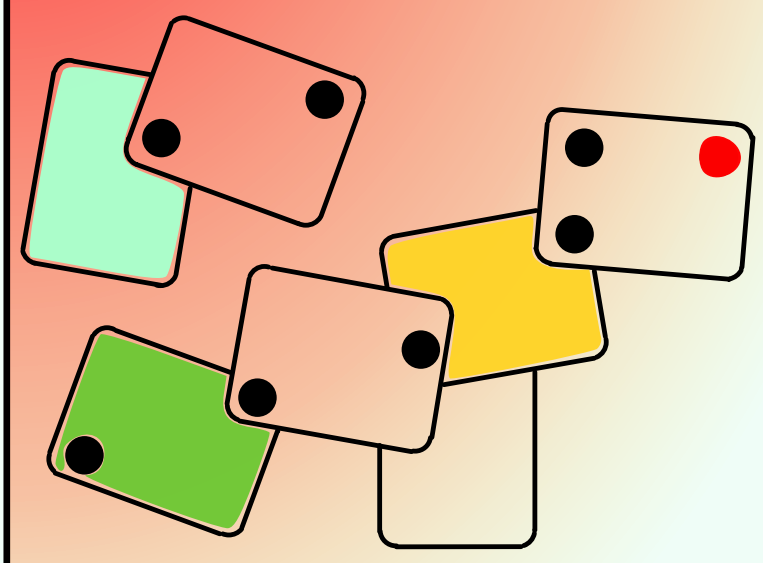
Kengūra

EKSPERTAS



Užduotys ir sprendimai

2016

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2016. EKSPERTAS

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

© *Kengūros* organizavimo komitetas, 2016

Turinys

Pratarmė **4**

Garbės lenta **6**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **10**

Atsakymai **21**

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų" vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų" vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

http://aksf.org/

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

http://kengura.lt/

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online" režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

http://www.ekspertas.kengura.lt/

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

Eksperto garbės lenta

(dalyviai išsprendę absoliučiai visus uždavinius)

Metai	**Dalyvių skaičius**	**Nugalėtojai**
2015	47	Dainius Dzindzalieta Eduardas Juška Ignas Urbonavičius
2016	98	Daumilas Ardickas

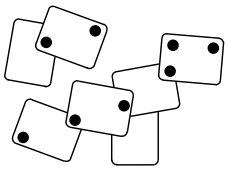
2016 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

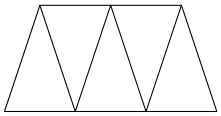
1. Kiek iš viso yra sveikųjų skaičių tarp skaičių 3,17 ir 20,16?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

2. Raminta prie mėgstamiausio jos skaičiaus turėjo pridėti 26. Tačiau vietoje to ji iš mėgstamiausio savo skaičiaus atėmė 26 ir gavo −14. Kam lygi Ramintos mėgstamiausio skaičiaus ir 26 suma?
A) 28 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 42

3. Lina ant šaldytuvo aštuoniais stipriais magnetukais • pritvirtino keletą atvirukų. Kiek daugiausiai magnetukų ji gali nuimti, kad nė vienas atvirukas nenukristų ant grindų?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6



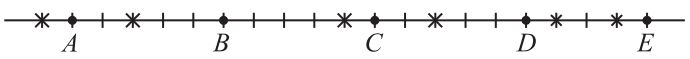
4. Trapecija padalyta į 5 lygius lygiašonius trikampius, kaip pavaizduota brėžinyje. Kiekvieno iš šių trikampių perimetras yra 40 cm, o trapecijos perimetras lygus 80 cm. Koks yra ilgesniojo trapecijos pagrindo ilgis?
A) 15 cm **B)** 20 cm **C)** 30 cm **D)** 40 cm **E)** 45 cm



5. Skaičius 1, 5, 8, 9, 10, 12 ir 15 reikia suskirstyti į grupes taip, kad kiekvienos grupės skaičių suma būtų ta pati. Kiek daugiausiai gali būti tokių grupių? (Kai grupę sudaro vienas skaičius, tai jis ir yra tos grupės skaičių suma.)
A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

6. Tomas, Romas ir Domas – trynukai (broliai, gimę tą pačią dieną). Jų brolis Simas vyresnis lygiai trejais metais. Kuris iš nurodytų skaičių gali būti visų keturių brolių amžių suma?
A) 25 **B)** 27 **C)** 29 **D)** 30 **E)** 60

7. Penkios voverės A, B, C, D ir E tupi vienoje tiesėje, kurioje yra 6 riešutai (pažymėti kryžiukais).



Voverės pradeda bėgti link artimiausio riešuto tą pačią akimirką ir bėga vienodu greičiu. Kai tik kuri nors voverė pačiumpa riešutą, ji pradeda bėgti prie kito artimiausio riešuto. Kuri voverė pačiups du riešutus?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

8. Klasėje yra 30 mokinių. Mokiniai sėdi poromis. Kiekvienas berniukas sėdi su mergaite, ir lygiai pusė mergaičių sėdi su berniukais. Kiek berniukų mokosi klasėje?
A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 10 **E)** 5

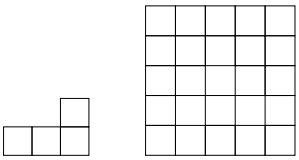
9. Aštuonios mergaitės žaidė keturis mačus teniso turnyro ketvirtfinalyje. Keturios nugalėtojos žaidė du mačus turnyro pusfinalyje, o dvi jo nugalėtojos žaidė finale. Paaiškėjo, kad šių mačų rezultatai yra tokie (išvardyti atsitiktine tvarka): Gerda nugalėjo Eleną, Patricija nugalėjo Sofiją, Raminta nugalėjo Austėją, Raminta nugalėjo Patriciją, Patricija nugalėjo Gerdą, Evelina nugalėjo Kotryną ir Raminta nugalėjo Eveliną. Kurios dvi mergaitės žaidė finale?
A) Raminta ir Austėja **B)** Raminta ir Patricija **C)** Patricija ir Gerda
D) Raminta ir Evelina **E)** Patricija ir Sofija

10. Vienu ėjimu leidžiama sukeisti dvi gretimas žodžio raides. Kiek mažiausiai ėjimų reikia, norint iš žodžio VELO gauti žodį LOVE ?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

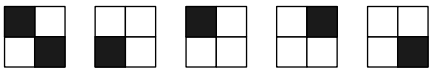
Klausimai po 4 taškus

11. Dvi kengūros Kanga ir Kenga tupi viena šalia kitos ir kartu pradeda šuoliuoti ta pačia kryptimi. Kiekvieną sekundę jos padaro vieną šuolį. Kiekvienas Kangos šuolis lygus 6 m. Pirmasis Kengos šuolis lygus 1 m, kiekvienas kitas jos šuolis pailgėja 1 m. Po kelių šuolių Kenga pavys Kangą?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

12. Kiek daugiausiai figūrų, pavaizduotų 1 pav., galima iškirpti iš kvadrato 5×5 (žr. 2 pav.)?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7


1 pav. 2 pav.

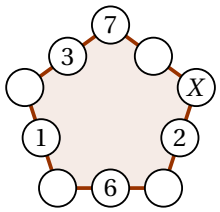
13. Kubas sudėtas iš 8 vienodo dydžio baltų ir juodų kubelių. Penkios kubo sienos pavaizduotos paveikslėlyje. Kaip atrodo šeštoji kubo siena?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

14. Raudonkepuraitė išsiruošė paeiliui aplankyti tris savo proseneles ir nunešti joms pyragėlių. Kiekvieną kartą prieš jai įeinant į prosenelės namus Pilkas Vilkas suryja lygiai pusę tuo metu jos krepšelyje esančių pyragėlių. Išėjusi iš trečiosios prosenelės Raudonkepuraitė pastebėjo, kad jos krepšelyje pyragėlių nebeliko. Kiekvienai prosenelei Raudonkepuraitė davė vienodą skaičių pyragėlių. Iš kurio skaičiaus būtinai dalijasi Raudonkepuraitės krepšelyje pačioje pradžioje buvusių pyragėlių skaičius?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

15. Sigutė įrašė po skaičių į 5 iš 10 skrituliukų kaip pavaizduota paveikslėlyje. Ji nori įrašyti skaičius į likusius 5 skrituliukus taip, kad kiekvienos penkiakampio kraštinės skaičių suma būtų ta pati. Kokį skaičių ji turi įrašyti į skrituliuką, pažymėtą raide X?
A) 7 **B)** 8 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

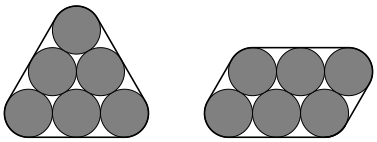


16. Natūralusis skaičius vadinamas įtartinu, jei jo skaitmenų suma yra didesnė už jo skaitmenų sandaugą. Kiek iš viso yra įtartinų dviženklių skaičių?
A) 13 **B)** 26 **C)** 39 **D)** 44 **E)** 79

17. Simboliai △, □ ir ○ atitinka 3 skirtingus skaitmenis. Sudėję triženklio skaičiaus ○□○ skaitmenis, gausime dviženklį skaičių □△. Sudėję dviženklio skaičiaus □△ skaitmenis, gausime vienženklį skaičių □. Kokį skaitmenį reiškia ○?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

18. Dviejų triženklių skaičių visi 6 skaitmenys yra skirtingi. Antrojo skaičiaus pirmasis skaitmuo yra dvigubai didesnis už pirmojo skaičiaus paskutinį skaitmenį. Kokia gali būti mažiausia šių dviejų skaičių suma?
A) 552 **B)** 546 **C)** 301 **D)** 535 **E)** 537

19. Meistras nori viela apjuosti šešis 2 cm skersmens vamzdelius. Jam reikia pasirinkti vieną iš dviejų būdų (žr. pav.). Kam lygus vielos kairiajame paveikslėlyje ilgio ir vielos dešiniajame paveikslėlyje ilgio skirtumas (centimetrais)?

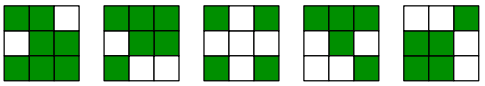


A) $-\pi$ **B)** -4 **C)** π **D)** 4 **E)** 0

20. Traukinys turi penkis vagonus. Kiekviename jo vagone yra bent vienas keleivis. Du keleiviai vadinami kaimynais, jei jie yra tame pačiame vagone arba gretimuose vagonuose. Yra žinoma, kad kiekvienas šio traukinio keleivis turi arba lygiai 5, arba lygiai 10 kaimynų. Kiek iš viso keleivių yra traukinyje?
A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 20 **E)** Yra daugiau negu vienas atsakymas

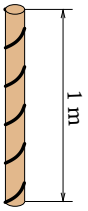
Klausimai po 5 taškus

21. Kubas 3×3×3 yra sudėtas iš 15 juodų ir 12 baltų kubelių. Penkios šio kubo sienos pavaizduotos paveikslėliuose. Kuriame iš paveikslėlių yra pavaizduota šeštoji šio kubo siena?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

22. Vijoklis augdamas lygiai penkis kartus apsivijo aplink statų apskritą stulpą (žr. pav.). Stulpo aukštis yra 1 m, o pagrindo perimetras lygus 15 cm. Vijoklis augdamas kilo aukštyn tolygiai. Koks yra vijoklio ilgis?



A) 0,75 m **B)** 1 m **C)** 1,25 m **D)** 1,5 m **E)** 1,75 m

23. Kengūrų respublikoje kiekvieną mėnesį sudaro 40 dienų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 40. Diena yra šventadienis, jei jos numeris dalijasi iš 6 arba yra pirminis skaičius. Kiek kartų per Kengūrų mėnesį tarp dviejų šventadienių dirbama lygiai vieną dieną?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24. Trys triženkliai natūralieji skaičiai sudaryti iš skaitmenų nuo 1 iki 9, panaudojant kiekvieną skaitmenį po vieną kartą. Kuris skaičius negali būti tų trijų skaičių suma?
A) 1500 **B)** 1503 **C)** 1512 **D)** 1521 **E)** 1575

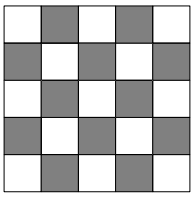
25. Kubo vidaus taškas sujungtas su kubo viršūnėmis. Taip gautos 6 piramidės. Penkių piramidžių tūriai yra 2, 5, 10, 11 ir 14. Koks yra likusios piramidės tūris?
A) 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

26. Papietauti už apskrito stalo susėdo keturi sportininkai, vyrai ir moterys: čiuožėjas, slidininkas, ledo ritulininkas ir snieglentininkas. Slidininkas sėdėjo Aušrai iš kairės. Čiuožėjas sėdėjo priešais Beną. Ema ir Fredas sėdėjo greta. Ledo ritulininkui iš kairės sėdėjo moteris. Kokiu sportu užsiima Ema?
A) Čiuožimas **B)** Slidinėjimas **C)** Ledo ritulys **D)** Snieglenčių sportas **E)** Neįmanoma nustatyti

27. Šios dienos data yra 2016-03-17. Datą MMMM-mm-dd vadinsime stulbinančia, jei visi 8 ją sudarantys skaitmenys skirtingi. Koks bus mėnuo, kai sulauksime artimiausios stulbinančios datos?
A) Kovas **B)** Birželis **C)** Liepa **D)** Rugpjūtis **E)** Gruodis

28. Kengūrų respublikoje gyvena 2016 kengūrų, sunumeruotų nuo K1 iki K2016. Vieną dieną kiekviena kengūra nuo K1 iki K2015 susidaužė kaktomis su tiek kengūrų, koks yra jos numeris. Su keliomis bendrapilietėmis tą dieną susidaužė K2016?
A) 1 **B)** 504 **C)** 672 **D)** 1008 **E)** 2015

29. Kvadratą 5×5 sudaro 25 balti langeliai. Vienu ėjimu leidžiama pakeisti bet kurių trijų gretimų langelių vienoje eilutėje arba viename stulpelyje spalvą: balti langeliai spalvinami juodai, o juodi – baltai. Kiek mažiausiai ėjimų reikia, norint gauti paveikslėlyje pavaizduotą kvadratą?



A) Mažiau nei 10 **B)** 10 **C)** 12 **D)** Daugiau nei 12 **E)** To neįmanoma padaryti

30. Natūralusis skaičius N turi lygiai šešis (teigiamus) daliklius, įskaitant 1 ir N. Penkių daliklių sandauga lygi 648. Koks yra šeštasis N daliklis?
A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 24

Eksperto užduočių sprendimai

1. Ⓒ 17

! Tarp skaičių 1 ir 20,16 yra lygiai 20 sveikųjų skaičių. Atmetę skaičius 1, 2 ir 3, gauname, kad tarp skaičių 3,17 ir 20,16 yra lygiai $20 - 3 = 17$ sveikųjų skaičių.

Teisingas atsakymas **C**.

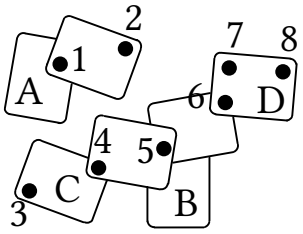
2. Ⓓ 38

! Kadangi Raminta atėmusi iš savo mėgstamiausio skaičiaus 26 gavo skaičių -14, tai jos mėgstamiausias skaičius yra $-14 + 26 = 12$. Taigi Ramintos mėgstamiausio skaičiaus ir 26 suma lygi $12 + 26 = 38$.

Teisingas atsakymas **D**.

3. Ⓒ 4

! Kai kuriuos atvirukus pažymėkime raidėmis A, B, C ir D, o visus magnetukus skaičiais nuo 1 iki 8, kaip parodyta paveikslėlyje. Lina tikrai negali nuimti nei pirmo, nei 5-to magnetukų, nes tada nukristų atvirukas A arba atvirukas B. Pirmas magnetukas laiko du atvirukus, o 5-tas – tris. Dar lieka du atvirukai C ir D, kurių niekaip neprispausi vienu magnetuku, vadinasi, ant šaldytuvo turi likti mažiausiai keturi magnetukai. Nuėmus 2-ą, 4-ą, 7-ą ir 8-ą magnetukus, nė vienas atvirukas nenukrenta. Taigi Lina daugiausiai gali nuimti keturis magnetukus.



4. Ⓒ 30 cm

! Pažymėkime lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgį x, o pagrindą y. Tuomet trikampio perimetras lygus $2x + y = 40$, o trapecijos perimetras lygus $2x + 5y = 80$. Iš šių lygybių matome, kad $4y = 40$, t. y. $y = 10$. Vadinasi, trapecijos pagrindas lygus 30 cm.

5. Ⓐ 3

! Čia neverta pradėti skirstyti skaičius bet kaip, be minties. Visų skaičių suma yra lygi $1 + 5 + 8 + 9 + 10 + 12 + 15 = 60$. Kadangi grupės skaičių suma ne mažesnė kaip 15 (juk vienoje iš grupių tikrai bus 15), tai grupių bus ne daugiau kaip 4. Bet keturių grupių būti negali: kiekvienos grupės skaičių suma turi būti lygi 15, bet skaičius 12 netinka nė į vieną grupę – papildyti jį trejetu neįmanoma. Vadinasi grupių gali būti tik dvi arba trys.

Pažiūrėkime, ar galima sudaryti tris tokias grupes. Tada kiekvienos iš jų skaičių suma bus 20. Skaičių 15 iki 20 papildyti galima tik penketu, skaičių 12 iki 20 galima papildyti tik aštuonetu, ir trečiai grupei lieka 1, 9 ir 10. Matome, kad sudaryti tris grupes galima (ir tik vieninteliu būdu). Tai ir yra didžiausias grupių skaičius.

Teisingas atsakymas **A**.

Pastaba. Pasidomėkime, keliais būdais galima sudaryti dvi grupes. Jeigu turime 2 grupes, tai kiekvienos iš jų skaičių suma yra 30. Galvokime apie grupę, kurioje yra 15. Toje grupėje negali būti 12, nes $15 + 12 = 27$, ir likusių 3 nėra iš kur paimti. Jeigu toje grupėje yra 10, tai $15 + 10 = 25$, ir šią sumą papildyti iki 30 galima tik penketu. Jeigu toje grupėje yra 9, tai $15 + 9 = 24$, ir papildyti šią sumą galima taip: $5 + 1 = 6$. Pagaliau, jei toje grupėje yra 8, tai $15 + 8 = 23$, ir papildyti šią sumą nėra kaip.

Vadinasi, dvi grupes galima sudaryti dviem būdais:

$15 + 10 + 5 = 12 + 9 + 8 + 1 = 30$,

$15 + 9 + 5 + 1 = 12 + 10 + 8 = 30$.

6. Ⓑ 27

? Kadangi Simas vyresnis 3 metais už savo brolius trynukus, tai atmetus 3 iš jo amžiaus, visi keturi turėtų metų po lygiai.

Tikrinkime atsakymą **A**. Atmetę 3 iš keturių brolių amžių sumos 25, gausime 22. Bet 22 iš keturių nesidalija, taigi amžių suma 25 neįmanoma.

Tikrinkime atsakymą **B**. Atmetę 3 iš visų keturių brolių amžių sumos 27, gausime 24. Vadinasi, trynukų amžius būtų $24 : 4 = 6$ metai, Simo amžius būtų 9 metai. Taigi tokia amžių suma įmanoma.

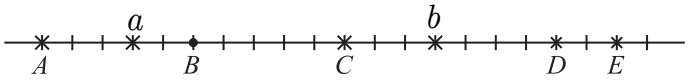
Renkamės atsakymą **B**.

! Įsitikinti, kad kiti atsakymai netinka, paprasta. **C** atsakymo atveju iš 29 atėmę 3 gauname 26 – iš 4 nesidalija. **D** atsakymo atveju iš 30 atėmę 3 gauname 27 – iš 4 nesidalija. **E** atsakymo atveju $60 - 3 = 57$, o 57 iš 4 nesidalija.

Teisingas atsakymas **B**.

7. Ⓒ C

! Paveikslėlyje parodytos voverių buvimo vietos tuo metu, kai voverė A pačiumpa jai artimiausią riešutą.



Matome, kad tuo pat metu po riešutą pačiups voverės C, D ir E. Lieka 2 nepačiupti riešutai, pažymėti a ir b. Riešutą a paims voverė B, bet tai bus tik pirmasis jos riešutas. O riešutą b pačiups voverė C, ir tai bus jos antrasis riešutas. Taigi pirmoji du riešutus pačiups voverė C.

8. (D) 10

! Tik pusė mergaičių sėdi su berniukais, todėl mergaičių yra dvigubai daugiau, nei berniukų. Pažymėkime berniukų skaičių x. Tada klasėje yra $2x$ mergaičių. Išsprendę lygtį $x + 2x = 30$ randame berniukų skaičių $x = 10$.

9. (B) Raminta ir Patricija

! Mergaitės, kurios žaidė finale, nugalėjo ketvirtfinalio ir pusfinalio mačuose, todėl jos turi bent po dvi pergales. Uždavinio sąlygoje duota, kad Raminta laimėjo tris mačus, o Patricija – du. Kitos mergaitės laimėjo po vieną mačą arba iš viso nelaimėjo nei vieno mačo. Vadinasi, finale žaidė Raminta ir Patricija.

Teisingas atsakymas **B**.

10. (B) 4

! Kaitaliojant raides svarbu suvokti, kad neapsimoka keisti vietomis raidžių, kurios jau surikiuotos teisinga tvarka (L ir O, V ir E). Tada pavyksta apsieiti 4 ėjimais: VELO, VLEO, LVEO, LVOE, LOVE.

Nors tai nesunku numanyti, įrodykime, kad mažiau ėjimų neužteks. Kad raidės L ir O žodyje VELO nukeliautų į savo vietas žodyje LOVE, reikia bent 2 kartus perkelti per vieną poziciją į kairę kiekvieną iš jų. Gauname bent $2 + 2 = 4$ ėjimus, kai šios raidės keliamos į kairę. Jokie du iš jų nesutampa: vienu ėjimu perkelti dviejų raidžių į kairę neįmanoma, nes ėjimo metu viena raidė perkeliama į kairę, o kita į dešinę.

11. (B) 11

! Pirmuoju šuoliu atstumas tarp kengūrų pailgėja 5 m, antruoju – 4 m, trečiuoju – 3 m, ketvirtuoju – 2 m, penktuoju – 1 m. Šeštuoju šuoliu atstumas tarp Kangos ir Kengos išlieka nepakitęs. Toliau kiekvienu šuoliu atstumas tarp kengūrų mažėja: septintu šuoliu atstumas sumažėja 1 m, aštuntu – 2 m, devintu – 3 m, dešimtu – 4 m, o vienuoliktu – 5 m. Taigi Kenga pavys Kangą po vienuolikos šuolių.

Teisingas atsakymas **B**.

!! Šį uždavinį galima spręsti ir kitu būdu. Tam reikės formulės

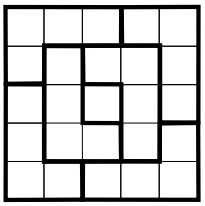
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

kuri teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n. Tarkime, kad po n šuolių Kenga pavys Kangą. Tada jos bus nušuoliavusios tą patį atstumą. Per n šuolių Kanga nušuoliuos $6n$ metrų atstumą, o Kenga nušuoliuos $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ metrų atstumą. Taigi $6n = \frac{n(n+1)}{2}$. Abi lygybės puses padaliję iš n ir padauginę iš 2, gauname lygybę $12 = n + 1$. Taigi $n = 11$, t. y. Kenga pavys Kangą po 11 šuolių.

12. Ⓓ 6

? Pirmame paveikslėlyje parodyta figūra sudaryta iš 4 kvadratėlių. Antrame paveikslėlyje pavaizduotas kvadratas sudarytas iš 25 kvadratėlių. Taigi iš kvadrato galima iškirpti ne daugiau kaip 6 figūras. Renkamės atsakymą **D**

! Paveikslėlyje parodytas vienas iš būdų kaip iš kvadrato iškirpti 6 figūras.



13. Ⓓ

! Kube kiekvieno kubelio matosi 3 sienos. Vadinasi, bendras baltų kubelių sienų skaičius dalijasi iš 3. Pavaizduotose penkiose kubo sienose yra 14 baltų kubelių sienų. Likusioje, šeštoje, sienoje turi būti arba 1 arba 4 baltos sienos. Bet jokie du juodi kubeliai nėra greta, nes bent vienoje iš penkių pavaizduotų sienų jie būtų greta. Taigi vienintelis atsakymas, tenkinantis šiuos reikalavimus, yra **D**.

Kubą su pavaizduotomis sienomis tikrai galima sudėti: apatinį sluoksnį sudėkime iš 4 baltų kubelių, o viršutinį – iš 2 juodų ir 2 baltų taip, kad vienspalviai kubeliai neturėtų bendros sienos.

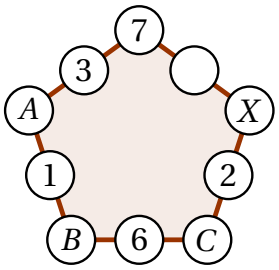
14. Ⓓ 7

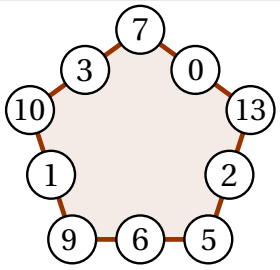
! Sakykime, kad Raudonkepuraitė kiekvienai prosenelei davė po x pyragėlių. Kadangi Raudonkepuraitė išėjusi iš trečiosios prosenelės namų pyragėlių nebeturėjo, tai vilkas prie trečiosios prosenelės namų surijo x pyragėlių. Todėl Raudonkepuraitė išeidama iš antrosios prosenelės namų krepšelyje turėjo lygiai $2x$ pyragėlių. Antrajai prosenelei Raudonkepuraitė taip pat davė x pyragėlių, todėl vilkas prie antrosios prosenelės namų surijo lygiai $2x + x = 3x$ pyragėlių. Vadinasi, Raudonkepuraitė iš pirmosios prosenelės namų išėjo krepšelyje nešdama $6x$ pyragėlių. Kadangi pirmoji prosenelė taip pat gavo x pyragėlių, tai vilkas prie jos durų surijo $6x + x = 7x$ pyragėlių. Taigi Raudonkepuraitė pačioje pradžioje turėjo lygiai $2 \cdot 7x = 14x$ pyragėlių. Skaičius $14x$ su bet kokiu natūraliuoju skaičiumi x dalijasi iš 7. Kita vertus, Raudonkepuraitės pačioje pradžioje turėtų pyragėlių skaičius nebūtinai dalijasi iš 4, 5, 6 ar 9. Iš tikrųjų, Raudonkepuraitė pačioje pradžioje galėjo turėti lygiai 14 pyragėlių (visos prosenelės gauna po 1 pyragėlį, o vilkas prie jų namų suryja atitinkamai po 7, 3 ir 1 pyragėlį).

Teisingas atsakymas **D**.

15. Ⓓ 13

? Pažymėkime tris tuščius skrituliukus raidėmis A, B ir C (žr. pav.). Tada $A + 3 + 7 = A + 1 + B$. Išsprendę lygtį gauname, kad $B = 9$. Sudarome lygtį kitoms dviems kraštinėms: $9 + 6 + C = C + 2 + X$. Iš čia gauname, kad $X = 13$.





! Nesunku įsitikinti, kad į likusius skrituliukus galima įrašyti tokius skaičius, kad kiekvienos penkiakampio kraštinės skaičių suma būtų ta pati (žr. pav).

16. Ⓑ 26

! Sakykime, kad dviženklis skaičius $\overline{ab} = 10a + b$ yra įtartinas; čia a ir b – atitinkamai dešimčių ir vienetų skaitmenys. Jei $b = 0$, tai skaičiaus $\overline{a0}$ skaitmenų suma lygi a, o skaitmenų sandauga lygi nuliui. Tokių dviženklių skaičių iš viso yra 9 ir visi jie įtartini. Panašiai gauname, kad visi pavidalo $\overline{a1}$ skaičiai, kurių taip pat yra lygiai 9, yra įtartini. Tarkime, kad $b \geqslant 2$. Kadangi skaičius $\overline{ab}$ yra įtartinas, tai $a + b > ab$. Iš čia gauname nelygybę

$$a < \frac{b}{b-1} = \frac{b-1+1}{b-1} = 1 + \frac{1}{b-1} \leqslant 1 + \frac{1}{2-1} = 2.$$

Taigi $a < 2$ ir todėl $a = 1$ ($a \neq 0$, nes $\overline{ab}$ – dviženklis skaičius). Pavidalo $\overline{1b}$, $b \geqslant 2$, dviženklių skaičių yra lygiai 8 ir visi jie yra įtartini. Vadinasi, iš viso yra lygiai $9 + 9 + 8 = 26$ įtartini dviženkliai skaičiai.

Teisingas atsakymas **B**.

!! Kaip dažnai atsitinka, patogu iš pradžių rasti neįtartinų skaičių kiekį. Kadangi dviženklis skaičius $\overline{ab}$ įtartinas, kai $ab < a + b$, tai jis neįtartinas, kai $ab \geqslant a + b$. Perkėlę a ir b į kairę ir prie abiejų nelygybės pusių pridėję po 1, gauname $(a - 1)(b - 1) \geqslant 1$. Netinka $a = 0$ (nes skaičius dviženklis) ir $a = 1$ (nes tada kairė pusė lygi 0). Kiekvienam $a \geqslant 2$ netinka tik $b = 0$ ir $b = 1$ (kairė pusė bus $\leqslant 0$). Taigi kiekvieną iš 8 skaitmens a reikšmių (tai reikšmės nuo 2 iki 9) atitinka 8 skaitmens b reikšmės, todėl neįtartinų skaičių yra $8 \cdot 8 = 64$. Kadangi dviženklių skaičių yra $99 - 9 = 90$, tai įtartinų skaičių turime $90 - 64 = 26$.

17. Ⓔ 9

! Kadangi $\square + \triangle = \square$, tai $\triangle = 0$. Triženklio skaičiaus skaitmenų suma ne didesnė už 27, todėl $\square\triangle = 10$ arba $\square\triangle = 20$. Skaičiaus $\bigcirc\square\bigcirc$ skaitmenų suma yra lyginis skaičius, todėl $\square = 2$. Išsprendę lygtį $\bigcirc + 2 + \bigcirc = 20$, gauname, kad $\bigcirc = 9$.

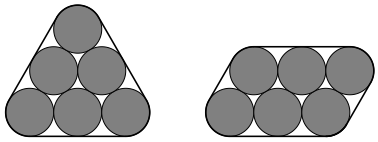
18. Ⓔ 537

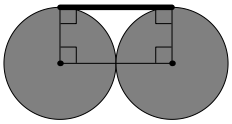
! Duotus triženklius skaičius užrašykime taip: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ ir $2 \cdot c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$. Jų suma lygi $(a+2c) \cdot 100 + (b+d) \cdot 10 + c + e$. Ši suma bus mažiausia, kai šimtų skaitmenų suma $a + 2c$ bus mažiausia. Jei $c = 1$, tai $2c = 2$, ir mažiausias galimas a yra lygus 3, o $a + 2c = 5$. Jei $c = 2$, tai $2c = 4$, tai mažiausias galimas a yra 1 ir vėl $a + 2c = 5$. Kai $c > 2$, tai $a + 2c > 6$, todėl šių atvejų galime nebenagrinėti.

Dabar žiūrėkime, kuriuo atveju dešimčių skaitmenų suma $b + d$ bus mažiausia. Kai $c = 1$, $2c = 2$ ir $a = 3$, mažiausi galimi dešimčių skaitmenys gali būti 4 ir 0, o $4 + 0 = 4$. Kai $c = 2$, $2c = 4$ ir $a = 1$, mažiausi galimi dešimčių skaitmenys gali būti 3 ir 0, o $3 + 0 = 3 < 4$. Tuomet mažiausias galimas e yra 5 ir visa suma $(a+2c) \cdot 100 + (b+d) \cdot 10 + c + e = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 + 5 = 537$.

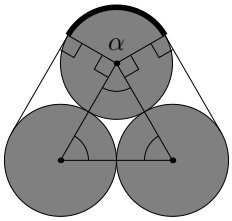
19. Ⓔ 0

! Abiem duotais atvejais vielą galima padalyti į apskritimo lankus (kur viela prigludusi prie vamzdelio) ir tiesės atkarpas. Viela yra tarsi siūlas, maksimaliai įtemptas, kad apjuostų vamzdelius, todėl vielos atkarpos, jungiančios dviejų skirtingų apskritimų taškus, ne tik tiesios, bet ir priklauso tų apskritimų bendrai liestinei.

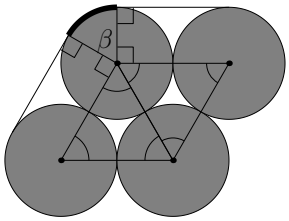




1 pav.



2 pav.



3 pav.

Kairiajame sąlygos paveikslėlyje turime šešias tokias atkarpas kaip paryškintoji 1 paveikslėlyje ir tris lankus kaip paryškintasis 2 paveikslėlyje. Dešiniajame sąlygos paveikslėlyje turime šešias tokias atkarpas kaip 1 paveikslėlyje, du lankus kaip 2 paveikslėlyje ir du lankus kaip 3 paveikslėlyje. Vienodų tiesės atkarpų yra po lygiai, todėl ieškomam skirtumui įtakos jos neturi.

Beliko išsiaiškinti su apskritimų lankais. Vienetinio apskritimo lanko ilgis lygus atitinkamam centriniam kampui (radianais).

2 paveikslėlyje trikampio kraštinės lygios, todėl jis lygiakraštis ir jo kampai lygūs $60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Tada pažymėtas centrinis kampas α lygus $2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$. Analogiškai $\beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ (žr. 3 pav.).

Ieškomas skirtumas lygus $3\alpha - (2\alpha + 2\beta) = \alpha - 2\beta = 0$ (cm). Beje, vien palyginus 2 ir 3 paveikslėlius, lengva pastebėti, kad $\alpha = 2\beta$. Tada ir lankų ilgio galima neskaičiuoti.

20. Ⓒ 17

! Sunumeruokime vagonus, pradėdami kraštiniu, paeiliui skaičiais nuo 1 iki 5. Kadangi kraštinio (1-o ar 5-o) vagono keleiviai turi bent vienu kaimynu mažiau negu jam gretimo vagono keleiviai (kurie turi dar bent vieną kaimyną viduriniajame vagone), tai kraštinių vagonų keleiviai turi po 5 kaimynus, o jiems gretimų vagonų keleiviai turi po 10 kaimynų. Kadangi kraštinių vagonų keleiviai turi po 5 kaimynus, tai bet kuriuose dviejuose nuo krašto vagonuose iš viso važiuoja 6 keleiviai. Taigi antrojo vagono keleiviai turi 5 kaimynus pirmajame ir antrajame vagonuose. Kadangi antrojo vagono keleiviai turi po 10 kaimynų, tai trečiajame vagone yra lygiai 5 keleiviai. Vadinasi, traukinyje iš viso važiuoja $6 + 6 + 5 = 17$ keleivių.

Teisingas atsakymas **C**.

Pastaba. Nesunku įsitikinti, kad penkių vagonų traukinyje galima taip susodinti keleivius, kad uždavinio sąlyga būtų tenkinama. Pavyzdžiui, pirmame, antrame, trečiame, ketvirtame ir penktame vagonuose važiuoja atitinkamai 3, 3, 5, 3 ir 3 keleiviai.

21. (A)

! Visų šešių kubo sienų juodų kampinių kvadratėlių skaičius yra tris kartus didesnis už kubo juodų kampinių kubelių skaičių. Todėl atsakymo variantuose **B**, **C** ir **D** pavaizduotos sienos netinka, nes tais atvejais visų šešių kubo sienų kampinių juodų kvadratėlių skaičius nesidalija iš 3. Taigi liko atsakymo variantai **A** ir **E**. Įrodysime, kad atsakymo variantas **E** netinka.

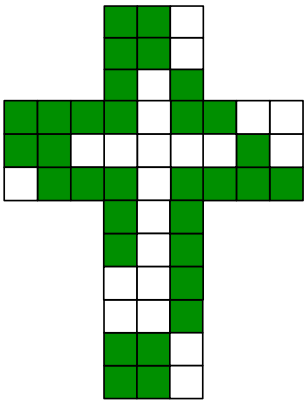
Tarkime, kad šeštoji kubo siena pavaizduota atsakymo variante **E**. Suskaičiuokime, kiek kubo paviršiuje yra juodų kubelių. Kadangi šešiose kubo sienose iš viso yra 18 juodų kampinių kvadratėlių, tai lygiai $\frac{18}{3} = 6$ kampiniai kubo kubeliai yra juodi.

Kubo sienos kvadratėlį pavadinkime *kraštiniu-vidiniu*, jei jis turi vienintelę bendrą kraštinę su šios sienos kraštinėmis. Visų šešių kubo sienų kraštinių-vidurinių juodų kvadratėlių skaičius, kuris lygus 10, yra du kartus didesnis už juodų kubelių, priklausančių lygiai dviems sienoms, skaičių. Taigi yra lygiai 5 juodi kubeliai, priklausantys lygiai dviems kubo sienoms.

Liko suskaičiuoti juodus kubelius, priklausančius vienintelei kubo sienai. Tokių kubelių skaičius lygus kubo visų šešių sienų juodų centrinių kvadratėlių skaičiui. Šis skaičius lygus 5.

Vadinasi, kubo paviršiuje yra lygiai $6 + 5 + 5 = 16$ juodų kubelių. Tačiau taip būti negali, nes pagal uždavinio sąlygą kubas sudėtas iš 15 juodų kubelių.

Liko atsakymo variantas **A**. Paveikslėlyje galima matyti kubo, kurio penkios sienos pavaizduotos uždavinio sąlygoje, o šeštoji – atsakymo variante **A**, paviršiaus išklotinė. Šio kubo paviršių sudaro 15 juodų ir 11 baltų kubelių. Kubo centrinis kubelis yra baltas.



Teisingas atsakymas **A**.

22. (C) 1,25 m

! Matematikos požiūriu vijoklis yra kreivė, esanti cilindriniame paviršiuje. Gali atrodyti, kad tai sunkus stereometrijos uždavinys. Tačiau sudėtingą erdvės figūrą galima paversti paprasta plokštumos figūra – tiesės atkarpa.

Įsivaizduokime, kad stulpo šoninis paviršius apvyniojamas stačiakampiu popieriaus lapu, kurio plotis (vertikaliai pastačius – aukštis) yra 1 m, o ilgis, kad apvynioti būtų galima lygiai 5 kartus, yra $15 \cdot 5 = 75$ (cm) arba $\frac{3}{4}$ m.

Stačiakampio įstrižainė, kildama nuo apatinės jo viršūnės prie viršutinės, taigi nuo stulpo apačios iki viršaus, apsivynios aplink stulpą su visu popieriaus lapu lygiai penkis kartus. Be to, taškui judant įstrižaine, jis kils aukštyn tolygiai (t. y. taško aukštis virš žemės yra tiesiškai proporcingas nueitam keliui; tai lengva pamatyti, įsivaizduojant taško judėjimą vėl ištiesintame lape). Šį tašką galima interpretuoti kaip augančio vijoklio viršūnę, o jo trajektoriją (susukto lapo įstrižainę) – kaip užaugusį vijoklį. Taigi vijoklio ilgis sutampa su lapo įstrižainės ilgiu. Pastarasis pagal Pitagoro teoremą lygus $\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ (m).

Pastaba. Griežtai įrodyti, kad negali būti kitokio uždavinio sąlygą tenkinančio vijoklio, nėra paprasta. Tam galima nagrinėti vijoklio vaizdą vėl atvyniotame lape – tai plokštumos kreivė. Kad ji iš tiesų yra atkarpa, galima įrodyti tiriant jos savybes matematinės analizės instrumentais (pvz., prireiks kreivės ilgio integralinės formulės).

23. (A) 1

! Tridienio, kai viena darbo diena yra tarp šventadienių, nebus mėnesių sandūroje (dirbama ir 40-ąją, ir 1-ąją dienomis). Taigi reikia rasti, kiek yra skaičių n nuo 1 iki 38, kad n-toji ir $(n+2)$-oji dienos būtų šventadieniai, o $(n+1)$-oji nebūtų. Skaičiaus n reikšmes galima iš eilės perrinkti, bet čia pravers greito abstraktaus mąstymo gebėjimai. Nagrinėkime du atvejus.

1) Tarkime, kad abu skaičiai n ir $n+2$ lyginiai. Jei kuris nors iš jų pirminis, tai $n = 2$ (vienintelis lyginis pirminis skaičius yra 2 ir $n + 2 > 2$). Ši reikšmė netinka. Tada abu skaičiai turi dalytis iš 6. Tačiau ir taip negali būti, nes jų skirtumas lygus 2.

2) Lieka atvejis, kai abu skaičiai n ir $n+2$ nelyginiai, todėl tikrai nesidalija iš 6. Tada jie turi būti pirminiai. Vienas iš trijų iš eilės einančių skaičių n, $n+1$ ir $n+2$ dalijasi iš 3. Jei tai lyginis skaičius $n+1$, tai jis dalijasi iš $2 \cdot 3 = 6$ ir nėra darbo diena. Jei tai n arba $n+2$, tai $n = 3$ arba $n + 2 = 3$ (vienintelis pirminis skaičius, dalus iš 3, yra 3). Taip gauname vienintelį tinkamą tridienį 3, 4, 5.

24. (A) 1500

! Sudarytuosius skaičius pažymėkime $\overline{a_1a_2a_3}, \overline{b_1b_2b_3}, \overline{c_1c_2c_3}$. Tada jų suma lygi

$$\overline{a_1a_2a_3} + \overline{b_1b_2b_3} + \overline{c_1c_2c_3} =$$

$$= 100a_1 + 10a_2 + a_3 + 100b_1 + 10b_2 + b_3 + 100c_1 + 10c_2 + c_3 =$$

$$= 99a_1 + 9a_2 + 99b_1 + 9b_2 + 99c_1 + 9c_2 + (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3) =$$

$$= 99a_1 + 9a_2 + 99b_1 + 9b_2 + 99c_1 + 9c_2 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) =$$

$$= 99a_1 + 9a_2 + 99b_1 + 9b_2 + 99c_1 + 9c_2 + 45.$$

Visi sumos dėmenys dalijasi iš 9, todėl ir suma dalijasi iš 9. Tada sumos skaitmenų suma taip pat dalijasi iš 9. Tačiau $1 + 5 + 0 + 0 = 6$ ir atsakymas **A** negali būti sudarytųjų skaičių suma.

Kad sprendimas būtų pilnas, parodykime, kad kiti duoti skaičiai gali būti lygūs tokiai sumai: $1503 = 123 + 584 + 796$, $1512 = 315 + 428 + 769$, $1521 = 314 + 528 + 679$, $1575 = = 123 + 465 + 987$.

!! Sudarytuosius skaičius pažymėkime $\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{b_1b_2b_3}$, $\overline{c_1c_2c_3}$. Uždavinį galima išspręsti ir trumpiau nei ! dalyje.

Natūralusis skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Šį teiginį galima ir apibendrinti: natūralusis skaičius ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 9 su ta pačia liekana. Be to, sumoje dėmenį pakeitus jo dalybos iš natūraliojo skaičiaus n liekana, visos sumos dalybos iš n liekana nepakinta. Todėl trijų skaičių suma dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 45.$$

Taigi ji dalijasi iš 9 su liekana 0 ir negali būti lygi skaičiui 1500.

25. (C) 6

! Piramidės tūris V proporcingas pagrindo plotui S ir į pagrindą nuleistos aukštinės ilgiui h, jis lygus $V = \frac{1}{3}hS$. Visų šešių piramidžių pagrindai yra kubo sienos, todėl jų plotai lygūs: $S = a^2$, kur a yra kubo kraštinės ilgis.

Nagrinėkime bet kurias dvi piramides, kurių pagrindai yra priešingos kubo sienos. Į pagrindus nuleiskime aukštines. Kadangi jos išvestos iš vieno taško ir statmenos lygiagrečioms sienoms, tai sudaro vieną atkarpą, o tos atkarpos ilgis (aukštinių ilgių suma) lygus atstumui tarp sienų: $h_1 + h_2 = a$. Tada dviejų tūrių suma lygi $\frac{1}{3}h_1a^2 + \frac{1}{3}h_2a^2 = \frac{1}{3}a^3$. Taigi visoms tokioms piramidžių poroms (jų yra trys) tūrių suma yra ta pati.

Vadinasi, tarp duotų penkių skaičių turi būti dvi poros su ta pačia suma. Tinka 5, 11 bei 2, 14, nes $5 + 11 = 2 + 14 = 16$. Perrenkant visas skaičių poras ir užrašant sumas, galima įsitikinti, kad kitos poros netinka. Tada likęs skaičius 10 ir ieškomas tūris taip pat sudaro porą su ta pačia suma $\frac{1}{3}a^3 = 16$. Ieškomas tūris lygus $16 - 10 = 6$.

26. (A) Čiuožimas

! Kadangi Ema ir Fredas sėdėjo greta, tai Aušra ir Benas taip pat sėdėjo greta. Tada tėra keturi variantai, kaip sportininkai sėdėjo pagal laikrodžio rodyklę: 1) A, B, E, F; 2) A, B, F, E; 3) B, A, E, F; 4) B, A, F, E. Aušrai iš kairės ir priešais Beną sėdėjo skirtingi žmonės (slidininkas ir čiuožėjas), todėl galime iš karto atmesti atvejus 3) ir 4). Abiem likusiais atvejais Aušrai iš kairės sėdintis Benas turi būti slidininkas. Čiuožėjui, sėdinčiam priešais Beną, iš kairės sėdi Aušra. Todėl Aušra negali būti moteris, sėdėjusi iš kairės ledo ritulininkui. Tada ši moteris yra Ema. Atvejis 1) netinka, nes čia Ema sėdi iš kairės slidininkui Benui, o ne ledo ritulininkui. Lieka atvejis 2). Čia Ema sėdi priešais Beną, taigi yra čiuožėja. (Fredas yra ledo ritulininkas, o Aušra – snieglentininkė.)

27. (B) Birželis

! Manantieji, kad ieškoma stulbinanti data greitai pasirodo po 2016 m. kovo 17 d., turės nusivilti, mat XXI, XXII ir XXIII amžių datos nėra stulbinančios. Norint greitai tai pastebėti, reikia atkreipti dėmesį į mėnesio skaičiaus pirmąjį skaitmenį: jis yra 0 arba 1. Kas atsitiktų, jei nė vieno iš šių skaitmenų nebūtų dienos skaičiuje? Tada dienos pirmasis skaitmuo a būtų 2 arba 3. Jei $a = 3$, tai dienos skaičius yra 30 arba 31 – skaitmenų 0 ir 1 vis tiek neišvengiame. O jei $a = 2$, tai metų skaičius neprasideda skaitmeniu 2, todėl yra didesnis už 3000. Taigi jei tikimės rasti stulbinančią datą iki 3000 metų, turime laikyti, kad po vieną iš skaitmenų 0 ir 1 yra tiek mėnesio, tiek dienos skaičiuje, o metai prasideda skaitmeniu 2. Tada metų skaičiuje nėra nei vieno iš kitur panaudotų skaitmenų 0 ir 1. Dėl šios priežasties tenka iš eilės atmesti metus, prasidedančius 20... ir 21... . Atvejis 22... netinka, nes negali kartotis ir skaitmuo 2.

Toliau tikrinkime metus 23...: vėl iš karto atmetame 230..., 231..., 232..., 233... . Tikrinkime metus 234...: 2340, 2341, 2342, 2343, 2344 taip pat netinka. Metai 2345 tinka: data 2345-06-17 yra stulbinanti. Toliau tereikia atmesti datas 2345-01 (netinka, nes 0 arba 1 turėtų būti dienos skaičiuje), 2345-02, 2345-03, 2345-04, 2345-05 (pasikartojantys skaitmenys). Taigi sustojame ties mėnesiu 06, o tai yra birželis.

28. (D) 1008

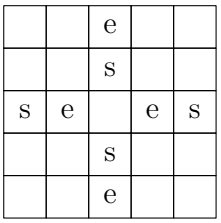
? Sukonstruosime pavyzdį, kaip kengūros galėjo susidaužti kaktomis, tenkinantį uždavinio sąlygą. Tarkime, kad kengūros K1, K2, ..., K1007 tarpusavyje nesusidaužė, o 1009 kengūros K1008, K1009, ..., K2016 poromis susidaužė visos (kiekviena su 1008 kitomis). Belieka nurodyti, kaip pirmos grupės kengūros susidaužė su antros grupės kengūromis: K1009 su K1007; K1010 su K1007 ir K1006; K1011 su K1007, K1006 ir K1005; ...; K2015 su visomis pirmos grupės kengūromis. Tada K1007 susidaužė su visomis 1007 antros grupės kengūromis, išskyrus K1008 ir K2016, ir šis skaičius kengūroms K1006, ..., K1 kaskart sumažėja 1. Kengūra K1008 susidaužė su 1008 kengūromis ir šis skaičius kengūroms K1009, ..., K2015 kaskart padidėja 1. Taigi uždavinio sąlyga jau tenkinama, o K2016 susidaužė su 1008 kengūromis.

! Tarkime, kad K2016 susidaužė su a kengūrų. Iš eilės surašykime turimus susidaužimų skaičius: 1, 2, ..., 2014, 2015, a. Priešpaskutinis skaičius reiškia, kad K2015 susidaužė su visomis likusiomis kengūromis. Taigi jei K2015 nebūtų su niekuo susidaužusi (o visa kita nepasikeistų), tai skaičių seka atrodytų taip: 0, 1, ..., 2013, 0, $a-1$. Išbraukdami nulius ir taip pamiršdami apie K1 ir K2015, gauname seką 1, 2, ..., 2012, 2013, $a-1$. Toliau galime analogiškai pašalinti K2 ir K2014 bei gauti seką 1, 2, ..., 2010, 2011, $a-2$. Taip pat pašalinkime K3 ir K2013, ..., K1007 ir K1009. Sekoje lieka tik skaičiai 1 ir $a-1007$, atitinkantys K1008 ir K2016. Skaičius 1 parodo, kad K1008 susidaužė su K2016, todėl $a - 1007 = 1$ ir $a = 1008$.

Pastaba. Šis sprendimas parodo, kad **?** dalyje sukonstruotas pavyzdys yra vienintelis: šalindami kengūras mes vienareikšmiškai nustatėme, su kuriomis kengūromis jos susidaužė. Taip pat pastebėkime, kad čia turime grafų teorijos uždavinį: kengūros yra grafo viršūnės, o jų susidaužimai – grafo briaunos. Pateiktame sprendime grafų teorijos žinovai gali įžiūrėti Havelo-Hakimio algoritmą.

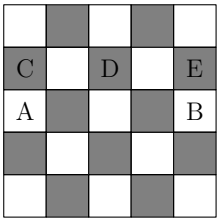
29. (A) Mažiau nei 10

? Spalvinkime (bet kokia tvarka – nuo jos niekas nepriklauso) tuos langelių trejetus, kur vidurinis langelis pažymėtas (žr. pav.): jei langelis pažymėtas raide e, tai imkime eilutės langelius, o jei raide s, tai stulpelio langelius. Taip per 8 ėjimus ir gausime norimą rezultatą: vieną kartą spalvinti langeliai taps juodi, o du ar keturis kartus spalvintieji liks balti (galutinė langelio spalva priklauso nuo spalvinimų skaičiaus lyginumo). Taigi pakanka mažiau nei 10 ėjimų.



! Gautas ėjimų skaičius 8 yra tikslus uždavinio atsakymas: mažiau nei 8 ėjimų nepakaks.

Tarkime, kad norimas kvadratas gautas per $x < 8$ ėjimų. Kiekvienam langeliui priskirkime skaičių, kiek kartų jis spalvintas. Juodai nuspalvinta 12 langelių ir jų skaičiai nelyginiai, o kiti skaičiai lyginiai, todėl bendra skaičių suma $3x$ lyginė ir $x \neq 7$.



Kiekvieno ėjimo metu buvo paveikiami daugiausiai du iš 12 juodų langelių. Todėl $x \geqslant \geqslant 12 : 2 = 6 \implies x = 6$. Nelygybė virsta lygybe $x = 12 : 2 = 6$, tik jei kiekvieno ėjimo metu paveikiami **lygiai** du iš 12 langelių. Taip gauname juodų langelių 6 poras. Bet kurios poros langelius skiriantis baltas langelis turėjo būti spalvintas bent du kartus, todėl jį atitinka dvi skirtingos poros. Langelius A ir B (žr. pav.) atitinka daugiausiai po vieną porą, todėl jie išvis nespalvinti. Tada langelis C tegali sudaryti porą su D, o langelis E lieka be poros. Gavome prieštarą. Taigi $x \geqslant 8$.

30. (C) 9

! Apie daliklius lengviau kalbėti, turint skaičiaus skaidinį pirminiais daugikliais. Todėl ir duotąjį skaičių išskaidykime: $648 = 2^3 \cdot 3^4$. Matome, kad N turi pirminius daliklius 2 ir 3, todėl dalijasi iš 1, 2, 3 ir $6 = 2 \cdot 3$. Pažymėkime $N = 6M$. Galime iš eilės tikrinti M reikšmes.

Kai $M = 1$, tai $N = 6$ neturi šešių daliklių.

Kai $M = 2$, tai $N = 12$ ir šeši dalikliai yra 1, 2, 3, 4, 6, 12. Jų visų sandauga lygi $2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2^2 \cdot 3) = 2^6 \cdot 3^3$. Penkių daliklių sandauga dalijasi iš 3^4, o visų šešių daliklių – tik iš 3^3. Taip būti negali.

Kai $M = 3$, tai $N = 18$ ir šeši dalikliai yra 1, 2, 3, 6, 9, 18. Jų visų sandauga lygi $2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^6$. Dabar aiškiai matyti, kad norint gauti $2^3 \cdot 3^4$, reikia pašalinti daliklį $3^2 = 9$. Taigi tinka $N = 18$ ir penki dalikliai 1, 2, 3, 6, 18, kurių sandauga lygi 648. Šeštasis daliklis yra 9.

Kad sprendimas būtų pilnas, atmeskime likusius atvejus: jei $M > 3$, tai N turi mažiausiai 7 skirtingus daliklius $1 < 2 < 3 < 6 < 2M < 3M < 6M$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	C
2	D
3	C
4	C
5	A
6	B
7	C
8	D
9	B
10	B
11	B
12	D
13	D
14	D
15	D
16	B
17	E
18	E
19	E
20	C
21	A
22	C
23	A
24	A
25	C
26	A
27	B
28	D
29	A
30	C