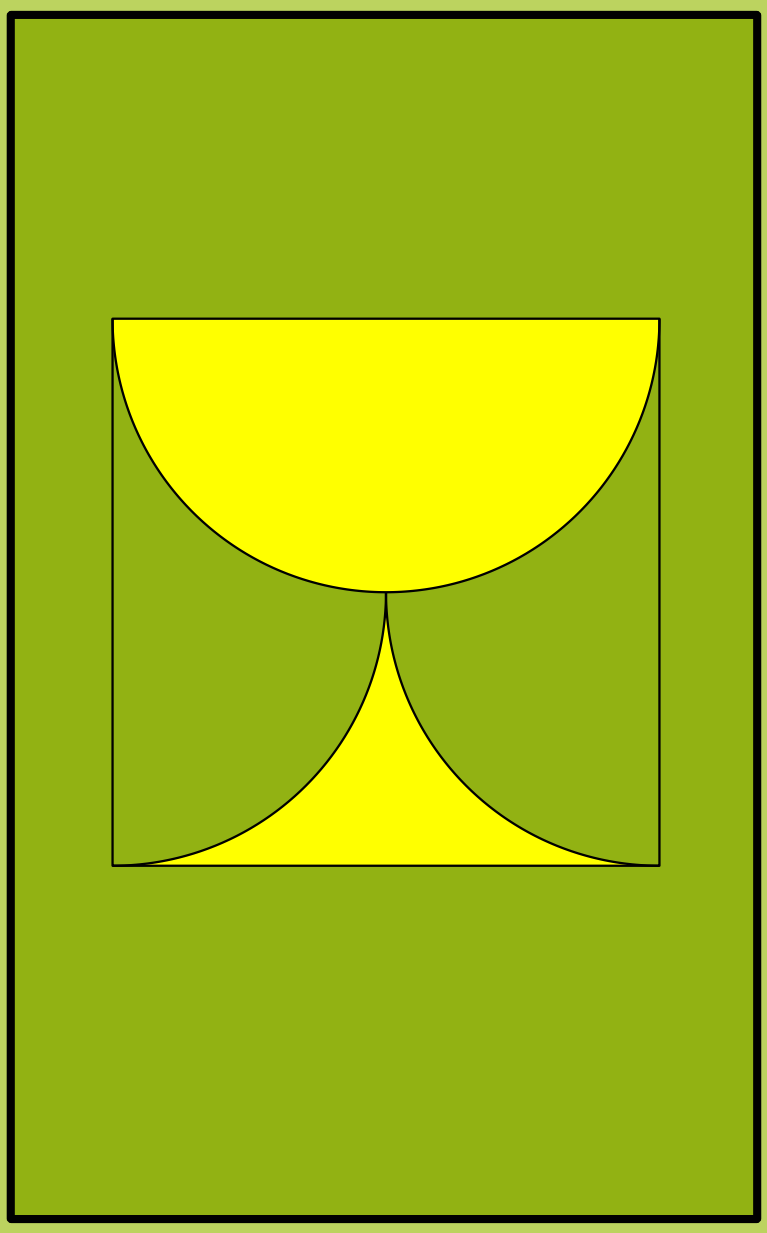
Kengūra 2015

Užduotys ir sprendimai



s

Junioras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2015

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

© Aivaras Novikas, 2015
© *Kengūros* organizavimo komitetas, 2015

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašas **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Užduočių sprendimai **13**

Atsakymai **32**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesniųjų klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 50000 Lietuvos 1 – 12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2015 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia gali būti šmaikšti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2015 metų kovo 19 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų kengūriniai sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

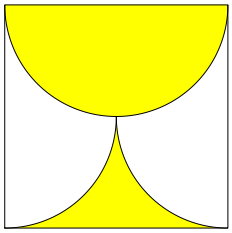
2015 m. Junioro užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kuris skaičius mažiausiai skiriasi nuo $20{,}15 \cdot 51{,}02$?
A) 100 **B)** 1 000 **C)** 10 000 **D)** 100 000 **E)** 1 000 000

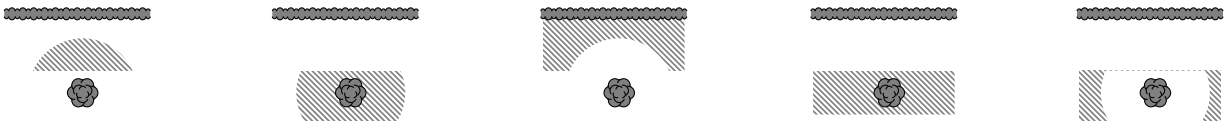
2. Mama sukabino išskalbtus marškinėlius iš eilės ant vienos virvės, o vaikams liepė tarp kiekvienų gretimų marškinėlių pakabinti po vieną išskalbtą kojinę. Taip ant virvės atsidūrė 29 skalbiniai. Kiek marškinėlių išskalbė mama?
A) 10 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

3. Kvadrato, kurio kraštinė lygi a, viduje nubrėžtas pusapskritimis ir du apskritimo ketvirčiai. Koks yra nudažytos kvadrato dalies plotas?
A) $\frac{\pi a^2}{8}$ **B)** $\frac{a^2}{2}$ **C)** $\frac{\pi a^2}{2}$ **D)** $\frac{a^2}{4}$ **E)** $\frac{\pi a^2}{4}$



4. Sesutės Auksė, Bronė ir Danutė kartu nusipirko 30 sausainių ir pasidalijo juos po lygiai. Tačiau Auksė sumokėjo 80 centų, Bronė 50 centų, o Danutė 20 centų. Po to seserys visgi nusprendė pasidalyti sausainius proporcingai kiekvienos sumokėtai pinigų sumai. Kiek papildomai sausainių gaus Auksė?
A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

5. Godusis ponas Žabtas nori iškasti lobį, kurį savo sode kadaise pats ir paslėpė. Bet jis teprisimena, kad lobį užkasė mažiausiai 5 m atstumu nuo gyvatvorės ir daugiausiai 5 m atstumu nuo senosios obels. Ponas Žabtas turės patikrinti tam tikrą savo sodo teritoriją. Kuriame paveikslėlyje ji pavaizduota?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

6. Koks yra skaičiaus $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$ paskutinis skaitmuo?
A) 1 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

7. Visi 33 vienos klasės mokiniai yra dideli informatikos arba kūno kultūros mėgėjai. Trys mokiniai mėgsta abu dalykus. Klasėje yra dvigubai daugiau mėgstančių tik informatiką nei mėgstančių tik kūno kultūrą. Kiek mokinių mėgsta informatiką?
A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 23

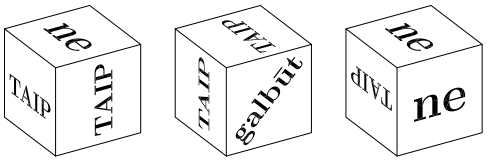
8. Kuris iš šių skaičių nėra nei tikslusis kvadratas, nei tikslusis kubas?
A) 6^{13} **B)** 5^{12} **C)** 4^{11} **D)** 3^{10} **E)** 2^{9}

9. Šykštusis ponas Žabtas nusipirko 100 žvakių. Kasdien jis sudegina po žvakę, o likusį vašką surenka. Iš 7 sudegintų žvakių likučių jis pats tučtuojau pagamina vieną naują žvakę. Po kelių dienų ponas Žabtas bus priverstas vėl palikti savo namus ir eiti pirkti naujų žvakių?
A) 112 **B)** 114 **C)** 115 **D)** 116 **E)** 117

10. Kuriame skaičių sąraše išvardytos visos galimybės, kiek stačiųjų kampų gali turėti iškilasis penkiakampis?
A) 1, 2, 3 **B)** 0, 1, 2, 3, 4 **C)** 0, 1, 2, 3 **D)** 0, 1, 2 **E)** 1, 2

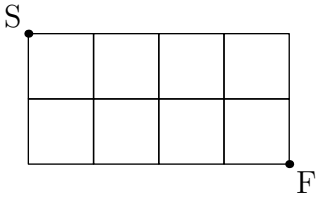
Klausimai po 4 taškus

11. Prietaringasis ponas Žabtas svarbiausius gyvenimo sprendimus priima mesdamas savo mėgstamą lošimo kauliuką. Paveikslėlyje jis pavaizduotas net tris kartus. Su kokia tikimybe Žabtas priima tvirtą sprendimą „TAIP“, metęs kauliuką?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{9}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{5}{6}$

12. Kokio ilgio yra trumpiausias kelias nuo starto iki finišo (žr. pav.), jei leidžiama judėti tik vienetinių langelių įstrižainėmis ir kraštinėmis?

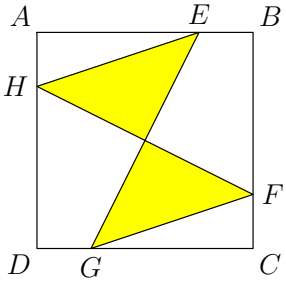


A) $2\sqrt{5}$ **B)** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ **C)** $2+2\sqrt{2}$ **D)** $4\sqrt{2}$ **E)** 6

13. Drumbacėlės planetoje bet kuris sparnausis turi bent dvi ausis, bet savų nemato. Krateryje susitiko trys sparnausiai Micė, Acė ir Kumbacėlė. Micė tarė: „Regiu 8 ausis.“ Acė tarė: „O aš regiu 7 ausis.“ Kumbacėlė tarė: „Negali būti! Regiu tik 5 ausis.“ Keliaausė yra Kumbacėlė?
A) Dviausė **B)** Keturausė **C)** Penkiaausė **D)** Šešiaausė **E)** Septynausė

14. Stiklainis yra stačiakampio gretasienio formos, jo kvadratinio pagrindo kraštinė lygi 10 cm. Į stiklainį pripilta vandens iki h cm aukščio. Tada stiklainio dugne pastatytas metalinis kubelis, kurio kraštinė lygi 2 cm. Vanduo apsėmė kubelį iki viršaus. Kokia yra mažiausia galima skaičiaus h reikšmė?
A) 1,92 **B)** 1,93 **C)** 1,90 **D)** 1,91 **E)** 1,94

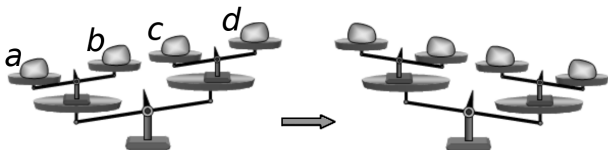
15. Kvadrato $ABCD$ plotas lygus 80. Kvadrato kraštinėse pažymėti taškai E, F, G ir H (žr. pav.), kuriems galioja lygybės $AE = BF = CG = DH$ ir $AE = 3EB$. Koks yra nudažytos kvadrato dalies plotas?



A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

16. Šiandien tėvo ir sūnaus amžių (metais) sandauga lygi 2015. Koks yra jų amžių skirtumas?
A) 26 **B)** 29 **C)** 31 **D)** 34 **E)** 36

17. Ant dviaukščių svirtinių svarstyklių padėti svoriai a, b, c, d. Sukeitus du svorius vietomis, svarstyklės pakrypo, kaip parodyta paveikslėlyje. Kurie svoriai sukeisti?



A) a ir b **B)** b ir d **C)** b ir c **D)** a ir d **E)** a ir c

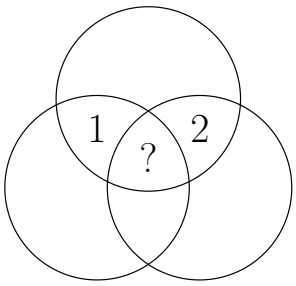
18. Auksė sugalvojo tokį realųjį skaičių c, kad abi lygties $x^2 - 85x + c = 0$ šaknys yra pirminiai skaičiai. Kokia yra skaičiaus c skaitmenų suma?
A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 21

19. Triženklio natūraliojo skaičiaus bet kurie du gretimi skaitmenys skiriasi per 3. Kiek yra tokių skaičių?
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 27

20. Kuris skaičius yra kontrapavyzdys teiginiui „Jei n yra pirminis skaičius, tai lygiai vienas iš skaičių $n-2$ ir $n+2$ yra pirminis“?
A) $n = 11$ **B)** $n = 19$ **C)** $n = 21$ **D)** $n = 29$ **E)** $n = 37$

Klausimai po 5 taškus

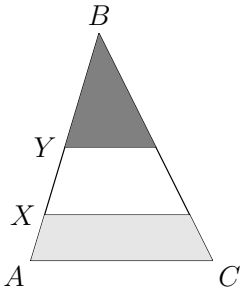
21. Tris skritulius sudaro 7 sritys. Kiekvienoje srityje įrašyta po skaičių (paveikslėlyje parodyti du iš jų). Bet kuris skaičius lygus skaičių, įrašytų gretimose srityse, sumai. (Sritys gretimos, jei jų bendrą kraštą sudaro daugiau nei vienas taškas.) Koks skaičius įrašytas vidurinėje srityje?
A) 0 **B)** -3 **C)** 3 **D)** -6 **E)** 6



22. Petrė nori pastatyti ant lentynos tris skirtingus žodynus ir du skirtingus romanus. Keliais būdais ji tai gali padaryti, jei ir žodynai turi stovėti vienas šalia kito, ir romanai turi stovėti vienas šalia kito?
A) 12 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 60 **E)** 120

23. Keli dviženkliai natūralieji skaičiai gali būti užrašyti kaip lygiai šešių skirtingų dvejeto laipsnių suma (2^0 taip pat yra dvejeto laipsnis)?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

24. Per trikampio ABC kraštinės AB taškus X ir Y nubrėžtos atkarpos, lygiagrečios kraštinei AC (žr. pav.). Nudažytų dalių plotai lygūs, ir $BX : XA = 4 : 1$. Kam lygus santykis $BY : YA$?
A) $1:1$ **B)** $2:1$ **C)** $3:1$ **D)** $3:2$ **E)** $4:3$



25. Stačiojo trikampio smailiojo kampo pusiaukampinė dalija priešais esantį statinį į atkarpas, kurių ilgiai yra 1 ir 2. Koks yra pusiaukampinės ilgis?
A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\sqrt{4}$ **D)** $\sqrt{5}$ **E)** $\sqrt{6}$

26. Keliais būdais galima parinkti tris skirtingus skaitmenis a, b, c, kad galiotų nelygybės $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$? (Užrašas $\overline{xy}$ žymi dviženklį skaičių su skaitmenimis x ir y.)
A) 84 **B)** 96 **C)** 125 **D)** 201 **E)** 502

27. Sekoje 1, 2, 3, ... , $n-1$, n išbraukus vieną skaičių, likusių skaičių vidurkis tapo lygus 4,75. Koks skaičius buvo išbrauktas?
A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** Neįmanoma nustatyti

28. Skaičius 12 turi 6 natūraliuosius daliklius 1, 2, 3, 4, 6, 12. Kiek daugiausiai natūraliųjų daliklių gali turėti dviženklis natūralusis skaičius?
A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

29. Tomas užrašė 10 skirtingų realiųjų skaičių, o tada pabraukė kiekvieną skaičių, lygų likusių 9 skaičių sandaugai. Kiek daugiausiai skaičių jis galėjo pabraukti?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** 10

30. Tiesėje pažymėti keli taškai. Nagrinėjamos visos atkarpos, kurių galai yra pažymėtieji taškai. Vienas iš pažymėtųjų taškų yra lygiai 80 nagrinėjamųjų atkarpų vidaus taškas, o kitas – lygiai 90 nagrinėjamųjų atkarpų vidaus taškas. Kiek taškų buvo pažymėta?
A) 20 **B)** 22 **C)** 80 **D)** 90 **E)** Neįmanoma nustatyti

Junioro užduočių sprendimai

1. (B) 1 000

? Skaičius verta suapvalinti dešimčių tikslumu: $20{,}15 \approx 20$ ir $51{,}02 \approx 50$. Taigi $20{,}15 \cdot 51{,}02 \approx$ $\approx 20 \cdot 50 = 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot 10 \cdot 10 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

! Kaip neskaičiuojant tikslios sandaugos reikšmės įsitikinti, kad jos ir skaičiaus 1000 skirtumas išties yra mažiausias iš galimų? Įvertinkime sandaugos reikšmę: $20{,}15 \cdot 51{,}02 > 20 \cdot 50 = 1000$ ir $20{,}15 \cdot 51{,}02 < 30 \cdot 60 = 3 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10 = (3 \cdot 6) \cdot 10 \cdot 10 = 1800 < 10000$. Reikšmė yra tarp 1000 ir 10000, todėl ji mažiausiai skiriasi nuo vieno iš šių skaičių. Kadangi $0 < 20{,}15 \cdot 51{,}02 - 1000 <$ $< 1800 - 1000 = 800$ ir $10000 - 20{,}15 \cdot 51{,}02 > 10000 - 1800 > 800$, tai sandaugos reikšmė yra arčiau skaičiaus 1000.

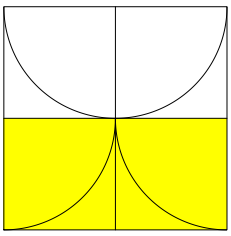
2. (E) 15

? Lengva pastebėti, kad tinka atsakymas **E**, o kiti atsakymai netinka. Pavyzdžiui, jei būtų pakabinta 10 marškinėlių, tai turėtume 9 tarpus, kuriuose pakabintos kojinės. Tada skalbinių būtų $10 + 9 = 19$. Bet jei marškinėlių pakabinta 15, tai turime 14 tarpų ir todėl 14 kojinių. Iš viso turime $15 + 14 = 29$ skalbinius.

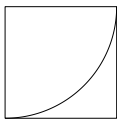
! Tarkime, yra n marškinėlių. Tada turime $n - 1$ tarpą (tarp pirmų ir antrų marškinėlių, tarp antrų ir trečių, ..., tarp priešpaskutinių $n - 1$-ųjų ir paskutinių n-tųjų) ir todėl $n - 1$ kojinę. Gauname lygtį $n + (n - 1) = 2n - 1 = 29$, iš čia $n = 15$.

3. (B) $\dfrac{a^2}{2}$

? Kadangi skaičiuojame nudažytos figūros plotą, kalbėkime verčiau apie pusskritulį, o ne pusapskritimį.



Tai geometrinio pastabumo uždavinys. Dviem atkarpomis kvadratą padalykime į keturis lygius mažesnius kvadratėlius, kurių kraštinės ilgis yra $a/2$ (žr. pav.). Matome, kad atkarpų susikirtimo taškas (kvadrato centras) sutampa su bendruoju apskritimo lankų tašku. Viršuje pusskritulis padalytas į du skritulio ketvirčius, o apačioje horizontalioji atkarpa atkerta dar du tokius pat ketvirčius. Todėl jei vietoj viršutinio pusskritulio nudažysime apatinius du ketvirčius (kaip tai padaryta paveikslėlyje), nudažytos kvadrato dalies plotas nepasikeis. Dabar nudažyti du kvadratėliai, sudarantys pusę kvadrato. Taigi ir ieškomas plotas yra lygus pusei kvadrato ploto a^2.



! Įsitikinkime, kad išnagrinėta situacija įmanoma. Imkime kvadratėlį, kurio kraštinė yra $a/2$, ir jo viduje nubrėžkime apskritimo su centru kvadratėlio viršūnėje ir spinduliu $a/2$ lanką. Lanko galai bus būtent tokiu atstumu nuo centro nutolusios kitos dvi kvadratėlio viršūnės (žr. pav.). Tai bus apskritimo ketvirtis, nes centrinis kampas, besiremiantis į šį lanką, bus statusis, o tai yra ketvirtis pilnojo kampo ($360° : 4 = 90°$). Iš 4 tokių vienodų kvadratėlių galime sudėti kvadratą, koks pavaizduotas pradiniame paveikslėlyje: du apatiniai lankai bus apskritimo ketvirčiai, o du viršutiniai suglausti skritulio ketvirčiai sudarys pusskritulį. Kaip pastebėjome **?** dalyje, visi lankai eis per kvadrato centrą ir visi skritulio ketvirčiai bus lygūs ir lygiapločiai.

Tačiau ar ši situacija vienintelė? Sąlygos paveikslėlis *atrodo* simetriškas, apskritimų lankų spinduliai *atrodo* lygūs. Bet juk sąlygoje to nepasakyta.

Apskritimą vienareikšmiškai apibrėžia jo centras ir spindulys. Pusapskritimio skersmuo yra ilgio a kvadrato kraštinė. Todėl pusapskritimio centras yra šios kraštinės vidurys, o spindulys lygus $a/2$; lanko galai – duotojo kvadrato viršūnės. Taigi pusapskritimio kitaip nubrėžti neišeis ir jis eina per kvadrato centrą.

Jei ir ketvirčių galai sutampa su kvadrato centru, tai ketvirčių centrai ir spinduliai taip pat randami vienareikšmiškai. Ketvirčio centras yra šio lanko galus jungiančios stygos vidurio statmens bei apskritimo, kurio skersmuo yra minėtoji styga, sankirta. Nors tokių sankirtų apskritai yra dvi, viena iš jų netinka dėl to, į kurią pusę nukreiptas apskritimo lankas (ketvirtis). Spindulys yra atstumas nuo centro iki apskritimo lanko bet kurio galo.

Bet ar būtinai ketvirčiai eina per kvadrato centrą, žemiausią pusapskritimio tašką? Jei ir čia nepasitikėtume paveikslėliu, galėtume įrodyti, kad priešingu atveju vienas iš apskritimo ketvirčių turi su apatine kvadrato kraštine ne vieną, bet du bendrus taškus (šį įrodymą, kiek sunkesnį, praleidžiame).

Taigi yra galima vienintelė situacija, kurią jau išnagrinėjome.

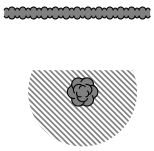
4. **E** 6

! Seserų sumokėtų pinigų santykis yra $80 : 50 : 20 = 8 : 5 : 2$. Padalykime sausainius į $8 + 5 + 2 = 15$ lygių dalių – po $30 : 15 = 2$ sausainius. Auksei iš viso turi atitekti 8 dalys arba $8 \cdot 2 = 16$ sausainių. Ji jau turi $30 : 3 = 10$ sausainių, todėl papildomai gaus $16 - 10 = 6$ sausainius.

!! Žinoma, uždavinį galima išspręsti sudarant lygtį. Jei Auksė papildomai gaus x sausainių, tai turės jų $30 : 3 + x = 10 + x$, o kitos dvi seserys turės po $\frac{50}{80}(10 + x) = \frac{5}{8}(10 + x)$ ir $\frac{20}{80}(10 + x) = \frac{2}{8}(10 + x)$ sausainių. Gauname tiesinę lygtį

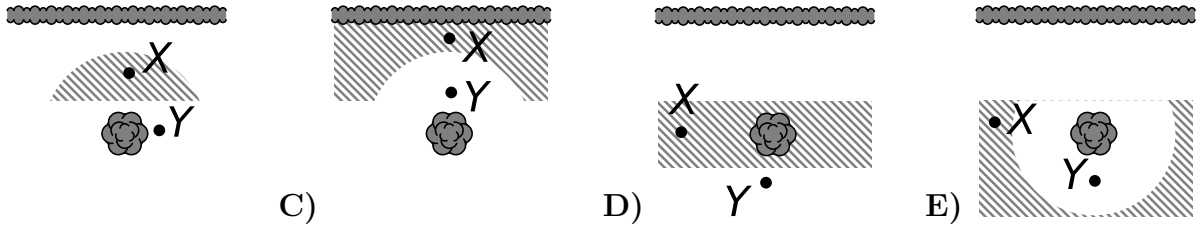
$$10 + x + \frac{5}{8}(10 + x) + \frac{2}{8}(10 + x) = 30$$

ir $x = 6$.



5. (B)

? Jei taškas X priklauso pavaizduotai tikrintinai teritorijai, tai jis nutolęs (bent 5 m) nuo gyvatvorės ir yra pakankamai arti (daugiausiai 5 m atstumu) nuo obels. Jei kitas taškas Y yra dar arčiau obels ir dar toliau nuo gyvatvorės, tai jis taip pat turi priklausyti pavaizduotai teritorijai. Tačiau paveikslėliuose **A**, **C**, **D**, **E** šis principas pažeistas:

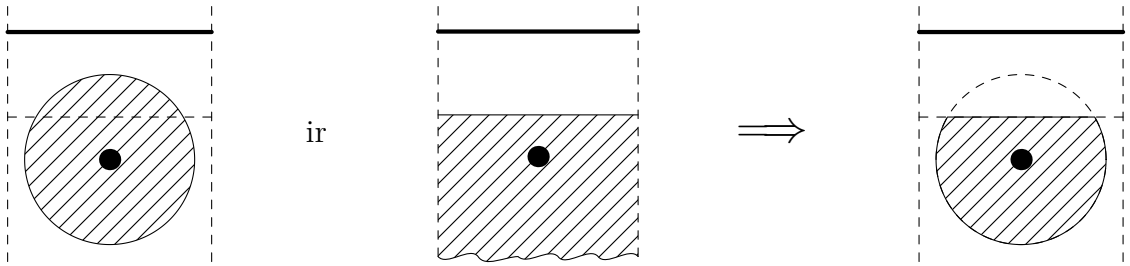


! Žinoma, tikrintina teritorija priklauso nuo gyvatvorės ir obels tarpusavio padėties, nuo gyvatvorės (kaip atkarpos) ilgio. Įsitikinkime, kad atsakymas **B** galimas.

Teritoriją aplink obelį, kurios taškai nutolę nuo obels daugiausiai 5 m atstumu, riboja apskritimas (prisiminkite apskritimo apibrėžimą). Taigi ji yra skritulys, kurio centras – obelis.

Gyvatvorę natūralu interpretuoti kaip atkarpą. Atstumas iki atkarpos – statmens, nuleisto į tą atkarpą, ilgis (jei tik tas statmuo kerta atkarpą, o ne jos tęsinį). Taškai, nutolę nuo atkarpos per 5 m, gaunami lygiagrečiai paslinkus atkarpą per 5 m viena kuria jai statmena kryptimi. Taškai, nutolę dar labiau, bus už paslinktosios atkarpos (jie sudaro dalį pusplokštumės; šiai aibei priklauso ir daugiau taškų už atsakymų paveikslėlių ribų).

Lobio vieta priklauso abiem šioms aibėms (skrituliui ir pusplokštumės daliai), taigi turime rasti jų sankirtą (žr. pav.).



Nors antrajai aibei priklauso daugiau taškų, kurių nepavaizdavome, bet jie nepriklauso skrituliui, tad nepriklauso ir gautai sankirtai.

6. (C) 6

! Sudedant arba dauginant (todėl ir keliant natūraliuoju laipsniu) natūraliuosius skaičius, rezultato paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dėmenų arba dauginamųjų paskutinių skaitmenų. Be to, $2015^0 = 1$. Todėl pakanka nustatyti, kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius $5^2 + 1 + 5 + 5^5 = 31 + 5^5$. Skaičius 5^5 baigiasi skaitmeniu 5, nes dalijasi iš 5 ir yra nelyginis (lyginis dalus iš 5 skaičius baigtųsi nuliu). Ieškomas skaitmuo vėlgi priklauso tik nuo dėmenų paskutinių skaitmenų sumos ir yra lygus $1 + 5 = 6$.

7. (E) 23

! Sprendžiant šį uždavinį, svarbu suvokti, kad klasę sudaro trys nesikertančios mokinių grupės: mėgstantys tik informatiką, mėgstantys tik kūno kultūrą ir mėgstantys abu dalykus mokiniai (tokių, kurie nemėgtų abiejų dalykų, nėra). Tarkime, kad informatiką mėgsta x mokinių (čia turime dvi mokinių grupes). Spręskime uždavinį, sudarydami lygtį.

Abu dalykus mėgsta 3 mokiniai, todėl tik informatiką mėgsta $x - 3$ mokiniai, o kūno kultūrą mėgsta $(x - 3)/2$ mokinių. Taigi iš viso yra

$$x - 3 + (x - 3)/2 + 3 = 33$$

mokiniai. Išsprendę lygtį gauname $x = 23$.

!! Lygties sudaryti nebūtina. Yra $33 - 3 = 30$ mokinių, mėgstančių tik vieną dalyką. Tik informatiką ir tik kūno kultūrą mėgstančių mokinių santykis yra $2 : 1$, taigi jų yra atitinkamai 20 ir 10. Todėl mokinių, mėgstančių informatiką (tiek kūno kultūrą mėgstančių, tiek nemėgstančių), yra $20 + 3 = 23$.

8. (A) 6^{13}

? Atsakymas **D** yra kvadratas: $3^{10} = 3^{5\cdot 2} = (3^5)^2$.
Atsakymas **E** yra kubas: $2^9 = 2^{3\cdot 3} = (2^3)^3$.
Atsakymas **B** yra ir kvadratas, ir kubas: $5^{12} = 5^{6\cdot 2} = (5^6)^2$ ir $5^{12} = 5^{4\cdot 3} = (5^4)^3$.
Galbūt kiek sunkiau pastebėti, kad atsakymas **C** yra kvadratas: $4^{11} = (2^2)^{11} = 2^{2\cdot 11} = (2^{11})^2$.

! Kaip įrodyti, kad skaičius 6^{13} nėra kvadratas? Tarkime, kad tai kvadratas. Tada egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad $n^2 = 6^{13} = 2^{13} \cdot 3^{13}$. Vieninteliai du pirminiai skaičiaus 6^{13} dalikliai yra 2 ir 3, todėl tik iš jų tegali dalytis n, o skaičiaus n skaidinys pirminiais daugikliais turi būti $n = 2^x 3^y$, kur x ir y yra neneigiami sveikieji skaičiai. Tada $2^{13} \cdot 3^{13} = n^2 = 2^{2x} \cdot 3^{2y}$. Matome, kad didžiausias dvejeto laipsnis, iš kurio dalijasi n^2, viena vertus, yra 2^{13}, o kita vertus, 2^{2x}. Tada $2^{13} = 2^{2x}$, $13 = 2x$ ir skaičius x nėra sveikasis. Gavome prieštarą. Vadinasi, 6^{13} nėra tikslusis kvadratas.

Analogiškai įrodoma, kad 6^{13} nėra kubas. Nagrinėdami lygybę $2^{13} \cdot 3^{13} = n^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y}$, gauname, kad $13 = 3x$. Lygtis ir vėl neturi sveikųjų sprendinių.

9. (D) 116

! Žvakių, žinoma, užteks 100 dienų. Padalykime 100 iš 7 su liekana. Kadangi $100 = 7\cdot 14+2$, tai po 100 dienų Žabtas bus pagaminęs 14 papildomų žvakių ir turės dar dviejų žvakių likučius. Tad gauname 14 papildomų dienų ir dar 14-os sudegintų žvakių likučius. Iš viso 16-os žvakių likučiai leis Žabtui pagaminti dar dvi papildomas žvakes ir jam vėl liks dviejų žvakių likučiai (nes $16 = 2\cdot 7+2$). Žabtui tai suteikia dar dvi dienas, po kurių jis turės dviejų ką tik sudegintų žvakių likučius, taigi iš viso $2+2 = 4$ žvakių likučius, iš kurių negalės pagaminti naujos žvakės ir turės eiti pirkti naujų. Taip nutiks po $100 + 14 + 2 = 116$ dienų.

!! Vienos žvakės likučiai yra lyg žvakės septyntadalis. Todėl galima laikyti, kad Žabtas negamina naujų žvakių, bet kasdien sudegina po $\frac{6}{7}$ žvakės. Kadangi iš likusių septyntadalių iš karto formuojama nauja sveika žvakė, tai Žabtas visada turi tiek sveikų žvakių, kokia yra bendro žvakių kiekio sveikoji dalis. O bendras žvakių kiekis kasdien sumažėja lygiai $\frac{6}{7}$ žvakės, kol tas kiekis netampa mažesnis už 1. Todėl jei ponas Žabtas nusiperka n žvakių, jis jas degins tiek dienų, kiek kartų iš n galima taip atimti $\frac{6}{7}$. Kadangi $100 = \frac{6}{7} \cdot 116 + \frac{4}{7}$, tai turime 116 dienų.

(Bendru atveju n žvakių Žabtas degintų $[(7n-1)/6]$ dienų; čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį.)

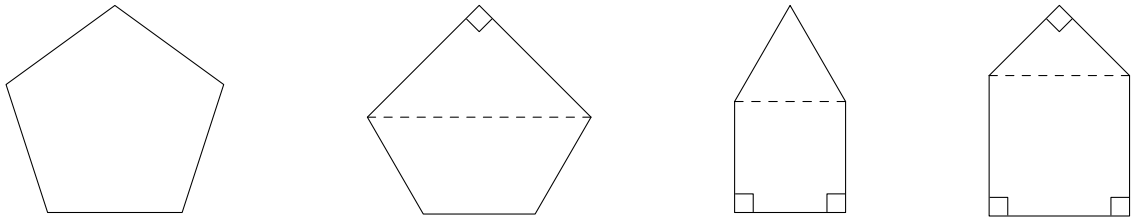
10. Ⓒ 0, 1, 2, 3

! Kadangi visuose atsakymuose yra skaičiai 1 ir 2, tai norint pasirinkti teisingą atsakymą pakanka išsiaiškinti, ar galima gauti 0, 3 ir 4 stačiuosius kampus. Norėdami įsitikinti, jog tam tikri penkiakampiai egzistuoja, tiesiog konstruokime juos. Penkiakampį galima gauti suglaudžiant keturkampį ir trikampį. Įrodant, kad penkiakampiai su tam tikrais kampais neegzistuoja, pravers penkiakampio kampų suma $(n-2)\cdot 180^\circ = (5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$. Atkreipkime dėmesį, kad penkiakampiai turi būti iškilieji, t. y. jų visi 5 (vidiniai) kampai turi būti mažesni nei 180°.

Nagrinėkime taisyklingąjį penkiakampį. Jo visi kampai lygūs, todėl kiekvienas iš jų lygus $540^\circ : 5 = 108^\circ$. Taigi iškilasis penkiakampis gali turėti 0 stačiųjų kampų.

Virš kvadrato kraštinės kaip įžambinės nubrėžkime statųjį lygiašonį trikampį (žr. dešinįjį paveikslėlį). Gauname iškiląjį penkiakampį, kurio kampai lygūs $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ, 90^\circ, 135^\circ$. Taigi gavome 3 stačiuosius kampus.

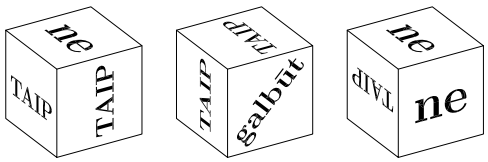
O 4 stačiųjų kampų penkiakampis negali turėti, nes priešingu atveju penktasis kampas būtų lygus $540^\circ - 4 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ (tada dvi gretimos kraštinės atsiduria vienoje tiesėje, ir penkiakampis išsigimsta į keturkampį).



0 1 2 3

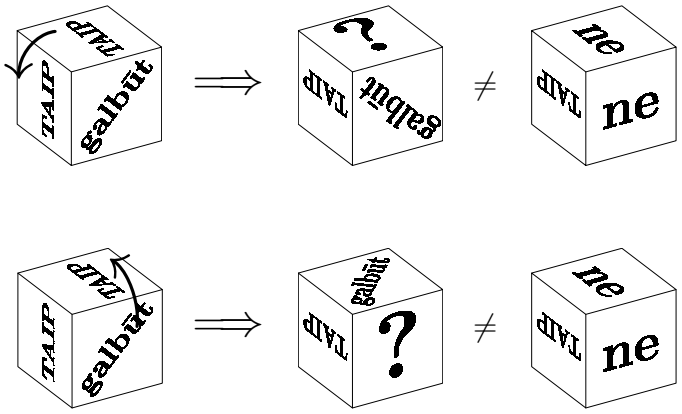
Kad sprendimas būtų pilnas, pateikiame pavyzdžius, kai penkiakampis turi 1 arba 2 stačiuosius kampus (žr. pav.). Suglaudę lygiašonę trapeciją su kampais 60° ir 120° bei statųjį lygiašonį trikampį, gausime penkiakampį su kampais $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ, 90^\circ, 105^\circ$. Suglaudę kvadratą bei lygiakraštį trikampį, gausime penkiakampį su kampais $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ, 60^\circ, 150^\circ$. O 5 stačiųjų kampų penkiakampis turėti negali, nes tada jo kampų suma būtų lygi $5 \cdot 90^\circ = 450^\circ \neq 540^\circ$.

11. Ⓑ $\frac{1}{2}$



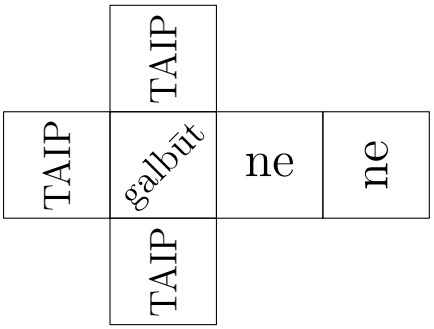
! Reikia suskaičiuoti, ant kelių kauliuko sienelių užrašytas žodis „TAIP“. Vidurinis kauliuko vaizdas parodo, kad tų sienelių yra bent dvi. Žodžių „TAIP“ matyti ir daugiau, tačiau sienelės gali sutapti. Matome vieną sienelę „galbūt“ ir (dešinėje) dvi sieneles „ne“. Taigi yra bent trys sienelės, kuriose žodžio „TAIP“ nėra. Vadinasi, sienelių „TAIP“ yra dvi arba trys.

Nekreipkime dėmesio į pirmąjį (iš kairės) kauliuko vaizdą, bet nagrinėkime, kaip tarpusavyje dera antrasis ir trečiasis. Tarkime, kad viena iš antrojo vaizdo sienelių „TAIP“ sutampa su atitinkama trečiojo vaizdo sienele. Paversdami kauliuką jo antrojoje padėtyje, kad atitinkami žodžiai „TAIP“ sutaptų, bandykime gauti trečiąją kauliuko padėtį. Abiem atvejais (žr. pav.; čia reikia šiek tiek vaizduotės!) sienelė „galbūt“ turi sutapti su viena iš sienelių „ne“. Gavome prieštarą. Vadinasi, nė vienas iš dviejų „TAIP“ antrojoje padėtyje nesutampa su trečiosios padėties „TAIP“, ir turime iš viso tris sieneles su šiuo žodžiu.

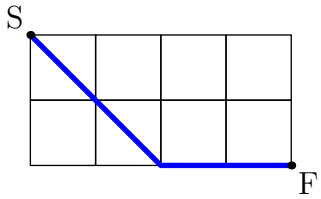


Metus kauliuką yra 6 vienodai galimos baigtys (gali atvirsti bet kuri iš 6 sienelių). Įvykiui, kad atvirto žodis „TAIP“, palankios trys baigtys (atvirsti gali viena iš trijų sienelių). Todėl (pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą) įvykio tikimybė lygi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Įsitikinkime, kad pavaizduotas kauliukas išties egzistuoja. Štai kubo sienelių išklotinė:



12. (C) $2+2\sqrt{2}$



? Langelio kraštinės ilgis yra 1, o jo įstrižainės ilgis yra $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Ieškomas kelio ilgis privalo turėti pavidalą $a+b\sqrt{2}$ (a – kiek kraštinių priklauso keliui, o b – kiek įstrižainių). Nesunku nuspėti, kad atsakymams **A** ir **B** tokio pavidalo suteikti neįmanoma, todėl juos atmetame. Egzistuoja kelias, kurio ilgis yra kaip atsakyme **C** (žr. pav.). O štai atsakymai **D** ir **E** negali žymėti trumpiausio kelio – jie didesni nei **C**: $4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2} > 2\cdot 1+2\sqrt{2}$ ir $6 = 2+2\cdot 2 > 2+2\sqrt{2}$.

! Įrodykime, kad kelias negali būti trumpesnis nei $2+2\sqrt{2}$.

Jau žinome, kad bet kurio kelio ilgis yra $s = a+b\sqrt{2}$, kur a ir b yra sveikieji neneigiami skaičiai (nagrinėjame visus galimus kelius – net pačius kvailiausius, su pasikartojančiomis atkarpomis). Atkreipkime dėmesį, kad S nuo F skiria 4 stulpeliai ir 2 eilutės. Eidami nuo langelio vienos viršūnės prie kitos bet kuria kelio atkarpa (kraštine arba įstrižaine), mes kertame daugiausiai vieną stulpelį ir daugiausiai vieną eilutę. Taigi 4 stulpelius kertantį kelią sudaro mažiausiai 4 atkarpos, t. y. $a+b \geqslant 4$. Dar daugiau, eidami įstrižaine kertame abu – stulpelį ir eilutę, o kraštine – arba stulpelį, arba eilutę. Imant ir stulpelius, ir eilutes, jų kertame $a+2b$. Kiekvieną stulpelį ir eilutę reikia kirsti bent po vieną kartą, o jų yra iš viso $4+2=6$, todėl $a+2b \geqslant 6$.

Išnagrinėkime visus galimus atvejus.

1) Jei $b \geqslant 4$, tai $s \geqslant 4\sqrt{2} > 2+2\sqrt{2}$.

2) Jei $b=3$, tai $a \geqslant 4-b=1$. Tada $s \geqslant 1+3\sqrt{2} > 2+2\sqrt{2}$.

3) Jei $b=2$, tai $a \geqslant 4-b=2$. Tada $s \geqslant 2+2\sqrt{2}$.

4) Jei $b=1$, tai $a \geqslant 6-2b=4$. Tada $s \geqslant 4+\sqrt{2} > 2+2\sqrt{2}$.

5) Jei $b=0$, tai $a \geqslant 6-2b=6$. Tada $s \geqslant 6 > 2+2\sqrt{2}$.

Visais atvejais kelias ne trumpesnis nei $2+2\sqrt{2}$.

Beje, trumpiausių kelių yra 6. Įsitikinkite!

13. (C) Penkiaausė

! Tarkime, kad Micė, Acė ir Kumbacėlė atitinkamai turi m, a ir k ausų. Micė matė Acės ir Kumbacėlės ausis, todėl $a+k=8$. Panašiai gauname dar dvi lygtis: $m+k=7$ ir $m+a=5$. Jas galima spręsti eliminuojant nežinomuosius, tačiau darykime kiek kitaip. Lygčių kairiosios pusės yra tam tikra prasme simetriškos nežinomųjų atžvilgiu (yra visos trys nežinomųjų poros su tais pačiais koeficientais 1), tad galima nujausti, kad verta visas lygtis sudėti: $2m+2a+2k = 8+7+5 = 20$. Taip randame bendrą ausų sumą $m+a+k = 20:2 = 10$. Dabar kiekvieno sparnausio ausų skaičių gauname vienu veiksmu: $m = (m+a+k)-(a+k) = 10-8 = 2$, panašiai $a = 10-7 = 3$ ir $k = 10-5 = 5$. Taigi Kumbacėlė yra penkiaausė.

Pastebėkime, kad tiek ausų turintys sparnausiai krateryje išties galėjo ištarti nurodytus teiginius. Beje, informacija, kad sparnausis turi bent dvi ausis, šiame uždavinyje nereikalinga.

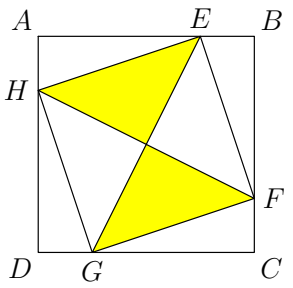
14. (A) 1,92

! Kiek pakito vandens lygis stiklinėje, iš karto nustatyti negalima. Tačiau lengva nustatyti tūrio pokytį: prie vandens tūrio prisidėjo visas pilnai apsemto kubelio tūris. Tad nuo pradinio aukščio h pirma pereikime prie pradinio tūrio, tada gaukime naują tūrį ir pagaliau – naują vandens stulpelio aukštį.

Vanduo stiklainyje įgyja stiklainio formą, todėl pradinis vandens tūris lygus stačiakampio gretasienio, kurio kraštinės lygios 10, 10 ir h cm, tūriui $V_0 = 10 \cdot 10 \cdot h = 100h$ (cm^3). Kubelio tūris lygus $2^3 = 8$ (cm^3). Pakitęs bendras tūris lygus $V_1 = 100h + 8$ (cm^3). Tačiau vanduo ir apsemtas kubelis kartu ir vėl sudaro stačiakampį gretasienį, kurio pagrindo kraštinės yra 10 ir 10 cm. Taigi šio stačiakampio gretasienio aukštis (vandens lygis stiklinėje) h_1 tenkina lygybę $V_1 = 100h_1$ (cm^3). Vadinasi, $h_1 = V_1/100 = (100h + 8)/100 = h + 0{,}08$ (cm).

Vanduo apsems kubelį tada ir tik tada, jei aukštis h_1 (cm), nusakantis naują vandens lygį stiklinėje, bus didesnis nei kubelio aukštis 2 (cm). Gauname nelygybę $h_1 \geqslant 2$, t. y. $h + 0{,}08 \geqslant 2$ arba $h \geqslant 2 - 0{,}08 = 1{,}92$. Taigi mažiausia skaičiaus h reikšmė yra 1,92.

15. (B) 25



? Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi $a = \sqrt{80}$. Taškas E dalija kraštinę AB santykiu $3:1$, todėl $AE = 3a/4$ ir $EB = a/4$. Kadangi $AE = BF = CG = DH = 3a/4$ ir $AB = BC = CD = DA = a$, tai $EB = FC = GD = HA = a/4$. Taigi turime keturis lygius stačiuosius trikampius EAH, FBE, GCF, HDG (lygūs pagal du statinius ir statųjį kampą tarp jų). Šie dėsningumai leidžia pastebėti, kad keturkampis $EFGH$ yra kvadratas (žr. pav.). Jo įstrižainės EG ir FH dalija jį į 4 lygias dalis, dvi iš jų nudažytos, taigi nudažytos dalies plotas lygus pusei $EFGH$ ploto.

Kvadratą $ABCD$ sudaro kvadratas $EFGH$ ir keturi lygūs statieji trikampiai. Kiekvieno iš tų trikampių plotas lygus pusei statinių sandaugos: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{3a^2}{32}$. Prisiminkime, kad kvadrato $ABCD$ plotas lygus $S_2 = a^2 = 80$, taigi $S_1 = 3 \cdot 80/32 = 15/2$ ir kvadrato $EFGH$ plotas lygus $S = S_2 - 4S_1 = 80 - 4 \cdot \frac{15}{2} = 50$.

Šį plotą galima rasti ir kitaip. Pagal Pitagoro teoremą kvadrato $EFGH$ kraštinė lygi $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{(\frac{a}{4})^2 + (\frac{3a}{4})^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{8}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 80}{8}} = \sqrt{50}$. Kvadrato $EFGH$ plotas lygus $EF^2 = 50$.

Nudažytos dalies plotas lygus $50 : 2 = 25$.

! Kad sprendimas būtų matematiškai griežtas, įrodykime, kad $EFGH$ yra kvadratas. Iš mums jau žinomos keturių trikampių lygybės išplaukia, kad

$$EF = FG = GH = HE,$$

$$\angle HEF = 180^\circ - \angle AEH - \angle BEF = 180^\circ - \angle AEH - \angle AHE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

panašiai

$$\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90^\circ.$$

Vadinasi, keturkampio $EFGH$ kampai statieji (jis yra stačiakampis), o kraštinės lygios. Taigi iš tiesų turime kvadratą.

16. (D) 34

? Skaičius 2015 lygus tėvo ir sūnaus amžių sandaugai, todėl reikia išsiaiškinti, kokių dviejų natūraliųjų skaičių sandaugai jis gali būti lygus. Tam išskaidykime 2015 į pirminius daugiklius. Skaičius akivaizdžiai dalijasi iš 5:

$$2015 : 5 = (2000 + 15) : 5 = (20 \cdot 100 + 15) : 5 = 4 \cdot 100 + 3 = 403.$$

Remiantis dalumo požymiais, galima patikrinti, kad skaičius 403 nesidalija iš 2, 3, 5. Jis nesidalija nei iš 7 (pvz., todėl, kad $403 + 7 = 410 = 41 \cdot 2 \cdot 5$), nei iš 11 (pvz., todėl, kad $403 - 33 = 370 = 37 \cdot 2 \cdot 5$). Bet jis dalijasi iš 13:

$$403 = 390 + 13 = 39 \cdot 10 + 13 = 13 \cdot 3 \cdot 10 + 13 = 13 \cdot (30 + 1) = 13 \cdot 31.$$

Skaičius 31 yra pirminis, taigi gauname skaidinį $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Dabar nesunku atspėti atsakymą: jei sūnui yra 5 arba 13 metų, tai tėvui turėtų būti $13 \cdot 31 = 403$-eji arba $5 \cdot 31 = 155$-eri – gerokai per daug. O jei sūnui yra 31 metai, tai tėvui 65-eri.

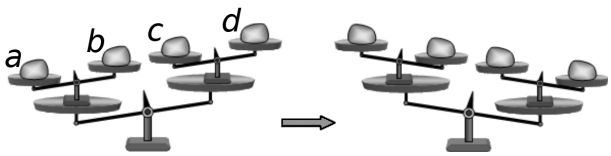
Tada amžių skirtumas lygus $65 - 31 = 34$.

! Įsitikinkime, kad amžių skirtumas kitoks būti negali.

Imkime didžiausią skaičiaus 2015 pirminį daliklį 31. Jis turi būti panaudotas sudarant tėvo arba sūnaus metų skaičių. Jei jo iš nieko nedauginsime, kitas skaičius bus $2015 : 31 = 65$. Šį atvejį jau išnagrinėjome. Bet jei 31 iš ko nors dauginsime, tai turėsime dauginti mažiausiai iš 5 ir gausime per didelį metų skaičių (bent 155).

17. (D) a ir d

? Raides a, b, c, d interpretuokime kaip atitinkamų svorių mases.



Pradinė svarstyklių padėtis rodo, kad svoris a nusveria b, svoris c nusveria d (viršutinis svarstyklių aukštas) bei kad du svoriai a ir b nusveria c ir d (apatinis aukštas). T. y. turime nelygybes $a > b$, $c > d$, $a + b > c + d$. Nauja svarstyklių padėtis reiškia tris naujus, mums kol kas nežinomus sąryšius tarp dydžių a, b, c, d.

Paprasčiausia atspėti tokias konkrečias a, b, c, d reikšmes, kurioms pavaizduota situacija galima. Turimas nelygybes tenkins bet kokie skaičiai, kuriems $a > b = c > d$, pvz., $(a, b, c, d) = (3, 2, 2, 1)$. Kuriuos svorius galima apkeisti, kad svarstyklės atsidurtų naujojoje padėtyje? Atkreipkime dėmesį, jog naujoji padėtis simetriška senajai, t. y. naujai padėtų svorių masės galėtų būti (iš kairės į dešinę) 1, 2, 2, 3. O kad gautume tokią padėtį, pradinėje padėtyje tereikia sukeisti vietomis skaičius 1 ir 3, t. y. svorius a ir d.

! Įrodykime, kad apkeitę bet kuriuos kitus svorius pavaizduotos situacijos niekaip negausime (kokios bebūtų skaičių a, b, c, d reikšmės). Apkeitus a ir b arba c ir d, kitaip pakryptų tik viena iš viršutinio aukšto svirčių (apkeitimas įvyksta tik tarp ant vienos svirties kabančių lėkščių). Lieka keturi variantai: sukeičiame a su c, a su d, b su c, b su d. Vienas iš jų (a su d) yra teisingasis, likusius dar turime atmesti.

Jei sukeisime a su c, tai gausime naują svorių seką (iš kairės į dešinę) (c, b, a, d). Kad svarstyklės būtų naujojoje padėtyje, reikia tokių nelygybių: $c < b, a < d, c + b < a + d$. Taip pat prisiminkime jau turėtas nelygybes $a > b$, $c > d$, $a+b > c+d$. Iš eilės panaudoję nelygybes $a > b$, $c < b$, $c > d$ ir $a < d$ gauname, kad $a > b > c > d > a$, t. y. $a > a$, bet taip būti negali.

Panašiai, kad sukeitus b su d svarstyklės pakryptų, kaip parodyta, vėl vienu metu turi galioti prieštaringos nelygybės $a > b > c > d > a$.

Kad sukeitus b su c svarstyklės pakryptų, kaip parodyta, turi būti teisingos nelygybės $a < c, b < d$ ir $a + c < b + d$. Jei sudėsime pirmąsias dvi nelygybes, gausime $a + b < c + d$, bet tai prieštarauja nelygybei $a + b > c + d$.

18. (B) 13

! Jei lygties pirminės šaknys yra p_1 ir p_2, tai pagal Vijeto teoremą teisingos lygybės $p_1 + p_2 = 85$ ir $p_1 p_2 = c$. Jokios kitos informacijos iš uždavinio sąlygos neišgausime, tad tiesiog iš pirmosios lygybės reikia gauti p_1 ir p_2, o tada iš antrosios – skaičių c. Nesunku nuspėti, kad tinka skaičiai 2 ir 83 (arba 83 ir 2): $2 + 83 = 85$. Tada $c = 2 \cdot 83 = 166$ ir ieškoma skaitmenų suma lygi $1 + 6 + 6 = 13$.

Norint pasirinkti šį atsakymą pakanka vieno iš dviejų: arba įsitikinti, kad skaičiai 2 ir 83 pirminiai ir todėl šias šaknis turinti lygtis $x^2 - 85x + c = 0$ tenkina uždavinio sąlygą (dėl skaičiaus 2 abejonių neturėtų kilti, bet skaičius 83 turbūt gali jų sukelti), arba įsitikinti, kad kitos p_1 ir p_2 reikšmės negalimos. O atlikę abu šiuos veiksmus, iki galo išspręsime uždavinį.

Kaip patikrinti, kad skaičius 83 pirminis? Pakanka įsitikinti, kad šis skaičius neturi pirminio daliklio, mažesnio už save. T. y. patikrinti, kad 83 nesidalija iš 2, 3, 5, 7, 11, ... Tačiau nebūtina tikrinti pirminius daliklius iki pat 83. Jei natūralusis skaičius n turi pirminių daliklių, mažesnių už save, tai mažiausias iš jų ne didesnis nei $\sqrt{n}$. Išties, jei n būtų sudėtinis skaičius ir visi jo pirminiai, o tuo labiau ir sudėtiniai dalikliai būtų didesni nei $\sqrt{n}$, tai su tam tikrais dviem iš tų daliklių x ir y galiotų lygybė $n = xy$ ir nelygybės $x > \sqrt{n}$ ir $y > \sqrt{n}$. Tada $n = xy > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, bet taip būti negali. Vadinasi, užtenka patikrinti skaičiaus 83 dalumą iš pirminių daliklių iki $\sqrt{83} < 10$, t. y. iš 2, 3, 5 ir 7, o tai nesunku.

Įrodykime, kad kitų reikšmių p_1 ir p_2 įgyti negali. Bandykime mažas $p_1 \neq 2$ reikšmes: jei $p_1 = 3$, tai $p_2 = 82$; jei $p_1 = 5$, tai $p_2 = 80$; jei $p_1 = 7$, tai $p_2 = 78$; ir t. t. Skaičiai 82, 80, 78 netinka, nes nėra pirminiai. Pastebėkime, kad jie visi lyginiai, todėl sudėtiniai. Iš tiesų, visos tolimesnės pirminės p_1 reikšmės, išskyrus 2, bus nelyginės (kitaip dalytųsi iš 2 ir nebūtų pirminės). O visos atitinkamos $p_2 = 85 - p_1$ reikšmės bus lyginės (nelyginių skaičių skirtumas visada lyginis) ir todėl pirminės, tik jei $p_2 = 2$ ir $p_1 = 83$. Taigi kitais atvejais abiejų pirminių reikšmių negausime.

19. (D) 20

! Nagrinėjame triženklius skaičius $\overline{abc}$ arba tiesiog visus tokius skaitmenų trejetus (a, b, c), kad $a \neq 0$, $b = a \pm 3$ ir $c = b \pm 3$. Klausiama, kiek yra tokių trejetų. Uždavinį išskaidykime į 4 atvejus, paskutinėse lygybėse pasirinkdami po vieną iš ženklų + arba −.

1) Tegu $b = a + 3$ ir $c = b + 3 = a + 6$. Matome, kad pasirinkus a, kiti du skaitmenys nustatomi vienareikšmiškai. Tik koks gali būti skaitmuo a? Jis gali būti 1, 2, 3. Bet jei $a > 3$, tai $c = a + 6 > 9$, o taip būti negali. Taip randame 3 trejetus ir 3 skaičius 147, 258, 369.

2) Tegu $b = a - 3$ ir $c = b - 3 = a - 6$. Ir vėl viskas priklauso nuo skaitmens a parinkimo (taip bus ir kitais dviem atvejais). Jis gali būti 9, 8, 7, 6. Bet jei $a < 6$, tai $c = a - 6 < 0$, o taip būti negali. Taip randame 4 trejetus ir 4 skaičius 963, 852, 741, 630.

3) Tegu $b = a+3$ ir $c = b-3 = a$. Jei $a > 6$, tai $b = a+3 > 9$, o taip būti negali. Likusios a reikšmės tinka. Taip randame 6 trejetus ir 6 skaičius 141, 252, 363, 474, 585, 696.

4) Tegu $b = a-3$ ir $c = b+3 = a$. Jei $a < 3$, tai $b = a-3 < 0$, o taip būti negali. Likusios a reikšmės tinka. Taip randame 7 trejetus ir 7 skaičius 303, 414, 525, 636, 747, 858, 969.

Iš viso radome 3+4+6+7=20 skaičių.

!! Perrinkime skaičius, pradėdami nuo antrojo skaitmens.

Jei tai skaitmuo 4, tai jo „kaimynais" gali būti skaitmenys 1 ir 7. Bet kurį jų galima rašyti tiek kairėje, tiek dešinėje – gauname $2 \cdot 2 = 4$ triženklius skaičius.

Skaitmenys 5 ir 6 taip pat turi po du galimus „kaimynus". Vėl gauname po 4 skaičius.

Jei tai 0, 1, 2, 7, 8 arba 9, tai turime po vieną galimą „kaimyną" (pvz., šalia 0 galima rašyti tik 3, šalia 8 – tik 5). Gauname po vieną triženklį skaičių.

Jei tai skaitmuo 3, tai jo „kaimynais" gali būti skaitmenys 0 ir 6. Tačiau kairėje nuo jo galime rašyti tik 6. Gauname $1 \cdot 2 = 2$ triženklius skaičius.

Iš viso turime $4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 = 20$ skaičių.

20. (E) $n = 37$

? Kontrapavyzdys turi paneigti duotąjį teiginį, įrodyti, kad tas teiginys klaidingas. Pakanka pastebėti, kad tinka atsakymas **E**. Skaičius $n = 37$ yra pirminis ir pagal teiginį lygiai vienas iš skaičių $n - 2 = 35$ ir $n + 2 = 39$ yra pirminis. Tačiau abu šie skaičiai yra sudėtiniai: $35 = 5 \cdot 7$ ir $39 = 3 \cdot 13$. Matome, kad teiginys, suformuluotas visiems pirminiams skaičiams n, vienam iš jų negalioja. Taigi jis klaidingas ir jį paneigia būtent skaičius $n = 37$.

! Patikrinkime, kad kiti atsakymai netinka.

A) Skaičius $n = 11$ pirminis, skaičius $n - 2 = 9$ sudėtinis, skaičius $n + 2 = 13$ pirminis.

B) Skaičius $n = 19$ pirminis, skaičius $n - 2 = 17$ pirminis, skaičius $n + 2 = 21$ sudėtinis.

D) Skaičius $n = 29$ pirminis, skaičius $n - 2 = 27$ sudėtinis, skaičius $n + 2 = 31$ pirminis.

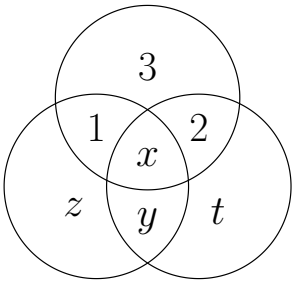
Šiais trim atvejais teiginys skaičiui n teisingas (jis pats pirminis ir lygiai vienas iš kitų dviejų skaičių yra pirminis).

C) Skaičius $n = 21$ sudėtinis, skaičius $n - 2 = 19$ pirminis, skaičius $n + 2 = 23$ pirminis.

Šis atsakymas klastingesnis. Ne lygiai vienas, bet du iš skaičių $n-2$ ir $n+2$ yra pirminiai. Tad gali atrodyti, kad ir šis atsakymas paneigia teiginį. Jam duotasis teiginys išties netinka. Bet, kitaip nei su atsakymu **E**, ir neturi tikti! Čia pats skaičius n yra sudėtinis, o duotasis teiginys apie sudėtines n reikšmes visiškai nieko neteigia. Juk jeigu mano sode auga kriaušių, tai nepaneigia teiginio „Mano kaimyno sode auga vien obelys."

21. (A) 0

! Viršutinėje srityje turi būti skaičius $1 + 2 = 3$. Likusius nežinomus skaičius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekvienam skaičiui užrašykime, kam jis turi būti lygus:



$$3 = 1 + 2, \qquad z = 1 + y, \qquad t = 2 + y, \qquad 1 = 3 + x + z,$$

$$2 = 3 + x + t, \qquad y = x + z + t, \qquad x = 1 + 2 + y.$$

Gauname tokių lygčių sistemą:

$$z = 1+y, \qquad t = 2+y, \qquad -2 = x+z, \qquad -1 = x+t, \qquad y = x+z+t, \qquad x = 3+y.$$

Į akis krinta, kad net trys iš 4 nežinomųjų jau išreikšti ketvirtuoju nežinomuoju y. Šias išraiškas tereikia įrašyti į bet kurią iš likusių lygčių, rasti y, o tada iš karto – likusius nežinomuosius. Pvz.:

$$-2 = x + z = (3 + y) + (1 + y) = 4 + 2y, \quad 2y = -6, \quad y = -3.$$

Taigi $x = 3 + y = 3 - 3 = 0$.

Pabaigai pastebėkime, kad reikšmės $x = 0$, $y = -3$, $z = 1 + y = -2$, $t = 2 + y = -1$ tenkina visas lygtis ir todėl tenkina uždavinio sąlygą.

22. (B) 24

! Petrė gali rinktis knygų sustatymo būdą pagal tokį algoritmą.

Ji gali pirmiausiai pasirinkti, kokia tvarka surikiuos žodynus. Jei žodynus sunumeruosime 1, 2, 3, tai juos vieną po kito galima pastatyti 6 būdais: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. Kitaip suskaičiuoti, kiek yra būdų, galima suvokus, kad čia turime visus trijų elementų (žodynų) aibės kėlinius, o jų yra $3! = 6$.

Tada ji gali pasirinkti romanų tvarką dviem būdais: $(1, 2)$ arba $(2, 1)$.

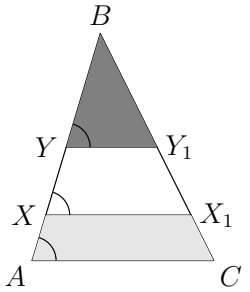
Pagaliau Petrė turės pasirinkti vieną iš dviejų galimybių: pastatyti surikiuotus romanus į kairę arba į dešinę nuo surikiuotų žodynų.

Kadangi kiekvieną iš trijų pasirinkimų (6 galimybės, 2 galimybės, vėl 2 galimybės) Petrė gali padaryti visiškai nepriklausomai nuo kitų, taikome daugybos taisyklę. Pastatyti knygas ant lentynos galima $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ būdais.

23. (C) 2

! Iš eilės vardykime dvejeto laipsnius: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Kitas dvejeto laipsnis 128 jau per didelis, triženklis, jį panaudoję negalime gauti dviženklio skaičiaus. Taigi turime 7 skaičius, iš kurių reikia taip pasirinkti šešis (tiesiog vieną skaičių praleisti), kad jų suma būtų dviženklis skaičius. Sužinoti, kokia yra viena ar kita suma, paprasčiau ne vieną prie kito dedant 6 iš 7 skaičių, bet iš karto sudėjus visus 7 skaičius, o tada iš sumos nereikalingą skaičių atėmus. Visų skaičių suma lygi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ (beje, čia galima panaudoti formulę $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, kai $n = 6$; žr. analogišką Senjoro 25 uždavinį). Jei iš 127 atimsime 1, 2, 4, 8 arba 16, gausime triženklį skaičių. Likę du skaičiai tinka: $1+2+4+8+16+64 = 127-32 = 95$ ir $1+2+4+8+16+32 = 127-64 = 63$. Taigi kaip 6 skirtingų dvejeto laipsnių suma gali būti užrašyti 2 dviženkliai skaičiai 63 ir 95.

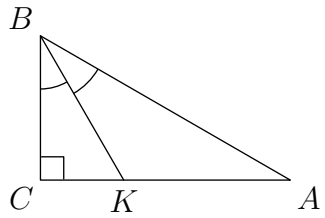
24. (D) 3 : 2



! Nagrinėkime tris trikampius ABC, XBX_1 ir YBY_1 (žr. pav.). Atkarpos AC, XX_1 ir YY_1 lygiagrečios, todėl kampai BAC, BXX_1 ir BYY_1 lygūs kaip atitinkamieji. Taigi nagrinėjami trikampiai turi po tokį patį kampą ir dar bendrą kampą B. Vadinasi, trikampiai yra panašūs.

Apskaičiuokime trikampių ABC ir XBX_1 panašumo koeficientą. Jei $BX : XA = 4 : 1$, tai atkarpą BX sudaro 4 iš $4 + 1 = 5$-ių atkarpą BA sudarančių dalių, t. y. panašumo koeficientas lygus $k_x = BX : BA = \frac{4}{5}$. Pasinaudokime sąlygoje paminėta plotų lygybe. Panašumo koeficientas leidžia nustatyti ir trikampių plotų santykį. Tegu trikampio ABC plotas lygus S. Trikampio XBX_1 bet kurios kraštinės bei bet kurios aukštinės ilgis sudaro $\frac{4}{5}$ atitinkamos trikampio ABC atkarpos ilgio. Todėl XBX_1 plotas (pusė dviejų tokių atkarpų sandaugos) jau bus lygus $(\frac{4}{5})^2 S = \frac{16}{25}S$. Panašiai, jei (mums kol kas nežinomas) trikampių YBY_1 ir ABC panašumo koeficientas yra $k_y = BY : BA$, tai nudažyto trikampio YBY_1 plotas lygus $k_y^2 S$. Nudažyto keturkampio $CAXX_1$ plotas lygus $S - \frac{16}{25}S = \frac{9}{25}S$. Taigi $k_y^2 S = \frac{9}{25}S$, $k_y^2 = \frac{9}{25}$ ir $k_y = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$. Vadinasi, $k_y = BY : BA = 3 : 5$ ir atkarpą BY sudaro 3 iš 5 dalių, sudarančių atkarpą BA. Tada atkarpą YA sudaro likusios $5 - 3 = 2$ dalys ir $BY : YA = 3 : 2$.

25. (C) $\sqrt{4}$



! Stačiojo trikampio viršūnes ir pusiaukampinės pagrindą pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Pusiaukampinė dalija statinį AC santykiu $2 : 1$. Geometrijoje gerai žinomas faktas, kad pusiaukampinė dalija priešais esančią kraštinę santykiu, kuris lygus kitų dviejų trikampio kraštinių santykiui. Šiuo atveju $CK : KA = BC : AB$ ir šis santykis lygus $2 : 1$ arba $1 : 2$. Sąlygoje įvardyti statinio atkarpų ilgiai, bet nepasakyta, kuri atkarpa yra kuri! Stačiajame trikampyje įžambinė yra ilgiausia kraštinė, todėl $BC < AB$ ir galimas tik variantas $BC : AB = 1 : 2$ (beje, tai nesunku nuspėti iš brėžinio). Tada $CK = 1$, $KA = 2$ (ir $CA = 1 + 2 = 3$).

Dabar galima rasti trikampio ABC kampus, o radus visus kampus, pastebėti paveikslėlyje paslėptą lygiašonį trikampį. Stačiojo trikampio statinis BC lygus pusei įžambinės AB. Taip gali būti tada ir tik tada, kai prieš tą statinį esantis kampas lygus $30°$. Taigi $\angle BAC = 30°$ ir $\angle ABC = 90° - 30° = 60°$. Pusiaukampinė dalija kampą ABC pusiau, tad $\angle ABK = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$. Tada $\angle ABK = \angle BAC = \angle BAK$, todėl trikampis ABK yra lygiašonis ir pusiaukampinės ilgis yra $KB = KA = 2 = \sqrt{4}$.

26. (A) 84

! Čia visų pirma galima palengvinti užduotį tokiu būdu. Atkreipkime dėmesį, kad $a, b, c > 0$ (skaičiai $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ turi būti dviženkliai). Bet svarbiausia, kad jei $a > b$, tai bet kuris dviženklis skaičius, kurio pirmasis skaitmuo yra a, bus didesnis už bet kurį dviženklį skaičių, kurio pirmasis skaitmuo yra b. Pvz., jei $a = 6$ ir $b = 5$, tai bet kuris skaičius 60, 61, ..., 69 yra didesnis nei skaičiai 50, 51, ..., 59. Tokiu atveju turėtume $\overline{ab} > \overline{bc}$. Vadinasi, $a \leqslant b$, o kadangi skaitmenys turi būti skirtingi, tai $a < b$. Panašiai $b < c$. Kita vertus, jei $a < b < c$, tai (dėl tų pačių priežasčių) $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$. Vadinasi, mums tereikia nustatyti, keliais būdais galima parinkti tris skirtingus skaitmenis a, b, c, kad galiotų nelygybės $0 < a < b < c$.

Užduotį suformuluokime dar kitaip. Reikia nustatyti, keliais būdais galima pasirinkti 3 skirtingus skaitmenis iš 9 skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir surikiuoti juos didėjimo tvarka. Pasirinktus skaitmenis surikiuoti didėjimo tvarka galima vieninteliu būdu, taigi lieka klausimas: keliais būdais galima pasirinkti 3 skirtingus skaitmenis iš 9? Skaičiuojame 3 elementų iš 9 derinius. Jų yra $C_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = 84$. (Kitaip: pirmą skaitmenį galime pasirinkti 9 būdais, antrą – 8, trečią – 7 būdais, kiekvieną nesutvarkytą skaitmenų trejetą taip pasirenkame 6 kartus, todėl iš viso gauname $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84$ trejetus.)

27. (B) 7

? Ieškomą skaičių pažymėkime k. Ką galime sužinoti apie skaičių n? Visų n skaičių suma lygi $S = 1+2+3+\ldots+n$. Išbraukus skaičių k, likusių $n-1$ skaičių suma lygi $S-k$, o vidurkis lygus sumai, padalytai iš dėmenų skaičiaus $(S-k)/(n-1) = 4{,}75 = 19/4$. Taigi $4(S-k) = 19(n-1)$. Matome, kad $19(n-1)$, o todėl ir $n-1$ dalijasi iš 4.

Tikrinkime mažiausias galimas n reikšmes: 1, 5, 9, 13.

Kai $n = 1$, išbraukus vieną skaičių, jų sekoje išvis nelieka ir apie jokį vidurkį negali būti kalbos.

Kai $n = 5$, tai $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ir $4(15 - k) = 19(5 - 1) = 4 \cdot 19$. Tada $15 - k = 19$ ir $k = -4$, bet tokio skaičiaus sekoje nėra. Matome, kad pasirinkę n reikšmę, gauname vienintelę skaičiaus k reikšmę (kad ir netinkamą).

Kai $n = 9$, tai $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ ir $4(45 - k) = 19(9 - 1) = 8 \cdot 19$. Tada $45 - k = 2 \cdot 19 = 38$ ir $k = 7$. Lengva patikrinti, kad sekoje $1, 2, \ldots, 9$ išbraukus skaičių 7, likusių skaičių vidurkis išties lygus $38/8 = 4{,}75$. Radę vieną galimą atsakymą, toliau n reikšmių galime netikrinti.

! Dalyje **?** įrodėme, kad gali tikti tik tos n reikšmės, kurioms $n-1$ dalijasi iš 4. Mums lieka įrodyti, kad n reikšmės, didesnės nei 9 (t. y. 13, 17, 21, ...), netinka.

Panašiai kaip **?** dalyje tikrinkime reikšmę $n = 13$. Tada $S = 91$, $4(91-k) = 19(13-1)$ ir $k = 34 > 13$ – gautoji reikšmė per didelė, jos sekoje nėra. Galima nuspėti, kad taip bus ir su likusiomis n reikšmėmis. Įrodykime tai.

Iš lygybės $4(S-k) = 19(n-1)$ išsireikškime $k = S - \frac{19(n-1)}{4}$. Reikia įrodyti, kad toks k didesnis net už didžiausią sekos skaičių: $k > n$ arba $S - \frac{19(n-1)}{4} > n$. Pertvarkykime nelygybę:

$$S > n + \frac{19(n-1)}{4}, \qquad 4S > 4n + 19n - 19 = 23n - 19.$$

Galime laikyti, kad $n \geqslant 13$, todėl sumoje S yra bent 13 dėmenų ir ji ne mažesnė už 13 didžiausių savo dėmenų sumą, o tuo labiau didesnė už 7 didžiausių dėmenų sumą:

$$S > n + (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-6) = 7n - 21.$$

Tada

$$4S > 4(7n-21) = 28n - 84 = (23n-19) + (5n-65) \geqslant$$
$$\geqslant 23n - 19 + 5 \cdot 13 - 65 = 23n - 19.$$

Tai ir reikėjo įrodyti: $4S > 23n - 19$, todėl $k > n$ ir situacija, kad išbraukiamas sekos narys k, negalima.

Pastebėsime, kad nelygybę $4S > 23n - 19$, kai $n \geqslant 13$, galima įrodyti kitaip. Pagal aritmetinės progresijos sumos formulę $S = n(n+1)/2$. Įrašę šią išraišką į nelygybę ir pertvarkę ją gauname kvadratinę nelygybę $2n^2 - 21n + 19 > 0$, kurią galima išspręsti randant kvadratinio trinario šaknis.

!! Kaip ir **?** dalyje, gaukime lygybę $4(S-k) = 19(n-1)$ ir pastebėkime, kad $n-1 > 0$ dalijasi iš 4. Pažymėkime $m = (n-1)/4$. Skaičius m yra natūralusis ir $n = 4m+1$. Pagal aritmetinės progresijos formulę

$$S = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 8m^2 + 6m + 1.$$

Tada

$$4(8m^2 + 6m + 1 - k) = 19 \cdot 4m, \qquad k = 8m^2 - 13m + 1.$$

Skaičius k yra vienas iš skaičių $1, 2, \ldots, 4m+1$, todėl teisingos nelygybės

$$1 \leqslant 8m^2 - 13m + 1, \qquad 4m + 1 \geqslant 8m^2 - 13m + 1.$$

Pertvarkykime jas ir padalykime iš $m > 0$:

$$m(8m-13) \geqslant 0, \qquad m(8m-17) \leqslant 0,$$

$$8m - 13 \geqslant 0, \qquad 8m - 17 \leqslant 0,$$

$$1 < \frac{13}{8} \leqslant m \leqslant \frac{17}{8} < 3.$$

Kadangi $1 < m < 3$, tai $m = 2$ ir $k = 8m^2 - 13m + 1 = 7$.

28. (D) 12

? Pirminis skaičius p visada turi tik 2 daliklius: 1 ir p. Pirminio skaičiaus laipsnis $n = p^a$ dalijasi tik iš skaičiaus p laipsnių, todėl turi $a + 1$ daliklių $1, p, p^2, \ldots, p^a$. Atkreipkime dėmesį, kad daliklių skaičius priklauso tik nuo a, bet ne nuo p. Kad gautume kuo didesnę a reikšmę (mums rūpi dviženkliai skaičiai n), imkime mažiausią galimą p reikšmę 2. Didžiausias dviženklis dvejeto laipsnis yra $64 = 2^6$. Jis turi $a + 1 = 7$ daliklius. Daugiau pirminių daliklių gausime, jei nagrinėsime skaičius, turinčius bent du skirtingus pirminius daliklius. Pvz., jei skaičiuje 2^6 vieną iš dvejetų pakeisime į trejetą, gausime skaičių $2^5 \cdot 3 = 96$, turintį net 12 daliklių.

Kaip juos greitai rasti ir suskaičiuoti? Nebūtina tikrinti visų natūraliųjų skaičių iki 96. Tikrindami skaičius iš eilės, raskime kelis mažiausius skaičiaus 96 daliklius: 1, 2, 3, 4, 6, 8. Kitas daliklis lygus 12. Jei skaičius d yra skaičiaus n daliklis, tai daliklis bus ir skaičius $d_1 = \frac{n}{d}$. Todėl daliklį 12 galėjome gauti ir padaliję 96 iš prieš tai aptikto daliklio 8. Bet kurį dar didesnį skaičiaus 96 daliklį $d > 12$ atitiks dar mažesnis daliklis $d_1 < 8$. T. y. visus likusius didesnius daliklius galime gauti dalydami 96 iš 6, 4, 3, 2 ir 1. Taip randame dar 5 daliklius 16, 24, 32, 48 ir 96. Iš viso gavome 12 daliklių.

Taigi atsakymas (didžiausias galimas daliklių skaičius) yra ne mažesnis už 12. Norint tuo įsitikinti, reikia atspėti skaičių 96 arba vieną iš dar 4 dviženklių skaičių, turinčių po 12 daliklių: 60, 72, 84 ir 90. Tada belieka pasirinkti tarp atsakymų **D** ir **E**. Atsakymą **E** galima atmesti tiesiog neradus skaičiaus, turinčio 16 daliklių. Tačiau matematiškai griežtai jį atmesti nėra labai lengva.

! Įrodysime, kad dviženklis skaičius negali turėti daugiau nei 12 (natūraliųjų) daliklių. Jau išsiaiškinome, kad jei dviženklis skaičius n turi tik vieną pirminį daliklį ($n = p^a$), tai daliklių jis turi daugiausiai 7. Jei skaičius n turi bent keturis skirtingus pirminius daliklius, tai skaičius $n \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 100$ ir nėra dviženklis. Taigi mums toliau rūpės tik dviženkliai skaičiai n, turintys du skirtingus pirminius daliklius p_1 ir p_2, t. y. $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ (čia a_1 ir a_2 yra natūralieji skaičiai), bei dviženkliai skaičiai n, turintys tris skirtingus pirminius daliklius p_1, p_2, p_3, t. y. $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$.

Kiek daliklių turi skaičius $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$? Jo daliklis negali turėti kitų pirminių daliklių nei pats skaičius n, t. y. bet kuris daliklis d turės tik pirminius daliklius p_1 ir p_2. Todėl d skaidinys pirminiais daugikliais bus $d = p_1^{b_1} p_2^{b_2}$ (čia b_1 ir b_2 yra neneigiami sveikieji skaičiai). Toks skaičius d dalija n tada ir tik tada, kai $b_1 \leqslant a_1$ ir $b_2 \leqslant a_2$. Taigi $b_1 = 0, 1, \ldots, a_1$ ir $b_2 = 0, 1, \ldots, a_2$. Iš viso turime $(a_1 + 1)(a_2 + 1)$ galimybių. Pvz., skaičius $n = 96 = 2^5 \cdot 3^1$ turi $(5 + 1)(1 + 1) = 12$ daliklių.

Panašiai skaičius $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$ turi $(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)$ daliklių, ir t. t. Daliklių skaičius priklauso tik nuo skaičių $a_1, a_2, \ldots$, ir jį galima rasti, neieškant pačių daliklių.

1) Tarkime, turime natūralųjį skaičių su dviem pirminiais dalikliais $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}$ ir $(a_1+$ $+1)(a_2+1) > 12$. Įrodysime, kad jis nėra dviženklis. Nagrinėkime tokius atvejus.

   1.1) Tegu $a_1 = 1$. Tada $2(a_2+1) > 12$, $a_2+1 > 6$, $a_2 > 5$, tad $a_2 \geqslant 6$. Turime $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2} \geqslant p_1p_2^6 = (p_1p_2)p_2^5 \geqslant p_1p_2 \cdot 2^5 \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 2^5 = 192 > 100$. Taigi skaičius n šiuo atveju mažiausiai triženklis.

   1.2) Tegu $a_1 = 2$. Tada $3(a_2+1) > 12$, $a_2 > 3$, tad $a_2 \geqslant 4$. Vėlgi turime $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2} \geqslant$ $\geqslant p_1^2p_2^4 = (p_1p_2)^2p_1^2 \geqslant (p_1p_2)^2 \cdot 2^2 \geqslant (2 \cdot 3)^2 \cdot 4 = 144 > 100$.

   1.3) Tegu $a_2 = 1$ arba 2. Šie atvejai analogiški jau išnagrinėtiems.

   1.4) Lieka atvejis, kai $a_1, a_2 \geqslant 3$. Tada $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2} \geqslant p_1^3p_2^3 = (p_1p_2)^3 \geqslant (2 \cdot 3)^3 = 216 >$ > 100.

2) Tarkime, turime natūralųjį skaičių su trimis pirminiais dalikliais $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}$ ir $(a_1+$ $+1)(a_2+1)(a_3+1) > 12$. Įrodysime, kad jis nėra dviženklis. Nagrinėkime tokius atvejus.

   2.1) Tegu $a_1 = 1, a_2 \geqslant 3$. Nepamirškime, kad $a_3 \geqslant 1$. Turime $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3} \geqslant p_1p_2^3p_3 =$ $= (p_1p_2p_3)p_2^2 \geqslant (p_1p_2p_3) \cdot 2^2 \geqslant (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 120 > 100$.

   2.2) Tegu $a_1 = a_2 = 1$. Tada $4(a_3+1) > 12$, $a_3 > 2$, tad $a_3 \geqslant 3$. Taigi $a_1 = 1, a_3 \geqslant 3$ ir šis atvejis analogiškas išnagrinėtam atvejui $a_1 = 1, a_2 \geqslant 3$.

   2.3) Tegu $a_1 = 1, a_2 = 2$. Tada $6(a_3+1) > 12$, $a_3 > 1$, tad $a_3 \geqslant 2$. Turime $n =$ $= p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3} \geqslant p_1p_2^2p_3^2 = (p_1p_2p_3)(p_2p_3) \geqslant (p_1p_2p_3) \cdot (2 \cdot 3) \geqslant (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 6 = 180 > 100$.

   2.4) Išnagrinėjome visas galimybes, kai $a_1 = 1$. Todėl bet kuris atvejis, kai $a_2 = 1$ arba $a_3 = 1$, analogiškas vienam iš jau išnagrinėtų.

   2.5) Lieka atvejis, kai $a_1, a_2, a_3 \geqslant 2$. Turime $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3} \geqslant p_1^2p_2^2p_3^2 = (p_1p_2p_3)^2 \geqslant$ $\geqslant (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 900 > 100$.

Taigi dviženklis skaičius n negali turėti daugiau nei 12 daliklių.

29. Ⓑ 2

! Dažnai sprendžiant uždavinį apsimoka pirmiau sugalvoti jį atitinkantį pavyzdį, o jau tada ieškoti bendro sprendimo. Sprendžiant šį uždavinį verta daryti atvirkščiai.

Abstrakčiai nagrinėkime sąlygoje įvardytą situaciją. Tarkime, kad turime 10 skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Mums rūpi, kelios iš 10 lygybių

$$x_1 = x_2x_3 \ldots x_{10}, \qquad x_2 = x_1x_3 \ldots x_{10}, \ \ldots, \qquad x_{10} = x_1x_2 \ldots x_9$$

gali būti teisingos.

Akivaizdu, kad viena iš jų gali būti teisinga (pvz., jei turime 9 skaičius 1, 2, 3, …, 9 ir dešimtą skaičių $9! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9$). Elkimės atsargiai ir toliau iš eilės klauskime, ar gali būti teisingos dvi lygybės. Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad tai pirmosios dvi lygybės (jei ne, pakeiskime skaičių numeraciją). Bandykime išsiaiškinti, kaip šios lygtys susieja nežinomuosius. Lygtys yra panašios – jų dešinėje pusėje daug sutampančių dauginamųjų. Todėl kai padalysime vieną lygtį iš kitos, daug jų susiprastins ir gausime paprastesnę, daugiau mums pasakančią lygybę.

Kad jau dalysime, pasitikrinkime, ar nedalijame iš 0. Jei kuris iš nežinomųjų lygus 0, pvz., $x_1 = 0$, tai likę 9 nežinomieji nelygūs 0. Tada nė viena iš 10 lygybių negalioja (pirmosios kairė pusė lygi 0, bet ne dešinė, o likusiose lygybėse dešinė pusė lygi 0, bet ne kairė). Taigi toliau galime laikyti, kad visi 10 skaičių nelygūs 0.

Padaliję pirmąją lygtį iš antrosios, tada kryžmai sudauginę trupmenų skaitiklius ir vardiklius bei ištraukę šaknį iš abiejų lygybės pusių, gauname lygybes

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2 \cdot (x_3 \dots x_{10})}{x_1 \cdot (x_3 \dots x_{10})} = \frac{x_2}{x_1}, \qquad x_1^2 = x_2^2, \qquad x_1 = \pm x_2.$$

Taigi $x_1 = x_2$ arba $x_1 = -x_2$. Kadangi skaičiai turi būti skirtingi, tai būtinai galioja lygybė $x_1 = -x_2$.

Taip iš karto sužinome, kad trys iš 10 lygybių teisingos būti negali. Juk jei teisinga būtų dar viena lygybė, pvz., trečioji, tai pakartoję tuos pačius veiksmus su pirmąja ir trečiąja lygybėmis, gausime $x_1 = -x_3$. Tada $-x_2 = -x_3$ ir $x_2 = x_3$, o taip negali būti, nes visi 10 skaičių turi būti skirtingi.

Beliko įsitikinti, kad dvi lygybės gali būti teisingos, sukonstruojant atitinkamą pavyzdį. Bet kaip pasirinkime $x_1 \neq 0$, pvz., $x_1 = 1$. Tada $x_2 = -x_1 = -1$. Taip pat bet kaip (tik vengdami jau panaudotų reikšmių ir nulio) galime pasirinkti 7 iš likusius 8 skaičių, pvz., 2, 3, …, 8. Paskutinis skaičius x_{10} su jau parinktais skaičiais turi tenkinti dvi lygybes:

$$1 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot 8 \cdot x_{10} = -8! \cdot x_{10}, \qquad -1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot x_{10} = 8! \cdot x_{10}.$$

Lygybės ekvivalenčios (vieną gauname, kitą padauginę iš -1) ir turi sprendinį $x_{10} = -\frac{1}{8!}$ (čia $8!$ žymi skaičiaus 8 faktorialą $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8$). Taigi du skaičiai bus pabraukti, jei 10 skaičių yra $-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, -\frac{1}{8!}$.

!! Uždavinį greičiau išspręs tas, kas kitaip užrašys 10 lygybių. Vėl pastebėkime, kad jei kuris iš 10 skaičių lygus 0, tai nė vienas skaičius nebus pabrauktas. Visų 10 skaičių sandaugą pažymėkime P. Lygybių dešiniosios pusės „beveik“ lygios P, kiekvienoje iš jų trūksta tik vieno dauginamojo. Kiekvieną iš lygybių padauginkime iš atitinkamo dauginamojo (pirmąją lygtį iš x_1, antrąją iš x_2 ir t. t.). Jei nė vienas skaičius nelygus 0, tai gausime 10 lygybių, ekvivalenčių pradinėms:

$$x_1^2 = x_1 x_2 \dots x_{10} = P, \qquad x_2^2 = P, \quad \dots, \qquad x_{10}^2 = P.$$

Jei $P < 0$, tai negalioja nė viena lygybė (jokio skaičiaus kvadratas nebus nelygus neigiamam skaičiui). O jei $P > 0$, tai turime lygybes

$$x_1 = \pm\sqrt{P}, \qquad x_2 = \pm\sqrt{P}, \quad \dots, \qquad x_{10} = \pm\sqrt{P}.$$

Kadangi visi skaičiai skirtingi, iš karto matome, kad tik dvi lygybės gali būti teisingos (viena su ženklu „+“, kita su ženklu „−“).

Dabar paprasta sugalvoti ir pavyzdį, kad galiotų dvi lygybės. Imkime $x_1 = 1, x_2 = -1$, o likusius skaičius tereikia parinkti taip, kad galiotų $P = 1$, nes tada $x_1 = \sqrt{P}, x_2 = -\sqrt{P}$. Pvz., tinka **!** dalies pavyzdys.

30. (B) 22

! Nagrinėjamų taškų skaičių pažymėkime n. Atstumai tarp taškų nevaidina jokio vaidmens, bet svarbi taškų tvarka. Todėl iš eilės (iš kairės į dešinę) sunumeruokime taškus skaičiais nuo 1 iki n. Tarkime, kad 80-iai atkarpų priklauso i-tasis taškas, o 90-iai atkarpų j-asis taškas.

Taškas yra atkarpos viduje tada ir tik tada, kai kairysis atkarpos galas yra to taško kairėje, o dešinysis – dešinėje. i-tojo taško kairėje yra $i-1$ pažymėtųjų taškų (ir bet kuris iš jų gali būti kairiuoju atkarpos galu), o dešinėje yra $n-i$ pažymėtųjų taškų (kiekvienas iš jų gali būti dešiniuoju atkarpos galu). Iš viso gauname $(i-1)(n-i)$ atkarpų. Analogiškai j-asis taškas yra $(j-1)(n-j)$ atkarpų viduje. Taigi turime rasti skaičių n, kartu su tam tikrais natūraliaisiais i ir j tenkinantį lygybes

$$(i-1)(n-i) = 80, \qquad (j-1)(n-j) = 90.$$

Čia itin svarbu tai, kad ieškome natūraliojo lygčių sprendinio, todėl galima naudotis skaičių dalumu. Kiekvieną lygtį nagrinėkime atskirai.

Matome, kad skaičiai $i-1$ ir $n-i$ yra skaičiaus 80 (natūralieji) dalikliai. Be to, jei žinome vieną iš jų, tai žinome ir kitą. Skaičius 80 turi ne tiek daug daliklių, tad visas galimybes tiesiog išvardykime: $i-1 =$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 (kaip greitai rasti skaičiaus daliklius plačiau paaiškinta 28 uždavinio sprendime). Atitinkamos $n-i$ reikšmės yra 80, 40, 20, 16, 10, 8, 5, 4, 2, 1. Kiekvienu iš 10 atvejų galime rasti i ir n. Skaičių n galime greitai rasti pagal taisyklę $n = (n-i)+(i-1)+1$. Taigi galimos skaičiaus n reikšmės yra $80+1+1 = 82$, $40+2+1 = 43$, $20+4+1 = 25$, $16+5+1 = 22$, $10+8+1 = 19$ (toliau reikšmės kartojasi: vietoj $10+8+1$ turime $8+10+1$). Ieškomasis n lygus vienam iš šių skaičių, tad atsakymus **A**, **C** ir **D** jau galime atmesti (bet ne **E**).

Tą patį padarykime su antrąja lygtimi. Turime $j-1 =$1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 ir atitinkamai $n-j =$90, 45, 30, 18, 15, 10, 9, 6, 5, 3, 2, 1. Atitinkamos n reikšmės yra $90+1+1 = 92$, $45+2+1 = 48$, $30+3+1 = 34$, $18+5+1 = 24$, $15+6+1 = 22$, $10+9+1 = 20$ (toliau reikšmės kartojasi).

Taigi skaičius n turi priklausyti skaičių aibei $\{82, 43, 25, 22, 19\}$ ir tuo pat metu kitai aibei $\{92, 48, 34, 24, 22, 20\}$. Vienintelis skaičius, priklausantis abiems aibėms, yra 22. Tai ir yra vienintelė galima n reikšmė.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	B
2	E
3	B
4	E
5	B
6	C
7	E
8	A
9	D
10	C
11	B
12	C
13	C
14	A
15	B
16	D
17	D
18	B
19	D
20	E
21	A
22	B
23	C
24	D
25	C
26	A
27	B
28	D
29	B
30	B