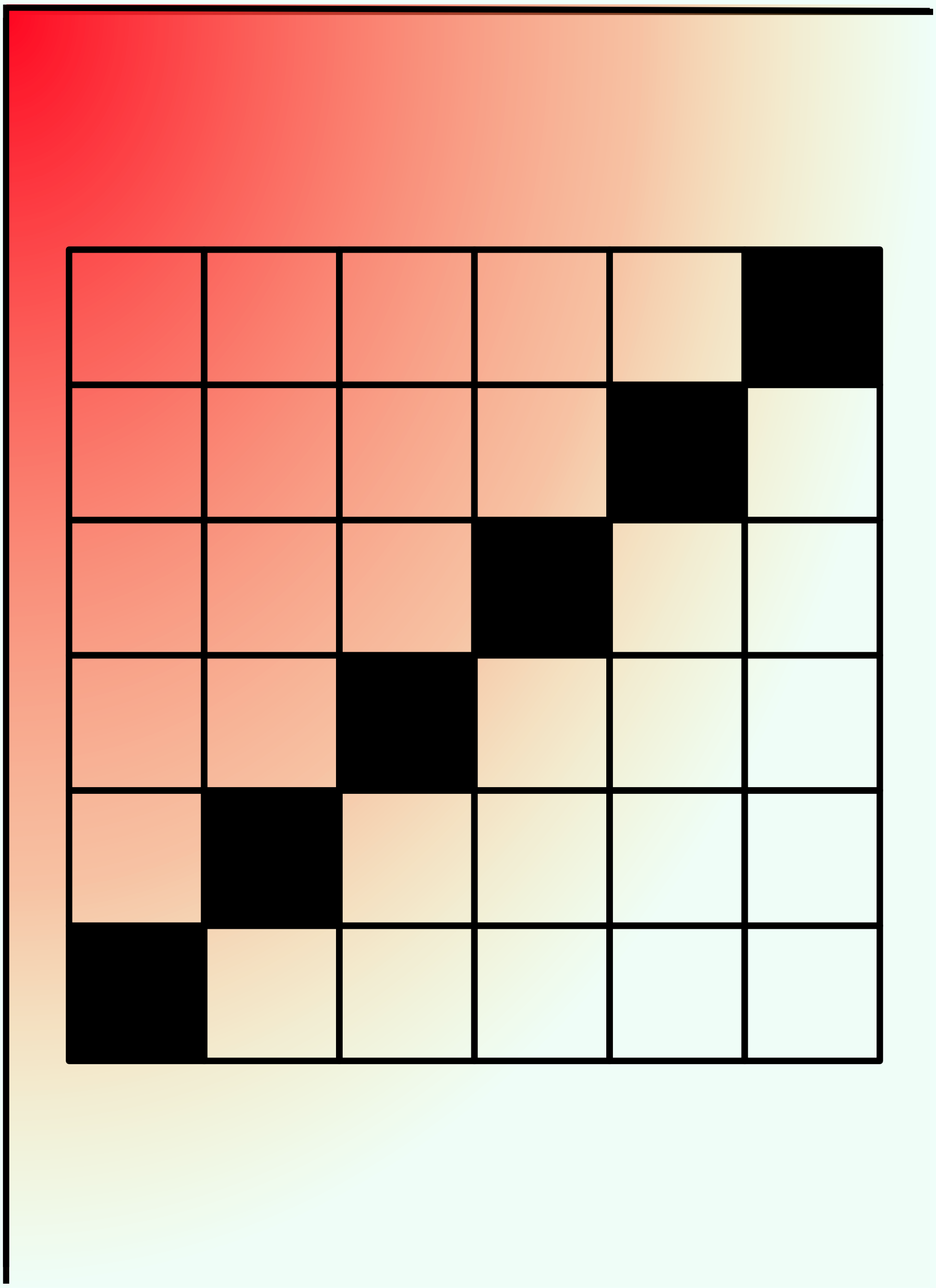
Kengūra

EKSPERTAS



Uždoutys ir sprendimai

2017

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2017. EKSPERTAS

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų" vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų" vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

http://aksf.org/

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

http://kengura.lt/

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online" režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

http://www.ekspertas.kengura.lt/

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

Eksperto garbės lenta

(dalyviai išsprendę absoliučiai visus uždavinius)

Metai	**Dalyvių skaičius**	**Nugalėtojai**
2017	78	baltrus
2016	98	Daumilas Ardickas
2015	47	Dainius Dzindzalieta Eduardas Juška Ignas Urbonavičius

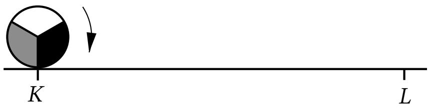
2017 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

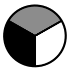
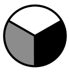
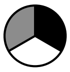
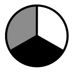
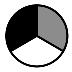
Klausimai po 3 taškus

1. Balionai parduodami pakeliuose po 5, 10 ir 25. Marius nori nusipirkti lygiai 70 balionų. Kiek mažiausiai pakelių jam teks nusipirkti?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

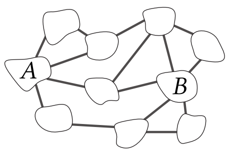
2. Alma sukūrė papuošimą iš baltų ir pilkų tokios pačios formos popierinių žvaigždučių (žr. pav.). Tų žvaigždučių plotai yra 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 ir 16 cm^2. Koks yra neuždengtos pilkos papuošimo dalies plotas?
A) 9 cm^2 **B)** 10 cm^2 **C)** 11 cm^2 **D)** 12 cm^2 **E)** 13 cm^2

3. Vienetinio spindulio skritulys rieda tiesia atkarpa nuo taško K iki taško L (žr. pav.). Koks bus skritulio vaizdas, jam pasiekus tašką L, jei $KL = 11\pi$?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

4. Žemėlapyje parodyta, kaip 15 tiltų jungia 10 salų. Saloje A įsikūrė plėšikai. Kiek mažiausiai tiltų turi susprogdinti salos B gyventojai, kad plėšikai į jų salą negalėtų patekti pėsčiomis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



5. Raminta į kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą langelį įrašo po vieną skaičių. Du skaičius ji jau įrašė (žr. pav.). Raminta nori, kad visų langeliuose įrašytų skaičių suma būtų lygi 35, pirmuose trijuose langeliuose įrašytų skaičių suma būtų lygi 22, o paskutiniuose trijuose langeliuose įrašytų skaičių suma būtų lygi 25. Kam lygi skaičių, kuriuos Raminta turi įrašyti užtušuotuose langeliuose, sandauga?

3				4

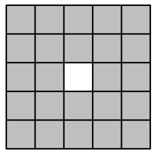
A) 63 **B)** 108 **C)** 0 **D)** 48 **E)** 39

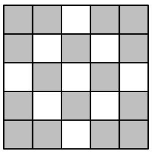
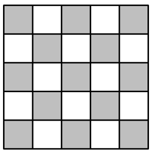
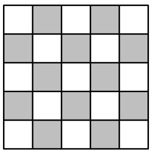
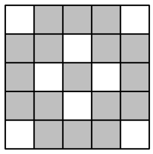
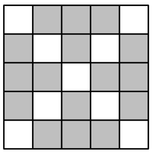
6. Šachmatininkas Martynas šį sezoną jau sulošė 15 partijų ir laimėjo 9 iš jų. Koks šį sezoną bus Martyno laimėjimų procentinis kiekis, jei jis laimės visas 5 partijas, kurias jam dar liko sulošti?
A) 60 % **B)** 65 % **C)** 70 % **D)** 75 % **E)** 80 %

7. Simonas sudarinėja savo bėgimo treniruočių tvarkaraštį. Jis nori treniruotis lygiai dvi dienas per savaitę, bet negali treniruotis dvi dienas iš eilės. Be to, jis nori kad treniruotės visada vyktų tomis pačiomis savaitės dienomis. Kiek iš viso skirtingų tvarkaraščių Simonas gali sudaryti?
A) 16 **B)** 14 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 8

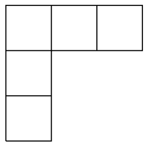
8. Trikampio kampų dydžiai laipsniais yra trys skirtingi natūralieji skaičiai. Kam lygi mažiausia įmanoma tokio trikampio mažiausio ir didžiausio kampų suma?
A) 61° **B)** 90° **C)** 91° **D)** 120° **E)** 121°

9. Elektroninėje lentelėje švietė centrinis langelis (žr. paveikslėlį šalia). Po minutės nušvito visi keturi langeliai, turintys su juo bendrą kraštą, o centrinis langelis užgeso. Po kiekvienos sekančios minutės nušvisdavo langeliai, turintys bent vieną bendrą kraštą su švietusiais praėjusią minutę, o švietusieji užgesdavo. Kaip atrodė lentelė po 4 minučių ir 30 sekundžių?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

10. Skaičius 1, 2, 3, 4 ir 5 reikia surašyti į penkis figūros langelius (po vieną į kiekvieną langelį). Tiek eilutėje iš kairės į dešinę, tiek stulpelyje iš viršaus į apačią skaičius reikia surašyti didėjimo tvarka. Kiek yra būdų taip padaryti?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8



Klausimai po 4 taškus

11. Janina įrašė po skaičių į 3×3 lentelės langelius. Visuose keturiuose 2×2 kvadratuose skaičių sumos yra vienodos. Kokį skaičių Janina įrašė vietoj klaustuko (žr. pav.)?
A) 5 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** Skaičiaus nustatyti neįmanoma

3		1
2		?

12. Lošimo kauliukas, kurio sienelėse pažymėti skaičiai -3, -2, -1, 0, 1, 2, ridenamas du kartus. Kokia yra tikimybė, kad iškritusių skaičių sandauga yra neigiamas skaičius?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

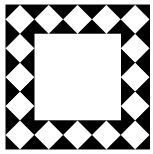
13. Karolis, Ričardas ir Jonas – buvę klasės draugai. Dabar vienas iš jų – lakūnas, kitas – inžinierius, o trečias – gydytojas. Yra žinoma, kad Karolis vyresnis už lakūną, Ričardas ir gydytojas nėra bendraamžiai, o gydytojas jaunesnis už Joną. Kuris sakinys teisingas?
A) Jonas yra lakūnas **B)** Ričardas yra inžinierius **C)** Karolis nėra gydytojas
D) Jonas yra inžinierius **E)** Ričardas nėra lakūnas

14. Mikė Melagėlis stengiasi pasitaisyti, bet vis tiek tarp jo iš eilės ištartų bet kurių trijų teiginių lygiai vienas būna melagingas. Kartą apie pasirinktą dviženklį natūralųjį skaičių jis pareiškė: „Jis turi skaitmenį 2. Ir jis didesnis už 50. Be to, jis lyginis. O dar jis mažesnis už 30. Jis dalijasi iš 3. Ir jis turi skaitmenį 7.“ Kokia yra Mikės skaičiaus skaitmenų suma?
A) 9 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 17

15. Kiek yra natūraliųjų skaičių, kurie nubraukus paskutinį skaitmenį sumažėja 14 kartų?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

16. 3 maršruto autobusas iš oro uosto į miesto centrą išvyksta kas 3 minutes ir miesto centrą pasiekia lygiai per 60 minučių. Taksi iš oro uosto išvažiavo kartu su 3 maršruto autobusu ir per 35 minutes, važiuodamamas šio autobuso maršrutu, pasiekė miesto centrą. Kiek 3 maršruto autobusų taksi aplenkė važiuodama iš oro uosto į miesto centrą (neskaitant autobuso su kuriuo taksi kartu išvažiavo iš oro uosto)?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 13

17. Kvadrato formos staltiesė išmarginta baltais kvadratais. Kokią šios staltiesės ploto dalį procentais sudaro juodoji jos dalis?
A) 16 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 32 **E)** 36

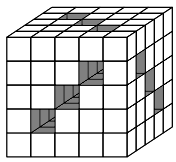


18. Džeimsas turi atspėti septynių skaitmenų kodą. Jis sužinojo, kad kiekvienas iš kodo skaitmenų lygus to skaitmens pasikartojimų kodo užrašyme skaičiui ir kad vienodi skaitmenys turi būti rikiuojami vienas po kito. Taigi, kodas galėtų būti 4444333 ar 1666666. Kiek daugiausiai kodų turės patikrinti Džeimsas?
A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

19. Ana mėgsta lyginius skaičius, Beatai patinka dalūs iš 3 skaičiai, o Cilei patinka dalūs iš 5 skaičiai. Mergaitės viena po kitos priėjo prie dėžutės, kurioje iš pradžių buvo skaičiais pažymėti 8 rutuliai, ir kiekviena paėmė visus jos mėgstamais skaičiais pažymėtus rutulius. Paaiškėjo, kad Ana paėmė rutulius su skaičiais 32 ir 52, Beata – su skaičiais 24, 33 ir 45, o Cilė – su skaičiais 20, 25 ir 35. Kuria tvarka mergaitės ėjo prie dėžutės?
A) Ana, Cilė, Beata **B)** Cilė, Beata, Ana **C)** Beata, Ana, Cilė **D)** Beata, Cilė, Ana **E)** Cilė, Ana, Beata

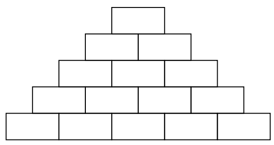
Klausimai po 5 taškus

20. Julija turi 125 kubelius. Paėmusi dalį šių kubelių ji sudėjo didesnį kubą su devyniais „tuneliais" kiaurai šio kubo (žr. pav.). Kiek kubelių liko Julijai?
A) 36 **B)** 39 **C)** 42 **D)** 45 **E)** 52



21. Stačiojo trikampio trijų kraštinių ilgių suma lygi 18, o tų pačių ilgių kvadratų suma lygi 128. Koks yra trikampio plotas?
A) 18 **B)** 16 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 9

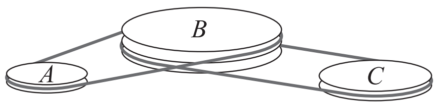
22. Paveikslėlyje pavaizduota piramidė, sudaryta iš penkiolikos stačiakampių plytelių. Gerda ant kiekvienos plytelės užrašė po vieną natūralųjį skaičių. Ant kiekvienos plytelės, išskyrus penkias pagrindo plyteles, užrašytas skaičius lygus po ja esančių dviejų plytelių skaičių sumai. Kiek daugiausiai nelyginių skaičių Gerda galėjo užrašyti ant šios piramidės plytelių?
A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 11



23. Arimantas skaičiavo iškilojo daugiakampio kampų sumą, tačiau vieną kampą praleido ir gavo klaidingą atsakymą 2017°. Kokio didumo kampą praleido Arimantas?
A) 37° **B)** 53° **C)** 97° **D)** 127° **E)** 143°

24. Kiekviename lentos 6×6 langelyje stovi po lempą. Dvi lempas vadinsime gretimomis, jei jos yra langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę. Iš pradžių kai kurios lempos šviečia, ir kiekvieną minutę užsidega tos lempos, kurios turi bent dvi gretimas šviečiančias lempas. Kiek mažiausiai lempų užtenka įjungti iš pradžių, kad po kurio laiko visos lempos šviestų?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

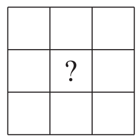
25. Diržinę pavarą sudaro skriemuliai A, B ir C, sujungti neslystančiais diržais. Kol B apsisuka lygiai 4 kartus, A apsisuka lygiai 5 kartus. O kol B apsisuka lygiai 6 kartus, C apsisuka lygiai 7 kartus. Raskite A perimetrą, jei C perimetras yra 30 cm.



A) 30 cm **B)** 28 cm **C)** 27 cm **D)** 24 cm **E)** 21 cm

26. Lentoje nurodyta tvarka užrašyti septyni natūralieji skaičiai a, b, c, d, e, f, g, kurių suma lygi 2017. Bet kurie du gretimi skaičiai skiriasi vienetu. Kuris iš užrašytųjų skaičių galėtų būti lygus 286?
A) Tik a arba g **B)** Tik b arba f **C)** Tik c arba e **D)** Tik d **E)** Bet kuris

27. Devyni sveikieji skaičiai, kurių suma lygi 500, įrašyti į 3×3 lentelės langelius. Bet kurių dviejų gretimų (bendrą kraštinę turinčių) langelių skaičiai skiriasi vienetu. Koks skaičius įrašytas viduriniame langelyje?
A) 50 **B)** 54 **C)** 55 **D)** 56 **E)** 57



28. Kiek yra triženklių skaičių $\overline{abc}$, kuriems $(a+b)^c$ yra triženklis dvejeto laipsnis?
A) 15 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

29. Ratelį šoko 30 mergaičių. Staiga jos sustojo ir visos atsisuko veidu į ratelio centrą. Tada vienu metu kai kurios mergaitės pasisuko į kairę, o likusios – į dešinę. Gretimos mergaitės, kurios atsigręžė viena į kitą, suplojo delnais. Delnais suplojusių mergaičių buvo 10. Tada visos mergaitės vienu metu nusigręžė į priešingą pusę, ir vėl gretimos mergaitės, atsigręžusios viena į kitą, suplojo delnais. Kiek mergaičių suplojo delnais šį kartą?
A) 10 **B)** 20 **C)** 8 **D)** 15 **E)** Nustatyti neįmanoma

30. Saloje gyvena tik visada tiesą sakantys matematikai ir visada meluojantys niektauzos – iš viso 2017 piliečių. Į vieną šventę susirinko daugiau nei tūkstantis piliečių ir sustojo ratu. Tada kiekvienas iš jų sušuko: „Aš stoviu tarp matematiko ir niektauzos!“ Kiek daugiausiai matematikų gyvena saloje?
A) 1683 **B)** 668 **C)** 670 **D)** 1344 **E)** 1343

Eksperto užduočių sprendimai

1. (**B**) 4

? Kaip visada parduotuvėje ar prie kasos verta pradėti nuo stambesnių dėmenų. Galima imti vieną pakelį su 25 balionais, bet dar geriau imti 2 pakelius – turėsime $2 \cdot 25 = 50$ balionų. Trečiojo pakelio su 25 balionais per daug, bet 20 balionų gauname paėmę 2 pakelius po 10 balionų. Iš viso turime 4 pakelius.

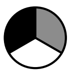
Renkamės atsakymą **B**.

! Įsitikinkime, kad mažiau pakelių jis pirkti negali. Iš tikrųjų, dviejų (juo labiau vieno) pakelių jam neužteks – juose bus ne daugiau kaip $2 \cdot 25 = 50$ balionų. Bet nepavyks jam nusipirkti 70 balionų ir perkant 3 pakelius: jeigu jis pirktų bent vieną pakelį su 5 ar 10 balionų, tai turėtų ne daugiau kaip $10 + 25 + 25 = 60$ balionų; o jeigu pirktų vis tris didžiuosius pakelius, tai gautų $3 \cdot 25 = 75$ balionus – per daug.

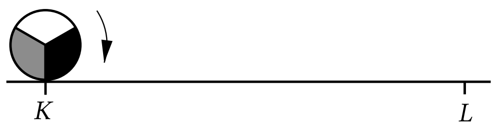
Teisingas atsakymas **B**.

2. (**B**) 10 cm^2

! Didžiausios pilkos žvaigždutės plotas yra 16 cm^2. Šios žvaigždutės matyti tiek, kiek neuždengia antroji pagal dydį (balta) žvaigždutė, kurios plotas yra 9 cm^2. Gauname didžiausios pilkos žvaigždutės neuždengtos dalies plotą: $16 - 9 = 7$ (cm^2). Analogiškai gauname ir mažesnės pilkos žvaigždutės neuždengtos dalies plotą: $4 - 1 = 3$ (cm^2). Bendras pilkos dalies plotas lygus $7 + 3 = 10$ (cm^2).

3. (**E**) 

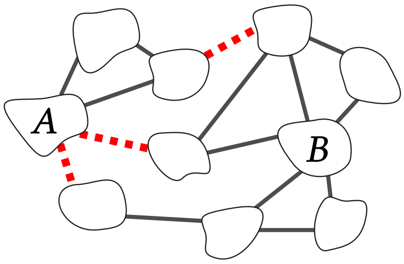
! Apskritimo, ribojančio skritulį, ilgis lygus $2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Tarkime, riedantis skritulys atlieka pilną apsisukimą aplink savo centrą. Galima įsivaizduoti aplink jį apvyniotą ir jam riedant ant atkarpos liekantį siūlą: atsivyniojusio siūlo ilgis bus 2π. Taigi skritulys nuriedės atstumą 2π.



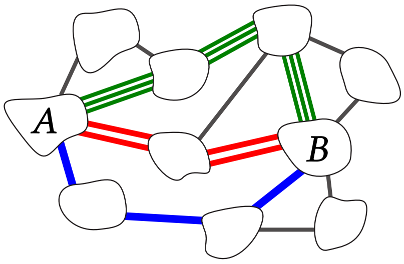
Nuriedėjęs atstumą $11\pi = 5 \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot 2\pi$, skritulys atliks 5 pilnus apsisukimus ir dar pusę pilno apsisukimo. Taigi ties tašku L skritulys bus pasisukęs 180° kampu, t. y. apsivertęs aukštyn kojomis. Balta išpjova, buvusi viršuje, atsidurs apačioje. Be to, spalvų tvarka, einant pagal laikrodžio rodyklę, skrituliui sukantis nekinta: balta, juoda, pilka. Todėl juoda išpjova atsidurs kairėje, o pilka dešinėje.

4. (C) 3

!



Lengva rasti tris tiltus, kuriuos susprogdinus kelio iš A į B nelieka (žr. pav., kur šie tiltai pažymėti raudonu punktyru). Tačiau reikia įsitikinti, kad dviejų susprogdintų tiltų neužteks. Tam nagrinėkime tris kelius iš A į B, paryškintus paveikslėlyje apačioje: joks tiltas nepriklauso dviem keliams, todėl kiekviename iš trijų kelių būtina susprogdinti po tiltą.



5. (A) 63

! Skaičius, kuriuos Raminta turi įrašyti antrame, trečiame ir ketvirtame langeliuose atitinkamai pažymėkime a, b ir c. Pagal uždavinio sąlygą, $3 + a + b + c + 4 = 35$, $3 + a + b = 22$ ir $b + c + 4 = 25$. Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją, gauname $c = 9$, o iš pirmosios atėmę trečiąją, gauname $a = 7$. Taigi skaičių, kuriuos Raminta turi įrašyti užtušuotuose langeliuose, sandauga lygi $7 \cdot 9 = 63$.

Teisingas atsakymas **A**.

6. (C) 70 %

! Sezono metu Martynas bus sulošęs $15 + 5 = 20$ partijų ir laimėjęs $9 + 5 = 14$ iš jų. Taigi laimėtų partijų dalis bus lygi $\frac{14}{20} \cdot 100\% = 14 \cdot 5\% = 70\%$.

7. (B) 14

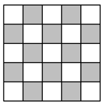
! Pastebėsime, kad pasirinkęs pirmą treniruočių dieną, Simonas antrąją dieną gali pasirinkti lygiai 4 būdais. (Jei pirmadienis bus pirmoji Simono treniruočių savaitės diena, tai antroji gali būti bet kuri iš likusiųjų savaitės dienų, išskyrus antradienį ir sekmadienį.) Taigi dvi savaitės dienas savo treniruotėms Simonas gali pasirinkti lygiai $7 \cdot 4 = 28$ būdais. Tačiau taip skaičiuodami kiekvieną tvarkaraštį suskaičiuojame po du kartus. Todėl Simonas iš viso gali sudaryti $\frac{28}{2} = 14$ tvarkaraščių savo treniruotėms.

Teisingas atsakymas **B**.

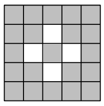
8. (C) 91°

! Nagrinėkime trikampį, kurio kampų didumai laipsniais yra skirtingi natūralieji skaičiai. Šio trikampio kampų didumus laipsniais pažymėkime a, b ir c. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a < b < c$. Trikampio kampų suma lygi $180°$, todėl $a + b + c = 180$. Pritaikę nelygybes $a \geqslant 1$ ir $c \geqslant b+1$, gauname $180 = a+b+c \geqslant 1+b+b+1 = 2b+2$. Iš čia išplaukia nelygybė $b \leqslant 89$. Tuomet mažiausio ir didžiausio kampų suma $a + c = 180 - b \geqslant 180 - 89 = 91$. Kita vertus, tokia suma įmanoma: trikampio, kurio kampų didumai yra $1°$, $89°$ ir $90°$, mažiausio ir didžiausio kampų suma lygi $1° + 90° = 91°$.

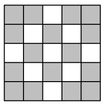
Teisingas atsakymas **C**.

9. (C) 

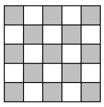
! Po minutės lentelė atrodė taip:



Po dviejų minučių vaizdas buvo toks kaip paveikslėlyje **A**:



Po trijų minučių lentelė buvo tokia kaip paveikslėlyje **B**:



Todėl po keturių minučių (taigi ir po 4 minučių ir 30 sekundžių) visi juodieji langeliai tapo baltais, o baltieji – juodais, taigi atrodė kaip paveikslėlyje **C**.

Teisingas atsakymas **C**.

Pastaba. Žinoma, po 5 minučių vėl turėsime **B**, po 6 – vėl **C** ir taip toliau.

10. (D) 6

! Kadangi skaičius reikia rašyti didėjimo tvarka, tai 1 būtinai turi būti kampiniame langelyje, o 2 būtinai bus arba dešinėje nuo 1, arba po pat 1. Suskaičiuokime, kiek yra būdų surašyti skaičius, kai 2 yra dešinėje nuo 1. Į paskutinį eilutės langelį galima įrašyti bet kurį iš skaičių 3, 4 arba 5. Į likusius du stulpelio langelius įrašome paskutinius du skaičius didėjimo tvarka vieninteliu būdu. Gauname 3 būdus. Kai 2 yra po vienetu, tai panašiai samprotaudami gausime vėl 3 būdus. Visi šie būdai bus skirtingi, vadinasi iš viso skaičius galima surašyti 6 būdais.

11. (D) 0

? Trūkstamus lentelės skaičius pažymėkime raidėmis (žr. pav.). Imkime $a = b = c = 0$ (galima parinkti ir kitokias reikšmes). Tada bet kurio 2×2 kvadrato skaičių suma turi būti lygi 3. Tuo remdamiesi, baigiame pildyti lentelę: $A = 1$, $B = 2$, $x = 0$.

3	a	1
b	c	B
2	A	x

! Kadangi $3 + a + b + c = 1 + a + B + c$ (viršutiniai 2×2 kvadratai; žr. pav.), tai $B = b + 2$. Kadangi $2 + A + b + c = x + A + B + c$ (apatiniai 2×2 kvadratai), tai $x = 2 + b - B = 0$. (Dalyje **?** jau įrodėme, kad reikiamas kvadratas egzistuoja.)

12. (E) $\frac{1}{3}$

! Nagrinėkime skaičių poras (a, b), kur a yra kauliuko pirmojo metimo metu atvirtęs skaičius, o b – antrojo metimo metu atvirtęs skaičius. Iš viso tokių galimų porų yra $6 \cdot 6 = 36$, taigi turime 36 baigtis. Svarbu suvokti, kad visos baigtys vienodai galimos. Reikia nustatyti, kelios baigtys yra palankios įvykiui „$ab < 0$“, t. y. kiek yra tokių porų (a, b).

Dviejų skaičių sandauga neigiama tada ir tik tada, kai vienas iš jų neigiamas, o kitas teigiamas. Turime du teigiamus skaičius 1 ir 2 bei tris neigiamus skaičius -3, -2, -1. Todėl yra $2 \cdot 3 = 6$ poros, kur $a > 0$ ir $b < 0$, ir tiek pat porų, kur $a < 0$ ir $b > 0$. Iš viso gavome $6 + 6 = 12$ palankių baigčių. Įvykio tikimybė lygi $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

13. (D) Jonas yra inžinierius

! Įsiskaitykime į sąlygą: Ričardas ir gydytojas ne bendraamžiai, gydytojas jaunesnis už Joną. Kitaip sakant, gydytojas – ne Ričardas ir ne Jonas. Vadinasi, gydytojas – tai Karolis. Kadangi dabar Karolis (gydytojas) jaunesnis už Joną ir vyresnis už lakūną, tai Jonas – ne lakūnas. Todėl Jonas inžinierius, o Ričardas – lakūnas. Matome, kad sakiniai **A**, **B**, **C**, **E** neteisingi, o **D** – teisingas.

Teisingas atsakymas **D**.

14. (D) 15

! Po bet kurio Mikės klaidingo teiginio eina du teisingi, o po bet kurių dviejų teisingų teiginių – klaidingas. Todėl Mikės teisingų ir klaidingų teiginių sekoje klaidingas kas trečias: ... T, K, T, T, K, T, T, K, T ... Taigi yra trys galimybės, kurie iš šešių duotų Mikės teiginių klaidingi: 1) pirmasis ir ketvirtasis; 2) antrasis ir penktasis; 3) trečiasis ir šeštasis.

Kiekvieną iš atvejų būtų galima patikrinti atskirai, bet verčiau iš karto pastebėkime, kad du teiginiai vienas kitam prieštarauja: skaičius negali būti didesnis už 50 ir mažesnis už 30. Vienas iš teiginių – antrasis arba ketvirtasis – yra klaidingas. Lieka galimybės 1) ir 2), todėl trečiasis ir šeštasis teiginiai teisingi: Mikės dviženklis skaičius lyginis ir turi skaitmenį 7. Šio skaičiaus vienetų skaitmuo lyginis ir nelygus 7. Vadinasi, turime skaičių, kurio vienetų skaitmuo lyginis, o dešimčių skaitmuo yra 7. Belieka patikrinti skaičius 70, 72, 74, 76, 78. Antrasis teiginys teisingas, o ketvirtasis klaidingas, todėl penktasis teiginys teisingas, o pirmasis – ne: skaičius dalijasi iš 3, bet neturi skaitmens 2. Šias savybes turi tik skaičius 78. Jo skaitmenų suma yra $7 + 8 = 15$.

15. (C) 2

! Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Paskutinį nubraukiamą skaičiaus n skaitmenį pažymėkime b, o skaičių, likusį nubraukus b ir sudarytą iš vieno ar kelių skaitmenų, pažymėkime A. Tada $n = \overline{Ab} = 10A + b$ ir $n = 14A$. Gauname lygybes $14A = 10A + b$ ir $b = 4A$. Vadinasi, skaitmuo b dalijasi iš 4. Taigi, $b = 0$, 4 arba 8.

Jei $b = 0$, tai $A = 0$, o $n = 14A = 0$ nėra natūralusis skaičius. Jei $b = 4$ arba 8, tai $A = b : 4 = 1$ arba 2 ir $n = 14A =$14 arba 28. Gavome dvi skaičiaus n reikšmes. Nesunku patikrinti, kad jos tenkina uždavinio sąlygą.

16. (A) 8

! Taksi išvykimo iš oro uosto momentu kelyje į miesto centrą buvo autobusai, kurie iš oro uosto išvyko prieš 3 min, 6min, 9 min, ..., 57 min. Iš viso tokių autobusų buvo $\frac{57}{3} = 19$ (autobuso, su kuriuo taksi kartu išvyko į miesto centrą, neskaičiuojame). Taksi neaplenkė 3 maršruto autobusų, kuriems taksi išvykimo momentu iki miesto centro buvo likę važiuoti ne daugiau negu 35 min, t. y. neaplenkė tų 3 maršruto autobusų, kuriems iki centro buvo likę važiuoti 3 min, 6 min, 9 min, ..., 33 min. Iš viso tokių autobusų buvo $\frac{33}{3} = 11$. Taigi taksi, važiuodamas iš oro uosto į miesto centrą, aplenkė lygiai $19 - 11 = 8$ trečiojo maršruto autobusus.

Teisingas atsakymas **A**.

17. (D) 32

! Staltiesės mažojo baltojo kvadratėlio kraštinės ilgį pažymėkime a. Tada šio kvadratėlio įstrižainės ilgis lygus $\sqrt{2}a$, o jo plotas lygus a^2. Paveikslėlyje matyti, kad staltiesės centre esančio didžiojo baltojo kvadrato kraštinės ilgis yra tris kartus didesnis už mažojo baltojo kvadratėlio įstrižainės ilgį. Taigi staltiesės centre esančio baltojo kvadrato plotas lygus $(3\sqrt{2}a)^2 = 18a^2$. Kita vertus, visos staltiesės kvadrato kraštinės ilgis yra penkis kartus didesnis už mažojo baltojo kvadratėlio įstrižainės ilgį. Todėl visos staltiesės plotas lygus $(5\sqrt{2}a)^2 = 50a^2$. Be to, juodosios staltiesės dalies plotas S gaunamas iš staltiesės ploto atėmus visų mažųjų baltųjų kvadratėlių (kurių yra 16) plotus ir centre esančio baltojo kvadrato plotą, t. y.

$$S = 50a^2 - 16 \cdot a^2 - 18a^2 = 16a^2.$$

Vadinasi, juodosios staltiesės dalies plotas sudaro $\frac{16a^2}{50a^2} \cdot 100 = 32\%$ visos staltiesės ploto.

Teisingas atsakymas **D**.

18. (E) 13

! Jei kode yra skaitmuo 7, tai jis pasikartoja 7 kartus: 7777777.

Jei kode yra skaitmuo 6, tai jis pasikartoja 6 kartus. Likęs skaitmuo pasikartoja lygiai vieną kartą, todėl tai skaitmuo 1. Gauname kodus 6666661 ir 1666666.

Jei kode yra skaitmuo 5, tai jis pasikartoja 5 kartus. Lieka du skaitmenys, kurie negali būti skirtingi, nes pasikartotų po vieną kartą ir abu būtų lygūs 1. Taigi turime du lygius skaitmenis, o skaitmuo, pasikartojantis lygiai du kartus, tegali būti 2. Gauname kodus 5555522 ir 2255555.

Jei kode yra skaitmuo 4, tai jis pasikartoja 4 kartus ir lieka dar trys skaitmenys. Jie ir vėl negali būti visi skirtingi. Tada arba visi trys skaitmenys lygūs, arba du iš jų lygūs, o trečias kitoks. Pirmu atveju jie lygūs skaitmeniui 3, gauname kodus 4444333 bei 3334444. Antru atveju du lygūs skaitmenys yra dvejetai, o vienas kitoks yra vienetas. Gauname kodus 4444221, 4444122, 2244441, 2214444, 1444422, 1224444.

Tarkime, kad kode nėra skaitmenų 7, 6, 5, 4. Taip pat jame negali būti skaitmenų 8 ir 9 (jie pasikartotų per daug kartų). Tada kode tėra daugiausiai vienas vienetas, du dvejetai ir trys trejetai (ir, žinoma, nė vieno nulio): iš viso daugiausiai $1+2+3=6$ skaitmenys. Gavome prieštarą.

Iš viso gavome $1+2+2+2+6=13$ kodų.

!! Kode negali būti skaitmenų 8, 9 (jie pasikartotų per daug kartų) ir 0 (negali pasikartoti nė karto). Kodą turi sudaryti fragmentai 7777777, 666666, 55555, 4444, 333, 22, 1, panaudoti po daugiausiai vieną kartą.

Pirmasis fragmentas pats vienas sudaro kodą.

Prie antrojo fragmento tegalima prirašyti 1 priekyje arba gale (2 kodai).

Prie trečiojo fragmento prirašius 22 priekyje arba gale, gaunamas pilnas kodas; ilgesnio fragmento prirašyti negalima, o prirašius tik 1, kodas per trumpas (2 kodai).

Prie ketvirtojo fragmento 4444 prirašius 333 priekyje arba gale, gaunamas pilnas kodas, o ilgesnio fragmento prirašyti negalima (2 kodai). Naudojant 4444 ir atsisakius 333, būtina panaudoti ir 22, ir 1, kad kode būtų 7 skaitmenys. Iš 3 fragmentų 4444, 22 ir 1 galima sudaryti $3! = 6$ kėlinius (6 kodai).

Nenaudojant nė vieno iš pirmųjų keturių fragmentų, iš likusių trijų fragmentų sudarytas kodas per trumpas.

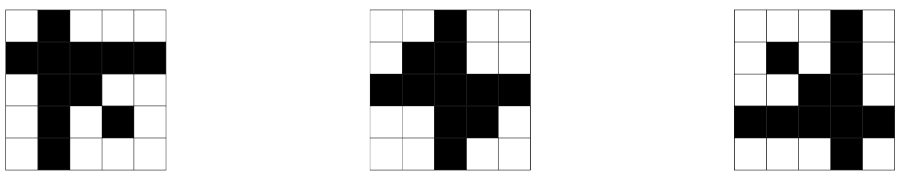
Iš viso gauname $1+2+2+2+6=13$ kodų.

19. D Beata, Cilė, Ana

! Beata ir Cilė turi lyginiais skaičiais pažymėtų rutulių, vadinasi, Ana priėjo prie dėžutės paskutinė. Beata paėmė rutulį, pažymėtą skaičiumi 45, taigi ji prie dėžutės ėjo prieš Cilę. Vadinasi pirma ėjo Beata, antra – Cilė, o trečia – Ana.

20. B 39

! Julijos sudėtas kubas sudarytas iš penkių 5×5 sluoksnių, sudėtų vienas ant kito. Kubo pagrindo 5×5 sluoksnyje Julija nepanaudojo 3 kubelių. Taip pat ir viršutiniame 5×5 sluoksnyje Julija nepanaudojo 3 kubelių. Paveikslėlyje paeiliui pavaizduoti Julijos sudėto kubo trys viduriniai 5×5 sluoksniai (pradedant sluoksniu, uždėtu ant pagrindo sluoksnio); sluoksnio kvadratėlis užtušuotas, jei atitinkamas kubelis priklauso kuriam nors „tuneliui“.



Taigi pirmame ir penktame sluoksniuose Julija nepanaudojo po 3 kubelius, o trijuose viduriniuose sluoksniuose nepanaudojo po 11 kubelių. Vadinasi, Julija iš viso nepanaudojo $2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 = 39$ kubelių.

Teisingas atsakymas **B**.

21. (E) 9

! Trikampio statinių ilgius pažymėkime a ir b, o įžambinės ilgį – c. Tada $a^2+b^2 = c^2$, $a+b+c = 18$ ir $a^2 + b^2 + c^2 = 128$. Reikia rasti plotą $S = \frac{1}{2}ab$.

Lengva rasti ir iš lygčių eliminuoti c:

$$128 = (a^2 + b^2) + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2, \qquad c^2 = 128 : 2 = 64, \qquad c = 8;$$

$$a + b = 18 - c = 10, \qquad a^2 + b^2 = 64.$$

Iš gautųjų lygčių galima rasti a ir b. Bet tai būtų laiko gaišimas, reikia rasti ab. Tai padaryti lengva:

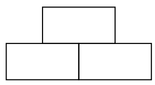
$$100 = 10^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 64 + 2ab, \qquad 2ab = 100 - 64 = 36,$$

$$S = \frac{ab}{2} = 2ab : 4 = 36 : 4 = 9.$$

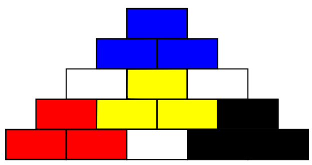
Pastaba. Kadangi $a + b = 10$ ir $ab = 18$, tai pagal Vijeto teoremą skačiai a ir b yra du lygties $x^2 - 10x + 18 = 0$ sprendiniai $5 \pm \sqrt{7}$.

22. (D) 10

! Bet kurioje „trijulėje“



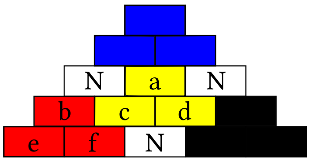
Gerda galėjo parašyti ne daugiau negu du nelyginius skaičius. 1 pav. tušavimu išskirtos keturios tokios trijulės.



1 pav.

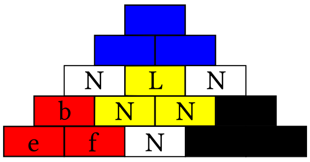
Vadinasi, šiose keturiose trijulėse Gerda galėjo užrašyti daugiausiai aštuonis nelyginius skaičius. Todėl Gerda ant visų piramidės plytelių iš viso galėjo užrašyti ne daugiau kaip $8 + 3 = 11$ nelyginių skaičių.

Įrodysime, kad Gerda ant piramidės plytelių negalėjo užrašyti 11 nelyginių skaičių. Iš tikrųjų, tarkime, kad Gerda ant piramidės plytelių iš viso užrašė 11 nelyginių skaičių. Sutarkime plytelę žymėti raide L, jei ant jos parašytas lyginis skaičius ir raide N – jei ant jos užrašytas skaičius yra nelyginis. Tada 1 pav. kiekvienoje trijulėje Gerda užrašė po du nelyginius skaičius, o ant likusių trijų plytelių taip pat užrašė nelyginius skaičius (žr. 2 pav.):



2 pav.

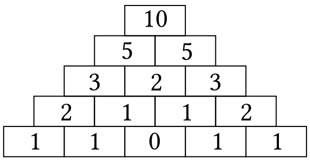
Ant plytelės, pažymėtos raide a, negali būti užrašytas nelyginis skaičius, nes tada ant visų trijų piramidės viršūnėje esančių plytelių būtų užrašyti lyginiai skaičiai. Vadinasi, ant plytelės a užrašytas lyginis skaičius, todėl ant plytelių c ir d užrašyti nelyginiai skaičiai (žr. 3 pav.):



3 pav.

Ant plytelės b užrašytas lyginis skaičius, nes ant plytelių b ir c užrašytų skaičių suma yra nelyginis skaičius. Bet tada ant plytelių e ir f užrašyti nelyginiai skaičiai (kiekvienoje trijulėje užrašyti lygiai du nelyginiais skaičiai). Tačiau dabar po plytele c, ant kurios užrašytas nelyginis skaičius, esančiose dviejose plytelėse užrašytų skaičių suma yra lyginis skaičius. Taip būti negali. Gauta prieštara įrodo, kad Gerda ant piramidės plytelių galėjo užrašyti ne daugiau negu dešimt nelyginių skaičių.

4 pav. pavyzdyje matyti, kad Gerda iš tikrųjų galėjo ant piramidės plytelių iš viso užrašyti dešimt nelyginių skaičių.



4 pav.

Teisingas atsakymas **D**.

23. (**E**) 143°

? Praleistąjį kampą pažymėkime $x°$, o daugiakampio viršūnių skaičių pažymėkime n. Daugiakampio, turinčio n viršūnių, kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$. Jei Arimantas nebūtų pametęs kampo, tai gautų kampų sumą $(n-2)\cdot 180° = 2017° + x°$.

Taigi $2017 + x$ yra natūralusis skaičius, dalus iš 180. Iš pateiktų atsakymų tinka tik **E)** $x = 143$.

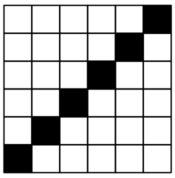
! Dalyje **?** gavome, kad $2017 + x$ yra natūralusis skaičius, dalus iš 180. Kadangi

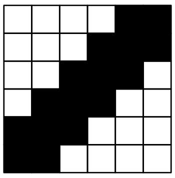
$$2017 = 1800 + 217 = 180 \cdot 10 + 180 + 37 = 180 \cdot 11 + 37,$$

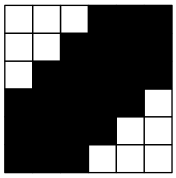
tai mažiausia galima $2017 + x$ reikšmė yra $180 \cdot 12$ ir tada $x = 180 - 37 = 143$. Jei $2017 + x \geqslant$ $\geqslant 180 \cdot 13$, tai $x \geqslant 143 + 180$. Tačiau kadangi daugiakampis iškilasis, tai $0^\circ < x^\circ < 180^\circ$. Taigi $x^\circ = 143^\circ$ yra vienintelė galima reikšmė.

24. C 6

? Uždavinys labai sunkus, bet teisingą atsakymą galima atspėti pabandžius įvairius variantus. Tarkime, kad iš pradžių šviečia šešios lempos, išsidėsčiusios ant lentos įstrižainės (juodieji langeliai, žr. 1 pav.). Kitą minutę užsidegs gretimos lempos virš įstrižainės ir gretimos lempos po įstrižaine (žr. 2 pav.). Trečią minutę pradės šviesti lempos, parodytos 3 paveikslėlyje ir t. t. Po 5 minučių švies visos lempos.


1 pav.

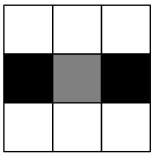

2 pav.

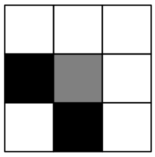

3 pav.

Nesėkmingai pabandę su 5 lempom spėjame, kad teisingas atsakymas yra **C**.

! (Michael Lambrou pasiūlytas sprendimas.) Įrodykime, kad jei pradžioje šviečia mažiau negu šešios lempos, tai visos lempos niekada nešvies. Užtenka parodyti, kad penkių lempų nepakanka.

Tam, kad lempa užsidegtų, reikia bent dviejų jai gretimų šviečiančių lempų. Galimi du skirtingi atvejai parodyti 4 ir 5 paveikslėliuose. (Kiti atvejai gaunami pasukus nurodytus.)


4 pav.


5 pav.

Pilkas langelis žymi lempą, kuri užsidegs kitą minutę. Pastebėkime, kad pradžioje figūros, sudarytos iš juodų kvadratėlių, perimetras abiem atvejais yra $4 + 4 = 8$. Kitą minutę užsidegus pilkame langelyje esančiai lempai (ir pilkam langeliui pavirtus juodam) naujos juodos figūros perimetras nepasikeis (patikrinkite!). Taigi užsidegus naujoms lempoms juodos figūros perimetras negali padidėti. Jei pradžioje šviečia 5 lempos, tai iš juodų kvadratėlių sudarytos figūros perimetras bus daugiausiai $5 \cdot 4 = 20$. Tuo tarpu visos lentos perimetras yra $6 \cdot 4 = 24 > 20$. Vadinasi, penkių šviečiančių lempų nepakanka.

25. (B) 28 cm

? Skriemulių A, B ir C perimetrus atitinkamai pažymėkime P_A cm, P_B cm ir $P_C = 30$ (cm).

Įsivaizdavus, kaip vienu metu sukasi du skriemuliai ir juos jungiantis diržas, galima nujausti, kad diržui sukantis (tiksliau, visiems jo kaip kreivės taškams vienu metu judant) pastoviu duotu (linijiniu) greičiu, tuo pačiu (linijiniu) greičiu judės ir kiekvieno skriemulio kraštas (visi jo taškai vienu metu). Todėl skriemulio pilno apsisukimo laikas yra proporcingas skriemulio perimetrui: kuo didesnis perimetras, tuo ilgiau jo krašto taškas keliauja ratu ir tuo mažiau kartų spėja apsisukti skriemulys per duotą laiką.

Taigi, jei diržu sujungtų skriemulių B ir C apsisukimų per tam tikrą laiką santykis yra $6 : 7$, tai jų perimetrų santykis yra atvirkščias: $P_B : P_C = 7 : 6$. Analogiškai $P_A : P_B = 4 : 5$. Tada $P_B = 7P_C : 6 = 7 \cdot 30 : 6 = 35$ (cm) ir $P_A = 4P_B : 5 = 4 \cdot 35 : 5 = 28$ (cm).

! Skriemulio kraštą ir prie to krašto priglundantį diržą galima matematiškai interpretuoti kaip iš dalies sutampančias kreives, kuriomis ratu juda taškai. Visą laiką dalis diržo taškų sutampa su skriemulio krašto taškais ir juda kartu su jais. Tokių taškų per bet kokį laiką, kurio metu jie sutampa, nueinami atstumai yra vienodi. Todėl ir visų skriemulio krašto bei diržo taškų per tą laiką nueinami atstumai yra vienodi. Ši savybė galioja bet kuriam pakankamai trumpam laiko tarpui (galima rasti per visą laiką sutampančius diržo ir skriemulio krašto taškus). Tačiau tada ji galioja bet kokiam laiko tarpui, nes jį galima padalyti į pakankamai trumpus.

Skriemulių A ir B perimetrus atitinkamai pažymėkime P_A cm ir P_B cm.

Kol skriemulys apsisuka vieną kartą, bet kuris jo krašto taškas nueina atstumą, lygų skriemulio perimetrui, todėl ir bet kuris skriemulį juosiančio diržo taškas nueina atstumą, lygų skriemulio perimetrui.

Vadinasi, kai C apsisuka 7 kartus, o B apsisuka 6 kartus, tai tuo metu B ir C jungiantis diržas (visi jo taškai) pasisuka per $7 \cdot 30$ cm arba per $6P_B$ cm. Taigi $6P_B = 7 \cdot 30$ ir $P_B = 35$ (cm). Analogiškai nagrinėdami skriemulius A ir B, gauname, kad $5P_A = 4P_B$. Todėl $P_A = 4P_B : 5 = 4 \cdot 35 : 5 = 28$ (cm).

26. (A) Tik a arba g

? Galime palengvinti uždavinį ir iš kiekvieno iš skaičių a, b, c, d, e, f, g atimti po 286, taip iš sekos su suma 2017 gaunant sveikųjų skaičių seką $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0$ su suma $2017 - 286 \cdot 7 = 15$. Gretimi skaičiai vėl skiriasi vienetu.

Imkime $a = 286$ ir $a_0 = 0$. Nagrinėkime paprasčiausią seką 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jos narių suma yra 21, o ne 15, todėl mažinkime didžiausius narius. Su seka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4 jau gauname sumą 19, su seka 0, 1, 2, 3, 4, 3, 4 – sumą 17, o su seka 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 – sumą 15, kurios mums ir reikia. Vėl pridėję prie sekos narių po 286, gausime seką 286, 287, 288, 289, 290, 289, 288, tenkinančią sąlygą.

Lieka atsakymai **A** ir **E**. Kad atmestume **E**, patikrinkime, pavyzdžiui, atvejį $c = 286$ ir $c_0 = 0$. Net parinkdami didžiausias galimas skaičių reikšmes

$$b_0 = d_0 = 1, \quad a_0 = e_0 = 2, \quad f_0 = 3, \quad g_0 = 4,$$

gausime sumą $13 < 15$. Taigi $c \neq 286$ (ir analogiškai $e \neq 286$), todėl mums lieka atsakymas **A**.

?? Bet kurie du gretimi skaičiai skiriasi vienetu, todėl vienas iš jų lyginis (L), o kitas nelyginis (N). Tada duotoje sekoje kas antras skaičius nelyginis: turime arba seką N, L, N, L, N, L, N, arba seką L, N, L, N, L, N, L. Pirmuoju atveju 4 nelyginių ir 3 lyginių skaičių suma būtų lyginė, taigi nelygi 2017. Vadinasi, skaičiai b, d ir f yra nelyginiai, jie negali būti lygūs 286. Lieka atsakymai **A** ir **C**. Pastarąjį galima atmesti, kaip **?** dalyje įrodant, jog $c \neq 286$.

! Kad $c, e \neq 286$, įrodėme **?** dalyje, o kad $b, d, f \neq 286$, įrodėme **??** dalyje. Be to, **?** dalyje radome pavyzdį su $a = 286$. Jei šio pavyzdžio skaičius užrašysime atbula tvarka, gausime pavyzdį su $g = 286$.

27. (D) 56

a	$a \pm 1$	a
$a \pm 1$	a	$a \pm 1$
a	$a \pm 1$	a

? Mėginkime užpildyti lentelę bene paprasčiausiu būdu: vien skaičiais a ir $a-1$ arba vien skaičiais a ir $a+1$ (žr. pav.). Pirmuoju atveju $500 = 5a + 4(a-1) = 9a - 4$, ir galima imti $a = (500+4) : 9 = 56$.

?? Vidurinio langelio skaičių pažymėkime a.

Jei skaičius a nelyginis, tai gretimuose keturiuose langeliuose skaičiai lyginiai, o kampiniuose keturiuose – vėl nelyginiai. Tada visų devynių skaičių, penkių nelyginių ir keturių lyginių, suma nelyginė ir nelygi 500. Vadinasi, skačius a lyginis.

Jei $a \leqslant 54$, tai skaičiai gretimuose keturiuose langeliuose ne didesni už 55, o skaičiai kampiniuose keturiuose langeliuose ne didesni už 56. Tada visų devynių skaičių suma ne didesnė už $54 + 4 \cdot 55 + 4 \cdot 56 = 498 < 500$.

Taigi, $a \geqslant 56$ ir $a \neq 57$. Iš pateiktų atsakymų tinka tik **D**.

! Vidurinio langelio skaičių pažymėkime a. Tada kiekviename iš gretimų keturių langelių turi būti vienas iš skaičių $a-1$ ir $a+1$. Kiekviename iš likusių keturių langelių turi būti vienas iš skaičių, gretimų skaičiams $a-1$ ir $a+1$, t. y. vienas iš skaičių $a-2$, a arba $a+2$. Visų devynių skaičių suma ne mažesnė už $a + 4(a-1) + 4(a-2) = 9a - 12$ ir ne didesnė už $a + 4(a+1) + 4(a+2) = 9a + 12$. Vadinasi,

$$9a - 12 \leqslant 500 \leqslant 9a + 12,$$

$$500 - 12 \leqslant 9a \leqslant 500 + 12, \qquad 488 \leqslant 9a \leqslant 512.$$

Tarp skaičių 488 ir 512 yra du skaičiai, dalūs iš 9: arba $9a = 495$, arba $9a = 504$.

Kaip ir **??** dalyje, įrodome, kad skaičius a turi būti lyginis. Todėl $9a = 504$ ir $a = \frac{504}{9} = 56$. (Pavyzdį, kad ši reikšmė galima, radome **?** dalyje.)

28. E 21

! Dvejeto laipsniai yra $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots$ Matome, kad triženkliai skaičiai yra $128 = 2^7$, $256 = 2^8$ ir $512 = 2^9$.

Jei skaičius $(a+b)^c$ yra dvejeto laipsnis, tai $a+b$ nesidalija iš jokio nelyginio pirminio skaičiaus, todėl taip pat yra dvejeto laipsnis. Kadangi $a + b \leqslant 9 + 9 = 18$, tai $a + b = 1$, 2, 4, 8 arba 16. Nepamirškime, kad pirmasis skaičiaus $\overline{abc}$ skaitmuo a nelygus 0.

1) Jei $a + b = 1$, tai $(a + b)^c = 1$ nėra triženklis skaičius.
2) Jei $a+b = 2$, tai $(a+b)^c = 2^c$, ir $c = 7$, 8 arba 9 (3 galimybės). Tada $(a, b) = (1, 1)$ arba $(2, 0)$ (2 galimybės). Turime $3 \cdot 2 = 6$ galimybes.
3) Jei $a + b = 4 = 2^2$, tai $(a + b)^c = 2^{2c}$, ir $2c = 7$, 8 arba 9. Tinka tik $2c = 8$. Tada $c = 4$ ir $(a, b) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ arba $(4, 0)$. Turime 4 galimybes.
4) Jei $a + b = 8 = 2^3$, tai $(a + b)^c = 2^{3c}$, ir $3c = 7$, 8 arba 9. Tinka tik $3c = 9$. Tada $c = 3$ ir $(a, b) = (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)$ arba $(8, 0)$. Turime 8 galimybes.
5) Jei $a + b = 16 = 2^4$, tai $(a + b)^c = 2^{4c}$, ir $4c = 7$, 8 arba 9. Tinka tik $4c = 8$. Tada $c = 2$ ir $(a, b) = (7, 9), (8, 8)$ arba $(9, 7)$. Turime 3 galimybes.

Iš viso gavome $6 + 4 + 8 + 3 = 21$ galimybę, koks gali būti skaičius $\overline{abc}$.

29. A 10

! Nagrinėkime mergaičių padėtis tuo metu, kai jos suplojo pirmą kartą. Mergaitę žymėkime raide K, jei ji pasisukusi į kairę, ir raide D, jei į dešinę. Žiūrėdami į ratelį iš viršaus ir eidami pagal laikrodžio rodyklę, nagrinėkime gretimų mergaičių poras. Kombinacijos DD ir KK reiškia, kad mergaitės žvelgia į tą pačią pusę. Kombinacija DK reiškia, kad mergaitės stovi nusigręžusios viena nuo kitos. Kombinacija KD reiškia, kad mergaitės atsigręžusios viena į kitą. Būtent jos ir suplojo delnais, todėl poroms KD priklauso 10 mergaičių.

Dabar eidami pagal laikrodžio rodyklę nagrinėkime tik poras DK ir KD, nekreipdami dėmesio į KK ir DD. Po poros DK būtinai eina KD, o po KD būtinai eina DK. Vadinasi, porų DK ir KD yra po lygiai (ir jokia mergaitė negali priklausyti dviem skirtingoms poroms KD arba dviem skirtingoms poroms DK). Todėl poroms DK, kaip ir poroms KD, priklauso 10 mergaičių.

Mergaitėms nusigręžus į priešingą pusę, jas vėl analogiškai galime pažymėti raidėmis K ir D, tik dabar kiekvieną raidę turime pakeisti kita. Suplojo mergaitės, sudarančios poras KD, t. y. tos, kurios prieš nusigręžimą sudarė poras DK. Vadinasi, suplojusių mergaičių ir vėl yra 10.

30. (A) 1683

! Matematikus ir niektauzas atitinkamai žymėkime raidėmis M ir N.

Šventėje galėjo dalyvauti tik niektauzos. Tada susirinkusių niektauzų yra mažiausiai 1001, o matematikų saloje yra daugiausiai $2017 - 1001 = 1016$.

Toliau tarkime, kad šventėje dalyvavo bent vienas matematikas M_1. Kadangi jis nesumelavo, tai stovėjo tarp matematiko M_2 ir niektauzos N_1. Rate turime gretimų žmonių grupę $M_2M_1N_1$. Kadangi N_1 sumelavo, tai jis stovi tarp dviejų tokių pačių žmonių: tarp matematiko M_1 ir matematiko M_3. Kadangi M_3 nesumelavo, tai jis stovi tarp niektauzos N_1 ir matematiko M_4. Kadangi M_4 nesumelavo, tai jis stovi tarp matematiko M_3 ir niektauzos N_2. Gauname grupę $M_2M_1N_1M_3M_4N_2$. Įrodėme, kad rate po dviejų matematikų ir niektauzos vėl eina du matematikai ir niektauza. Analogiškai gauname, kad ir po šių trijų žmonių vėl eina du matematikai ir niektauza, ir t. t. Vadinasi, rate niektauza yra kas trečias žmogus.

Jei ratą sudaro n žmonių, tai niektauzų jame yra $\frac{n}{3}$, o matematikų jame yra $\frac{2n}{3}$. Skaičius n dalijasi iš 3. Daugiausiai matematikų saloje gausime, tardami, kad visi šventėje nedalyvavę $2017 - n$ žmonių yra matematikai. Todėl matematikų saloje gali būti daugiausiai $k = \frac{2n}{3} + (2017 - n) = 2017 - \frac{n}{3}$. Matome, kad jų bus tuo daugiau, kuo mažesnis skaičius $n > 1000$. Kadangi n dalijasi iš 3, tai mažiausia galima n reikšmė yra 1002. Tada $\frac{n}{3} = 334$ ir $k = 2017 - 334 = 1683$. Tiek matematikų galėtų būti: jei tokiu atveju į šventę susirenka 668 matematikai ir visi 334 niektauzos, o tada niektauzos užima rate kas trečią poziciją, tai uždavinio sąlyga tenkinama.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	B
2	B
3	E
4	C
5	A
6	C
7	B
8	C
9	C
10	D
11	D
12	E
13	D
14	D
15	C
16	A
17	D
18	E
19	D
20	B
21	E
22	D
23	E
24	C
25	B
26	A
27	D
28	E
29	A
30	A