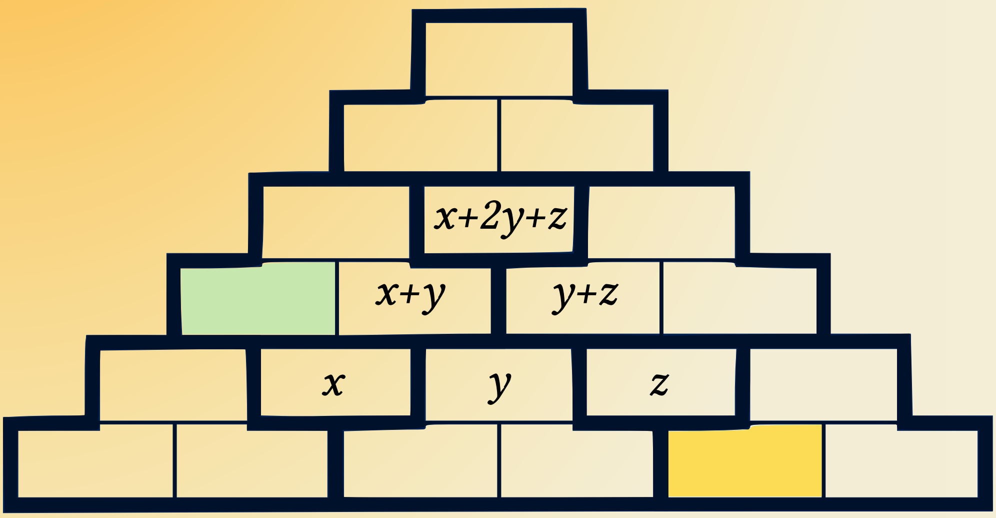
Kengūra

J U N I O R A S



Užduotys ir sprendimai

2017

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2017. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Jonas Šiurys

Viršelio autorė
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 48000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2017 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2017 metų kovo 16 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras ☐☐☐☐☐☐

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių ☐
Lenkų ☐
Rusų ☐
Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

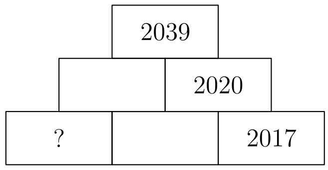
PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2017 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Skaičių piramidė sudaryta, užpildžius apatinę eilutę, o tada virš bet kurių dviejų gretimų vienos eilutės skaičių užrašant jų sumą (žr. pav.). Koks skaičius įrašytas vietoj klaustuko?



A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

2. Petras parašė žodį **KENGŪRA** ant permatomos stiklo šukės (žr. pav.). Kokį užrašą jis pamatė, kai apvertė šukę kita puse?

A)  B)  C)  D)  E) 

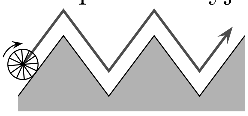
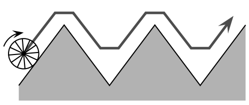
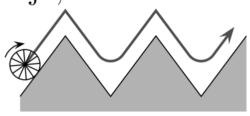
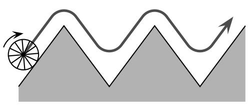
3. Alma sukūrė papuošimą iš baltų ir pilkų tokios pačios formos popierinių žvaigždučių (žr. pav.). Tų žvaigždučių plotai yra 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 ir 16 cm^2. Koks yra neuždengtos pilkos papuošimo dalies plotas?

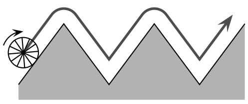
A) 9 cm^2 **B)** 10 cm^2 **C)** 11 cm^2 **D)** 12 cm^2 **E)** 13 cm^2

4. Elena turi 24 eurus, o trys jos broliai – po 12 eurų. Po kiek eurų Elena turi duoti kiekvienam broliui, kad visi keturi šeimos nariai turėtų po lygiai?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

5. Kuriame paveikslėlyje pavaizduota stebulės trajektorija, ratui riedant laužytu paviršiumi?

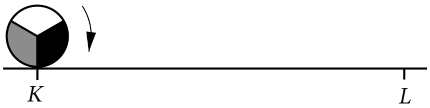
A)  **B)**  **C)**  **D)** 

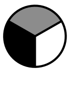
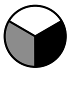
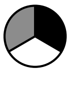
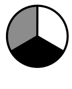
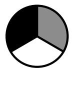
E) 

6. Mergaitėms šokant ratelį, Agota buvo penkta iš kairės nuo Barboros ir tuo pačiu metu aštunta iš dešinės nuo jos. Kiek mergaičių šoko?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

7. Vienetinio spindulio skritulys rieda tiesia atkarpa nuo taško K iki taško L (žr. pav.). Koks bus skritulio vaizdas, jam pasiekus tašką L, jei $KL = 11\pi$?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

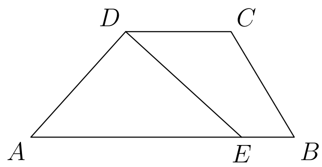
8. Šachmatininkas Martynas šį sezoną jau sulošė 15 partijų ir laimėjo 9 iš jų. Koks šį sezoną bus Martyno laimėjimų procentinis kiekis, jei jis laimės visas 5 partijas, kurias jam dar liko sulošti?
A) 60 % **B)** 65 % **C)** 70 % **D)** 75 % **E)** 80 %

9. Vestuvių vakarėlyje aštuntadalis svečių buvo vaikai. Vyrai sudarė tris septintadalius suaugusių svečių. Kurią visų svečių dalį sudarė moterys?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{7}$ **E)** $\frac{3}{7}$

10. Sagų dėžutėje guli 203 raudonos, 117 baltų ir 28 mėlynos sagos. Kiek mažiausiai sagų reikia nežiūrint pasemti iš dėžutės, norint būtinai ištraukti tris sagas, kurios būtų vienos spalvos?
A) 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 28 **E)** 203

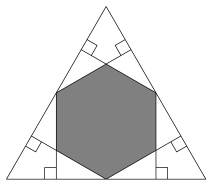
Klausimai po 4 taškus

11. Trapecijos $ABCD$ pagrindų ilgiai yra $AB = 50$, $CD = 20$. Viršūnę D sujungus su kraštinės AB tašku E, trapecija padalyta į dvi lygiaplotes dalis (žr. pav.). Raskite atkarpos AE ilgį.
A) 25 **B)** 30 **C)** 35 **D)** 40 **E)** 45



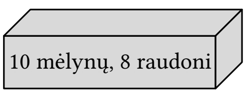
12. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių A, kad lygiai vienas iš skaičių A ir $A + 20$ yra keturženklis?
A) 19 **B)** 20 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

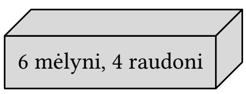
13. Iš lygiakraščio trikampio kraštinių vidurio taškų į trikampio kraštines nuleisti šeši statmenys (žr. pav.). Kurią trikampio ploto dalį sudaro gautojo šešiakampio plotas?
A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

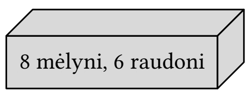


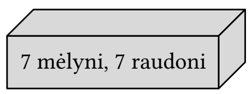
14. Trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratų suma lygi 770. Koks yra didžiausias iš tų natūraliųjų skaičių?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

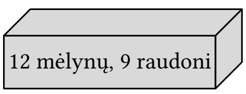
15. Penkiose pavaizduotose dėžėse guli raudoni ir mėlyni rutuliai, o jų kiekiai užrašyti ant dėžių. Audrius turi pasirinkti vieną dėžę ir nežiūrėdamas ištraukti vieną rutulį. Kurią dėžę jam labiausiai apsimoka pasirinkti, jei jis nori ištraukti mėlyną rutulį?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

16. Arnoldas turi parengti pusmečio treniruočių planą. Jis turi treniruotis lygiai tris dienas per savaitę, visada tomis pačiomis savaitės dienomis, bet negali treniruotis dvi dienas iš eilės. Keliais būdais jis gali pasirinkti treniruočių dienas?
A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 35

17. Elena ir trys jos pusbroliai visi yra skirtingo ūgio. Elena tiek pat žemesnė už Eligijų (centimetrais), kiek aukštesnė už Egidijų. Ovidijus lygiai tiek pat žemesnis už Egidijų. Elenos ūgis yra 184 cm, o jos bei trijų pusbrolių ūgio vidurkis yra 178 cm. Koks yra Ovidijaus ūgis?
A) 160 cm **B)** 166 cm **C)** 172 cm **D)** 184 cm **E)** 190 cm

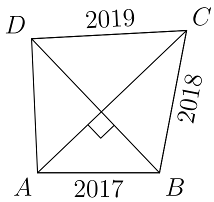
18. Elenos keturių pusseserių amžiai (metais) yra skirtingi, o tų amžių sandauga yra 882. Nė viena pusseserė dar nesulaukė 18 metų. Kokia yra pusseserių amžių suma?
A) 23 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 31 **E)** 33

19. Janina įrašė po skaičių į 3×3 lentelės langelius. Visuose keturiuose 2×2 kvadratuose skaičių sumos yra vienodos. Kokį skaičių Janina įrašė vietoj klaustuko (žr. pav.)?
A) 5 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** Skaičiaus nustatyti neįmanoma

3		1
2		?

Klausimai po 5 taškus

21. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės statmenos, o kraštinių ilgiai yra $AB = 2017$, $BC = 2018$ ir $CD = 2019$. Koks yra ketvirtosios kraštinės AD ilgis?
A) 2016 **B)** 2018 **C)** $\sqrt{2020^2 - 4}$ **D)** $\sqrt{2018^2 + 2}$ **E)** 2020

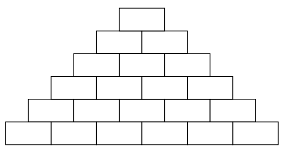


22. Lošimo kauliukas, kurio sienelėse pažymėti skaičiai -3, -2, -1, 0, 1, 2, ridenamas du kartus. Kokia yra tikimybė, kad iškritusių skaičių sandauga yra neigiamas skaičius?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

23. Iš bet kokio dviženklio skaičiaus $\overline{ab}$ galima gauti šešiaženklį skaičių $\overline{ababab}$. Pastarasis skaičius būtinai dalijasi iš
A) 2 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 11

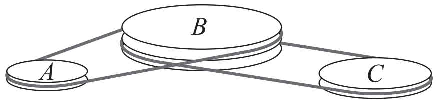
24. Džeimsas turi atspėti septynių skaitmenų kodą. Jis sužinojo, kad kiekvienas iš kodo skaitmenų lygus to skaitmens pasikartojimų kodo užrašyme skaičiui ir kad vienodi skaitmenys turi būti rikiuojami vienas po kito. Taigi, kodas galėtų būti 4444333 ar 1666666. Kiek daugiausiai kodų turės patikrinti Džeimsas?
A) 6 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

25. Skaičių piramidė sudaryta užpildžius apatinę eilutę, o tada virš bet kurių dviejų gretimų vienos eilutės skaičių užrašius jų sumą (žr. pav.). Jei visi įrašyti skaičiai natūralieji, tai kiek daugiausiai tarp jų gali būti nelyginių?
A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17



26. Arimantas skaičiavo iškilojo daugiakampio kampų sumą, tačiau vieną kampą praleido ir gavo klaidingą atsakymą 2017°. Kokio didumo kampą praleido Arimantas?
A) 37° **B)** 53° **C)** 97° **D)** 127° **E)** 143°

27. Diržinę pavarą sudaro skriemuliai A, B ir C, sujungti neslystančiais diržais. Kol B apsisuka lygiai 4 kartus, A apsisuka lygiai 5 kartus. O kol B apsisuka lygiai 6 kartus, C apsisuka lygiai 7 kartus. Raskite A perimetrą, jei C perimetras yra 30 cm.



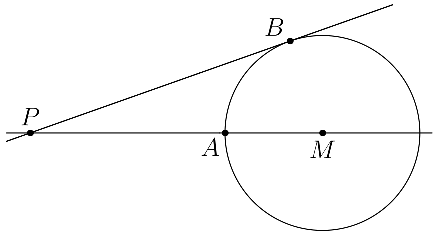
A) 30 cm **B)** 28 cm **C)** 27 cm **D)** 24 cm **E)** 21 cm

28. Lentoje nurodyta tvarka užrašyti septyni natūralieji skaičiai a, b, c, d, e, f, g, kurių suma lygi 2017. Bet kurie du gretimi skaičiai skiriasi vienetu. Kuris iš užrašytųjų skaičių galėtų būti lygus 286?

A) Tik a arba g **B)** Tik b arba f **C)** Tik c arba e **D)** Tik d **E)** Bet kuris

29. Taškai A ir B priklauso apskritimui su centru M. Tiesė PB liečia apskritimą taške B, o tiesė PA eina per M (žr. pav.). Atkarpų ilgiai PA ir MB yra sveikieji skaičiai, ir $PB = PA + 6$. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti atkarpos ilgis MB?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8



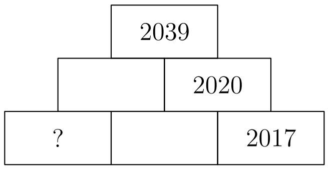
30. Ratelį šoko 30 mergaičių. Staiga jos sustojo ir visos atsisuko veidu į ratelio centrą. Tada vienu metu kai kurios mergaitės pasisuko į kairę, o likusios – į dešinę. Gretimos mergaitės, kurios atsigręžė viena į kitą, suplojo delnais. Delnais suplojusių mergaičių buvo 10. Tada visos mergaitės vienu metu nusigręžė į priešingą pusę, ir vėl gretimos mergaitės, atsigręžusios viena į kitą, suplojo delnais. Kiek mergaičių suplojo delnais šį kartą?

A) 10 **B)** 20 **C)** 8 **D)** 15 **E)** Nustatyti neįmanoma

Junioro užduočių sprendimai

1. (B) 16

! Jei tiesiai po kuriuo nors piramidės skaičiumi a yra du skaičiai b ir c, tai $a = b + c$. Tada $b = a - c$ ir $c = a - b$. Iš karto galime užpildyti du tuščius langelius. Vidurinės eilutės kairėje turime $2039 - 2020 = 19$, o apatinės eilutės viduryje turime $2020 - 2017 = 3$. Vietoj klaustuko analogiškai gauname $19 - 3 = 16$.



2. (E) 

? Galima įsivaizduoti, kaip šukė apverčiama per savo apatinę briauną ir gaunamas veidrodinis užrašo atspindys, t. y. užrašo simetrinis vaizdas apatinės briaunos atžvilgiu. Toks yra atsakymas **E**.

A)  B)  C)  D)  E) 

! Apverstos šukės padėtis negali būti kitokia nei ta, kuri gaunama apvertus šukę per apatinę briauną. Tai parodo apverstos šukės forma: smailiausias kampas lieka kairėje. Tada atsakymai **A**-**D** netinka: atsakyme **D** raidė K nėra ties smailiuoju kampu, atsakyme **A** neapsiverčia raidės N ir G, atsakyme **C** neapsiverčia Ū ir A, o atsakyme **B** raidės E, G ir R apsiverčia, tačiau ne tik horizontalės, bet ir vertikalės atžvilgiu.

Kad likęs atsakymas **E** tinka, įrodėme **?** dalyje.

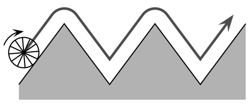
3. (B) 10 cm^2

! Didžiausios pilkos žvaigždutės plotas yra 16 cm^2. Šios žvaigždutės matyti tiek, kiek neuždengia antroji pagal dydį (balta) žvaigždutė, kurios plotas yra 9 cm^2. Gauname didžiausios pilkos žvaigždutės neuždengtos dalies plotą: $16 - 9 = 7$ (cm^2). Analogiškai gauname ir mažesnės pilkos žvaigždutės neuždengtos dalies plotą: $4 - 1 = 3$ (cm^2). Bendras pilkos dalies plotas lygus $7 + 3 = 10$ (cm^2).

4. (C) 3

! Tarkime, kad Elena duoda kiekvienam broliui po x eurų. Tada ji turi $24 - 3x$ eurų, o broliai – po $12 + x$ eurų. Jei tada visi turi po lygiai pinigų, tai $24 - 3x = 12 + x$ ir $x = 3$.

!! Galima apsieiti be lygties sudarymo. Iš viso turime $24 + 3 \cdot 12 = 60$ eurų. Kai visi šeimos nariai turi po lygiai pinigų, jie turi po $60 : 4 = 15$ eurų. Kiekvienas Elenos brolis turi gauti po $15 - 12 = 3$ eurus.

5. (E) 

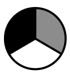
! Kai ratas pasiekia smailią kalno viršūnę, jis turi persiversti į kitą kalno pusę: tuo metu vienas rato taškas lieka ties viršūne, o visas ratas sukasi aplink jį. Stebulė sukasi kartu su ratu aplink viršūnę ir todėl trajektorija tuo metu yra apskritimo su centru kalno viršūnėje lankas. Geometrinę situaciją, kurią čia tereikia įsivaizduoti, galima griežčiau nusakyti taip: dvi atkarpos (šlaitai) turi bendrą galą A (kalno viršūnę), o apskritimas (ratas), liečiantis kairiąją atkarpą taške A, turi pasisukti aplink A, kad liestų dešiniąją atkarpą (tik tada ratas galės riedėti žemyn).

Kol ratas rieda tiesiu paviršiumi, jo stebulės trajektorija yra atkarpa, lygiagreti su tuo paviršiumi. Ratas pasiekia savo žemiausią tašką, kai vis dar liesdamas šlaitą, kuriuo rieda žemyn, paliečia ir dešinesnį šlaitą. Tada ratas iš karto ima riedėti nauju šlaitu aukštyn. Taigi čia persivertimo nėra, o trajektorija yra dvi atkarpos bendru galu, lygiagrečios su šlaitais.

Lankai ties kalnų viršūnėmis ir susikertančios atkarpos, lygiagrečios su šlaitais, slėniuose pavaizduoti atsakyme **E**.

6. (C) 13

! Barboros kairėje turime keturias mergaites ir tada po jų Agotą. Barboros dešinėje turime septynias mergaites ir tada po jų Agotą. Taigi ratelį iš eilės sudaro: Barbora, keturios mergaitės, Agota ir dar septynios mergaitės. Iš viso turime $1 + 4 + 1 + 7 = 13$ mergaičių.

7. (E) 

! Apskritimo, ribojančio skritulį, ilgis lygus $2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Tarkime, riedantis skritulys atlieka pilną apsisukimą aplink savo centrą. Galima įsivaizduoti aplink jį apvyniotą ir jam riedant ant atkarpos liekantį siūlą: atsivyniojusio siūlo ilgis bus 2π. Taigi skritulys nuriedės atstumą 2π.

Nuriedėjęs atstumą $11\pi = 5 \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot 2\pi$, skritulys atliks 5 pilnus apsisukimus ir dar pusę pilno apsisukimo. Taigi ties tašku L skritulys bus pasisukęs $180°$ kampu, t. y. apsivertęs aukštyn kojomis. Balta išpjova, buvusi viršuje, atsidurs apačioje. Be to, spalvų tvarka, einant pagal laikrodžio rodyklę, skrituliui sukantis nekinta: balta, juoda, pilka. Todėl juoda išpjova atsidurs kairėje, o pilka dešinėje.

8. (C) 70 %

! Sezono metu Martynas bus sulošęs $15 + 5 = 20$ partijų ir laimėjęs $9 + 5 = 14$ iš jų. Taigi laimėtų partijų dalis bus lygi $\frac{14}{20} \cdot 100\% = 14 \cdot 5\% = 70\%$.

9. (A) $\frac{1}{2}$

! Kadangi vaikai sudarė $\frac{1}{8}$ visų svečių, tai suaugusieji sudarė $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ visų svečių. Vyrai sudarė $\frac{3}{7}$ suaugusiųjų, todėl jie sudarė $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$ visų svečių. Moterų dalį gauname, atėmę vaikus ir vyrus:

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

10. (C) 7

! Tai kiek klastingas loginis uždavinys, nes duoti skaičiai 203, 117 ir 28 atsakymui įtakos neturi.

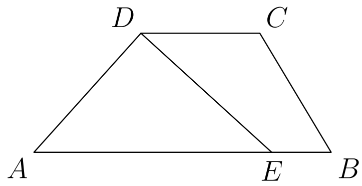
Jei tarp ištrauktų sagų nėra trijų vienos spalvos sagų, tai kiekvienos iš 3 spalvų turime po daugiausiai 2 sagas, taigi iš viso daugiausiai $3 \cdot 2 = 6$ sagas. Todėl jei sagų ištraukta daugiau nei 6 (bent 7), tai trys vienos spalvos sagos tarp jų būtinai yra.

Kita vertus, pasėmus ne daugiau kaip 6 sagas, galima ištraukti po ne daugiau kaip dvi kiekvienos spalvos sagas, ir tada uždavinio sąlyga nebus tenkinama.

Taigi, 6 ar mažiau sagų neužtenka, o 7 sagų užtenka.

11. (C) 35

! Trapecijos $ABCD$ ir trikampio ADE aukštinė yra ta pati. Jei jos ilgis yra h, tai šių figūrų plotai lygūs



$$S_{ABCD} = \frac{h \cdot (AB + CD)}{2} \quad \text{ir} \quad S_{ADE} = \frac{h \cdot AE}{2}.$$

Trapecijos $ABCD$ plotas padalytas į dvi lygias dalis, viena iš kurių yra trikampio ADE plotas. Todėl

$$1 : 2 = S_{ADE} : S_{ABCD} = AE : (AB + CD).$$

Vadinasi, $AE = (AB + CD) : 2 = (50 + 20) : 2 = 35$.
(Sprendime galima panaudoti ir trapecijos $BCDE$ ploto formulę $S_{BCDE} = \frac{h \cdot (EB+CD)}{2} = \\ = \frac{h \cdot (AB-AE+CD)}{2}$.)

12. (E) 40

! Keturženkliai skaičiai iš eilės yra 1000, 1001, 1002, ..., 9998, 9999.

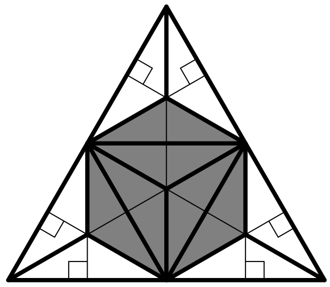
Tarkime, skaičius A yra keturženklis. Tada $A + 20$ atitinkamai lygu 1020, 1021, 1022, ..., 10018, 10019, ir tai turi būti neketurženklis skaičius. Tinka 20 reikšmių: kai $A + 20 = 10000$, 10001, ..., 10019 ir atitinkamai $A = 9980$, 9981, ..., 9999.

Tarkime, skaičius $A + 20$ yra keturženklis. Tada A atitinkamai lygu 980, 981, 982, ..., 9978, 9979, ir tai turi būti neketurženklis skaičius. Tinka 20 reikšmių: kai $A = 980$, 981, ..., 999 ir atitinkamai $A + 20 = 1000$, 1001, ..., 1019.

Iš viso gavome 40 galimų A reikšmių.

!! Įsivaizduokime koordinačių ašį ir joje raudonai pažymėtus keturženklius skaičius. Uždavinyje klausiama, kiek ašyje yra natūraliųjų taškų porų, kur atstumas tarp taškų yra 20 ir lygiai vienas taškas yra raudonas. Kairiausia tokia pora gaunama, kai dešinysis taškas yra kairiausias raudonas taškas 1000. Toliau tinka taškų poros, gaunamos šią kairiausią porą paslinkus per 1, per 2, ..., per 19 į dešinę. Taigi ties 1000 gavome 20 porų. Paslinkus per 20, kairysis poros taškas tampa raudonas, kaip ir dešinysis. Toliau abu taškai bus raudoni, kol nepasieksime 9999. Dėl simetrijos ties 9999 taip pat gausime 20 porų, iš kurių paskutinė bus dešiniausia galima. Taigi iš viso gauname 40 taškų porų.

13. (D) $\frac{1}{2}$



? Galima nuspėti, kad papildžius brėžinį trikampio pusiaukraštinėmis ir vidurio linijomis, trikampis padalijamas į 24 lygius trikampėlius (žr. pav.). Pusė iš jų (12) sudaro nuspalvintą šešiakampį, todėl jo plotas lygus pusei trikampio ploto.

Tą patį rezultatą galima gauti, pradinį trikampį padalijus į 12 didesnių lygių trikampėlių (riebesnės linijos paveikslėlyje).

! Pagrįskime **?** dalies išvadą. Visų pirma, vidurio linijos dalija lygiakraštį trikampį į keturis trikampius. Kiekviena vidurio linija lygi pusei didžiojo trikampio kraštinės, todėl šie keturi trikampiai lygiakraščiai ir lygūs (paga kraštines). Nubrėžus keturių lygių trikampių pusiaukraštines, jos sutaps su aukštinėmis, todėl ir su pradiniame brėžinyje nuleistais šešiais statmenimis. Kiekvieną iš keturių trikampių jos dalija į šešis trikampėlius, kurie lygūs tarpusavyje (bet kurie du gretimi – dėl simetrijos; lygiakraščio trikampio bet kuri pusiaukraštinė yra jo simetrijos ašyje). Taip ir gauname iš viso 24 lygius trikampėlius, minimus **?** dalyje.

Uždavinį galima spręsti ir kitaip: reiškiant pradinio brėžinio trikampėlių bei keturkampėlių plotus per didžiojo trikampio kraštinės ilgį, naudojantis panašiaisiais trikampiais, pusiaukraštinės savybe. Tačiau toks sprendimas būtų ilgesnis.

14. (C) 17

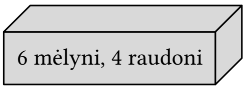
? Kadangi trijų kvadratų vidurkis 770 : 3 yra šiek tiek didesnis už $256 = 16^2$, tai bent vienas iš kvadratų turi būti didesnis už 16^2 ir bent vienas iš kvadratų – mažesnis už 17^2. Tada trys iš eilės einantys skaičiai yra arba 15, 16, 17, arba 16, 17, 18. Antruoju atveju kvadratų suma būtų nelyginė. Vadinasi, didžiausias iš trijų skaičių yra 17.

! Iš eilės einančius skaičius galima pažymėti $n, n+1, n+2$, pakelti kvadratu ir sudėti, o gautą suprastintą reiškinį prilyginti 770. Gautume standartiniu metodu išsprendžiamą kvadratinę lygtį. Tačiau simetrijos pojūtis gali pagreitinti sprendimą.

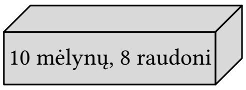
Pažymėkime tris skaičius kitaip: $n-1, n$ ir $n+1$. Reiškinyje

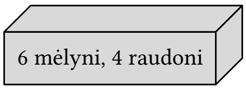
$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2$$

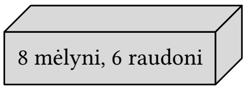
išsiprastina tiesiniai nariai ir gaunama paprastesnė lygtis $3n^2 + 2 = 770$. Tada $3n^2 = 768$ ir $n^2 = 768 : 3 = 256 = 16^2$. Taigi $n = 16$. Didžiausias iš trijų natūraliųjų skaičių yra $n + 1 = 17$.

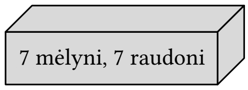
15. (B) 

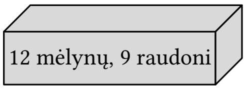
? Dėžėje **D** mėlynų ir raudonų rutulių yra po lygiai, o kitose dėžėse mėlynų rutulių yra daugiau nei raudonų, taigi šios dėžės rinktis tikrai neapsimoka. Dėžėse **C** ir **E** mėlynų ir raudonų rutulių santykis toks pats, $4 : 3$. Todėl jos yra lygiavertės, jas galima atmesti, nes negali būti dviejų teisingų atsakymų. Tikimybė ištraukti mėlyną rutulį iš dėžės **B** nepakis, jei abiejų spalvų rutulių skaičių joje padvigubinsime. Tada likusiose dėžėse **A** ir **B** raudonų rutulių bus po lygiai, bet dėžėje **B** mėlynų rutulių bus daugiau. Dabar aišku, kad apsimoka rinktis dėžę **B**.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

! Jeigu vienoje dėžėje būtų tik 5 rutuliai, bet visi mėlyni, o kitoje dėžėje 100 mėlynų ir 1000 raudonų rutulių, tai Audrius, žinoma, turėtų rinktis pirmąją dėžę. Audriui apsimoka pasirinkti ne tą dėžę, kurioje yra daugiau mėlynų rutulių, o tą, iš kurios ištraukti mėlyną rutulį yra didžiausia tikimybė. Pateiktame pavyzdyje iš pirmos dėžės ištraukti mėlyną rutulį tikimybė yra 1, o iš antros – gana nedidelė: tai įvyktų tik 100 atvejų iš $1000 + 100$, t. y. tikimybė lygi $\frac{100}{1000+100} = \frac{1}{11}$.

Vadinasi, reikia nustatyti, kuri iš tikimybių

$$\textbf{A)}\ \frac{10}{10+8} = \frac{5}{9}, \quad \textbf{B)}\ \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}, \quad \textbf{C)}\ \frac{8}{8+6} = \frac{4}{7},$$

$$\textbf{D)}\ \frac{7}{7+7} = \frac{1}{2}, \quad \textbf{E)}\ \frac{12}{12+9} = \frac{4}{7}$$

didžiausia. Lygias tikimybes dėžėms **C** ir **E** galima būtų atmesti be tikrinimo. Be to, lengva matyti, kad tikimybė **D** mažiausia. Tačiau nesunku ir patikrinti visas nelygybes: $\frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$. Didžiausia yra tikimybė **B**.

16. (B) 7

! Arnoldas turi pasirinkti tris savaitės dienas, kuriomis treniruosis visą pusmetį. Jis negali pasirinkti gretimų savaitės dienų (sekmadienis ir po jo einantis pirmadienis taip pat gretimi).

Tarkime, Arnoldas pasirinko pirmadienį. Tada likusios dvi treniruočių dienos turi būti nuo trečiadienio iki šeštadienio. Jis gali pasirinkti trečiadienį, o tada arba penktadienį, arba šeštadienį (dvi galimybės). Arba jis gali nesirinkti trečiadienio, bet tada būtinai ketvirtadienį ir šeštadienį (trečia galimybė).

Tarkime, Arnoldas pasirinko antradienį. Tada likusios dvi treniruočių dienos turi būti nuo ketvirtadienio iki sekmadienio. Vėl analogiškai gauname 3 galimybes, kurios nesutampa pirmomis trim, kur Arnoldas pasirinkęs pirmadienį.

Tarkime, Arnoldas nepasirinko nei pirmadienio, nei antradienio. Tada jis turi pasirinkti tris dienas nuo trečiadienio iki sekmadienio. Čia tik viena galimybė: trečiadienis, penktadienis, sekmadienis.

Iš viso gauname $3 + 3 + 1 = 7$ galimybes.

!! Savaitės dienas patogu įsivaizduoti kaip taškus, pažymėtus iš eilės ratu pagal laikrodžio rodyklę. Reikia pasirinkti tris taškus taip, kad jokie du nebūtų gretimi. Tada likę 4 taškai patenka į tris tarpus tarp pasirinktųjų taškų: kiekviename iš trijų tarpų po tašką, o viename iš tarpų – dar vienas taškas. Taigi yra du tarpai su vienu tašku ir vienas tarpas su dviem. Tada pradedant nuo dviejų taškų tarpo taškų seka tokia: N, N, P, N, P, N, P (N – nepasirinktas taškas, o P – pasirinktas). Lieka 7 galimybės: ši seka gali prasidėti bet kuria iš savaitės 7 dienų. Šios galimybės skirtingos, nes dvi gretimos nepasirinktos dienos kaskart vis kitos.

17. (A) 160 cm

! Elenos ūgis yra per vidurį tarp Eligijaus ir Egidijaus ūgio, todėl Elenos, Eligijaus bei Egidijaus ūgių suma lygi trigubam Elenos ūgiui. Visų keturių ūgių suma lygi keturgubam vidurkiui. Todėl ketvirtasis (Ovidijaus) ūgis lygus

$$4 \cdot 178 - 3 \cdot 184 = 4 \cdot 178 - 3 \cdot (178 + 6) = 4 \cdot 178 - 3 \cdot 178 - 3 \cdot 6 = 178 - 18 = 160 \text{ (cm)}.$$

!! Tarkime, Elena yra a cm žemesnė už Eligijų. Tada Eligijaus ūgis yra $184 + a$ cm, Egidijaus ūgis yra $184 - a$ cm, Ovidijaus ūgis yra $(184 - a) - a = 184 - 2a$ (cm). Tada

$$178 = \frac{184 + (184 - a) + (184 + a) + (184 - 2a)}{4} = \frac{4 \cdot 184 - 2a}{4} = 184 - \frac{a}{2}.$$

Gauname $\frac{a}{2} = 6$ ir $a = 12$. Taigi, Ovidijaus ūgis lygus $184 - 2 \cdot 12 = 160$ (cm).

18. (D) 31

? Reikia sužinoti, iš kokių skaičių dalijasi skaičius 882. Tam išskaidykime jį pirminiais daugikliais:

$$882 : 2 = 441, \quad 441 : 3 = 147, \quad 147 : 3 = 49 = 7^2.$$

Taigi $882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Dabar aiškiai matyti, kad šis skaičius dalijasi iš 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14 ir nesidalija iš kitų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 18. Spėliojant, kaip sugrupuoti pirminius daugiklius, kad gautume keturis skirtingus skaičius, galima aptikti, jog $882 = 1 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 14$. Vadinasi, pusseserių amžių suma gali būti lygi $1 + 7 + 9 + 14 = 31$.

! Gavus skaidinį $882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$, galima ir nespėlioti. Nagrinėkime didžiausius pirminius daugiklius – du septynetus. Iš jų turi dalytis pusseserių amžiai. Kadangi $7^2 > 18$, tai bus dvi skirtingos pusseserės. Vieninteliai du natūralieji skaičiai, mažesni už 18 ir dalūs iš 7, yra 7 ir 14. Todėl jie ir bus tų dviejų pusseserių amžiai. Likę du metų skaičiai turi būti sudaryti iš dviejų trejetų, t. y. jų sandauga lygi $3^2 = 9$. Tada tie skaičiai yra 3 ir 3 (netinka, nes skaičiai turi būti skirtingi) arba 1 ir 9. Taigi turime vienintelę galimybę: $7 + 14 + 1 + 9 = 31$.

19. (**D**) 0

? Trūkstamus lentelės skaičius pažymėkime raidėmis (žr. pav.). Imkime $a = b = c = 0$ (galima parinkti ir kitokias reikšmes). Tada bet kurio 2×2 kvadrato skaičių suma turi būti lygi 3. Tuo remdamiesi, baigiame pildyti lentelę: $A = 1$, $B = 2$, $x = 0$.

3	a	1
b	c	B
2	A	x

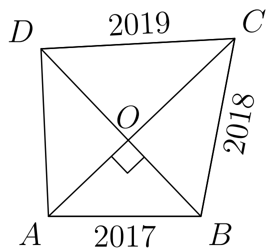
! Kadangi $3 + a + b + c = 1 + a + B + c$ (viršutiniai 2×2 kvadratai; žr. pav.), tai $B = b + 2$. Kadangi $2 + A + b + c = x + A + B + c$ (apatiniai 2×2 kvadratai), tai $x = 2 + b - B = 0$. (Dalyje **?** jau įrodėme, kad reikiamas kvadratas egzistuoja.)

20. (**D**) 15

! Po bet kurio Mikės klaidingo teiginio eina du teisingi, o po bet kurių dviejų teisingų teiginių – klaidingas. Todėl Mikės teisingų ir klaidingų teiginių sekoje klaidingas kas trečias: … T, K, T, T, K, T, T, K, T … Taigi yra trys galimybės, kurie iš šešių duotų Mikės teiginių klaidingi: 1) pirmasis ir ketvirtasis; 2) antrasis ir penktasis; 3) trečiasis ir šeštasis.

Kiekvieną iš atvejų būtų galima patikrinti atskirai, bet verčiau iš karto pastebėkime, kad du teiginiai vienas kitam prieštarauja: skaičius negali būti didesnis už 50 ir mažesnis už 30. Vienas iš teiginių – antrasis arba ketvirtasis – yra klaidingas. Lieka galimybės 1) ir 2), todėl trečiasis ir šeštasis teiginiai teisingi: Mikės dviženklis skaičius lyginis ir turi skaitmenį 7. Šio skaičiaus vienetų skaitmuo lyginis ir nelygus 7. Vadinasi, turime skaičių, kurio vienetų skaitmuo lyginis, o dešimčių skaitmuo yra 7. Belieka patikrinti skaičius 70, 72, 74, 76, 78. Antrasis teiginys teisingas, o ketvirtasis klaidingas, todėl penktasis teiginys teisingas, o pirmasis – ne: skaičius dalijasi iš 3, bet neturi skaitmens 2. Šias savybes turi tik skaičius 78. Jo skaitmenų suma yra $7 + 8 = 15$.

21. (**D**) $\sqrt{2018^2 + 2}$



? Keturkampio įstrižainių sankirtos tašką pažymėkime O. Statiesiems trikampiams OAB, OBC, OCD, ODA pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$OA^2 + OB^2 = 2017^2, \quad OB^2 + OC^2 = 2018^2,$$
$$OC^2 + OD^2 = 2019^2, \quad OD^2 + OA^2 = AD^2.$$

Jei sudėsime pirmąją ir trečiąją lygybes arba antrąją ir ketvirtąją lygybes, kairėje gausime tą patį: $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$. Todėl lygios ir dešiniosios pusės: $2017^2+2019^2 = 2018^2+AD^2$, arba

$$AD^2 = 2017^2 + 2019^2 - 2018^2.$$

Taigi $2017^2 < AD^2 < 2019^2$ ir galime atmesti atsakymus **A** ir **E**, taip pat ir **C**, nes nesunku nuspėti, kad $\sqrt{2020^2 - 4} \approx 2020$. Be to, AD^2 paskutinis skaitmuo sutampa su $7^2 + 9^2 - 8^2$ paskutiniuoju skaitmeniu $9 + 1 - 4 = 6$. Iš likusių atsakymų **B)** $AD^2 = 2018^2 = \ldots 4$ ir **D)** $AD^2 = 2018^2 + 2 = \ldots 6$ tinka **D**.

! Dalyje **?** gautoje lygybėje $AD^2 = 2017^2 + 2019^2 - 2018^2$ vidurinę iš trijų gretimų reikšmių pažymėkime $2018 = a$. Tada

$$AD^2 = (a-1)^2 + (a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a + 1 - a^2 = a^2 + 2.$$

Taigi, $AD = \sqrt{a^2+2} = \sqrt{2018^2+2}$.

22. (E) $\frac{1}{3}$

! Nagrinėkime skaičių poras (a, b), kur a yra kauliuko pirmojo metimo metu atvirtęs skaičius, o b – antrojo metimo metu atvirtęs skaičius. Iš viso tokių galimų porų yra $6 \cdot 6 = 36$, taigi turime 36 baigtis. Svarbu suvokti, kad visos baigtys vienodai galimos. Reikia nustatyti, kelios baigtys yra palankios įvykiui „$ab < 0$“, t. y. kiek yra tokių porų (a, b).

Dviejų skaičių sandauga neigiama tada ir tik tada, kai vienas iš jų neigiamas, o kitas teigiamas. Turime du teigiamus skaičius 1 ir 2 bei tris neigiamus skaičius -3, -2, -1. Todėl yra $2 \cdot 3 = 6$ poros, kur $a > 0$ ir $b < 0$, ir tiek pat porų, kur $a < 0$ ir $b > 0$. Iš viso gavome $6 + 6 = 12$ palankių baigčių. Įvykio tikimybė lygi $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

23. (C) 7

? Imkime $\overline{ab} = 13$ (ar kitą didesnį pirminį skaičių) ir nagrinėkime skaičiaus $n = 131313$ dalumą. Galima remtis dalumo požymiais: paskutinis skaitmuo 3 nelyginis, nelygus 0 nei 5, todėl n nesidalija nei iš 2, nei iš 5. Skaitmenų suma 12 nesidalija iš 9, todėl ir pats skaičius nesidalija iš 9. Yra ir dalumo iš 11 požymis, bet jo nežinant juk galima nepatingėti padalyti n iš 11 kampu: gaunamas dalmuo 11937 ir liekana 6. Taigi bendru atveju skaičius $\overline{ababab}$ iš 2, 5, 9 ir 11 dalijasi nebūtinai. Renkamės likusį atsakymą **C**.

! Galima įrodyti, kad skaičius $\overline{ababab}$ būtinai dalijasi iš 7, kad ir koks bebūtų pradinis skaičius $\overline{ab}$. Norint tai pamatyti, verta skaičiaus $\overline{ababab}$ išraiškoje pradinį skaičių atskirti:

$$\overline{ababab} = \overline{ab0000} + \overline{ab00} + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} =$$

$$= \overline{ab} \cdot (10000 + 100 + 1) = \overline{ab} \cdot 10101.$$

Dabar belieka pastebėti, kad $10101 : 7 = 1443$ ir todėl $\overline{ababab} : 7 = \overline{ab} \cdot 1443$.

24. (E) 13

! Jei kode yra skaitmuo 7, tai jis pasikartoja 7 kartus: 7777777.

Jei kode yra skaitmuo 6, tai jis pasikartoja 6 kartus. Likęs skaitmuo pasikartoja lygiai vieną kartą, todėl tai skaitmuo 1. Gauname kodus 6666661 ir 1666666.

Jei kode yra skaitmuo 5, tai jis pasikartoja 5 kartus. Lieka du skaitmenys, kurie negali būti skirtingi, nes pasikartotų po vieną kartą ir abu būtų lygūs 1. Taigi turime du lygius skaitmenis, o skaitmuo, pasikartojantis lygiai du kartus, tegali būti 2. Gauname kodus 5555522 ir 2255555.

Jei kode yra skaitmuo 4, tai jis pasikartoja 4 kartus ir lieka dar trys skaitmenys. Jie ir vėl negali būti visi skirtingi. Tada arba visi trys skaitmenys lygūs, arba du iš jų lygūs, o trečias kitoks. Pirmu atveju jie lygūs skaitmeniui 3, gauname kodus 4444333 bei 3334444. Antru atveju du lygūs skaitmenys yra dvejetai, o vienas kitoks yra vienetas. Gauname kodus 4444221, 4444122, 2244441, 2214444, 1444422, 1224444.

Tarkime, kad kode nėra skaitmenų 7, 6, 5, 4. Taip pat jame negali būti skaitmenų 8 ir 9 (jie pasikartotų per daug kartų). Tada kode tėra daugiausiai vienas vienetas, du dvejetai ir trys trejetai (ir, žinoma, nė vieno nulio): iš viso daugiausiai $1+2+3=6$ skaitmenys. Gavome prieštarą.

Iš viso gavome $1+2+2+2+6=13$ kodų.

!! Kode negali būti skaitmenų 8, 9 (jie pasikartotų per daug kartų) ir 0 (negali pasikartoti nė karto). Kodą turi sudaryti fragmentai 7777777, 666666, 55555, 4444, 333, 22, 1, panaudoti po daugiausiai vieną kartą.

Pirmasis fragmentas pats vienas sudaro kodą.

Prie antrojo fragmento tegalima prirašyti 1 priekyje arba gale (2 kodai).

Prie trečiojo fragmento prirašius 22 priekyje arba gale, gaunamas pilnas kodas; ilgesnio fragmento prirašyti negalima, o prirašius tik 1, kodas per trumpas (2 kodai).

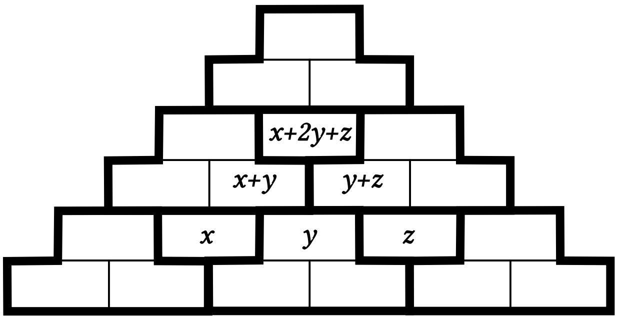
Prie ketvirtojo fragmento 4444 prirašius 333 priekyje arba gale, gaunamas pilnas kodas, o ilgesnio fragmento prirašyti negalima (2 kodai). Naudojant 4444 ir atsisakius 333, būtina panaudoti ir 22, ir 1, kad kode būtų 7 skaitmenys. Iš 3 fragmentų 4444, 22 ir 1 galima sudaryti $3! = 6$ kėlinius (6 kodai).

Nenaudojant nė vieno iš pirmųjų keturių fragmentų, iš likusių trijų fragmentų sudarytas kodas per trumpas.

Iš viso gauname $1+2+2+2+6=13$ kodų.

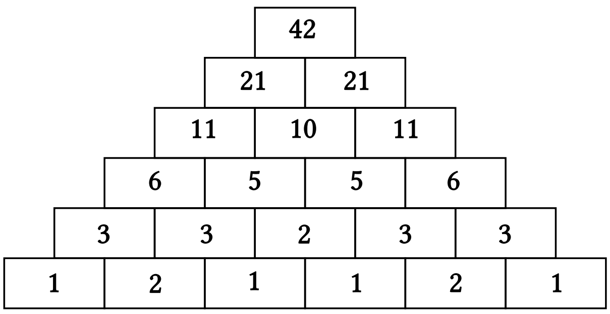
25. (B) 14

! Padalykime piramidę į 6 vienodas trilanges dalis ir tris atliekamus langelius, tris piramidės skaičius pažymėkime x, y, z (žr. pav.). Virš šių trijų skaičių turi būti užrašyti skaičiai $x + y$ ir $y + z$, o virš šių dviejų skaičių – skaičius $(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$.



Nagrinėkime bet kurią trilangę dalį. Trys skaičiai joje negali būti visi nelyginiai: jei jos apačioje yra nelyginiai skaičiai a ir b, tai viršuje užrašytas skaičius $a + b$ yra lyginis. Taigi kiekvienoje iš 6 trilangių dalių yra daugiausiai 2 nelyginiai skaičiai. Vadinasi, visose trilangėse dalyse yra daugiausiai $6 \cdot 2 = 12$ nelyginių skaičių.

Likusiuose trijuose langeliuose turime panašią situaciją. Trys juose esantys skaičiai negali būti visi nelyginiai: jei apačioje skaičiai x ir z nelyginiai, tai viršuje skaičius $x + 2y + z$ lyginis. Taigi vėl turime daugiausiai 2 nelyginius skaičius. Tada visoje piramidėje yra daugiausiai $12 + 2 = 14$ nelyginių skaičių.



Kaip gauti 14 nelyginių skaičių, parodyta paveikslėlyje (svarbus tik skaičių lyginumas apatinėje eilutėje; yra ir kitas būdas, kaip joje parinkti skaičių lyginumą: 1, 1, 2, 1, 1, 2).

26. (E) 143°

? Praleistąjį kampą pažymėkime $x°$, o daugiakampio viršūnių skaičių pažymėkime n. Daugiakampio, turinčio n viršūnių, kampų suma lygi $(n - 2) \cdot 180°$. Jei Arimantas nebūtų pametęs kampo, tai gautų kampų sumą $(n - 2) \cdot 180° = 2017° + x°$.

Taigi $2017 + x$ yra natūralusis skaičius, dalus iš 180. Iš pateiktų atsakymų tinka tik **E)** $x = 143$.

! Dalyje **?** gavome, kad $2017 + x$ yra natūralusis skaičius, dalus iš 180. Kadangi

$$2017 = 1800 + 217 = 180 \cdot 10 + 180 + 37 = 180 \cdot 11 + 37,$$

tai mažiausia galima $2017 + x$ reikšmė yra $180 \cdot 12$ ir tada $x = 180 - 37 = 143$. Jei $2017 + x \geqslant$ $\geqslant 180 \cdot 13$, tai $x \geqslant 143 + 180$. Tačiau kadangi daugiakampis iškilasis, tai $0° < x° < 180°$. Taigi $x° = 143°$ yra vienintelė galima reikšmė.

27. (**B**) 28 cm

? Skriemulių A, B ir C perimetrus atitinkamai pažymėkime P_A cm, P_B cm ir $P_C = 30$ (cm).

Įsivaizdavus, kaip vienu metu sukasi du skriemuliai ir juos jungiantis diržas, galima nujausti, kad diržui sukantis (tiksliau, visiems jo kaip kreivės taškams vienu metu judant) pastoviu duotu (linijiniu) greičiu, tuo pačiu (linijiniu) greičiu judės ir kiekvieno skriemulio kraštas (visi jo taškai vienu metu). Todėl skriemulio pilno apsisukimo laikas yra proporcingas skriemulio perimetrui: kuo didesnis perimetras, tuo ilgiau jo krašto taškas keliauja ratu ir tuo mažiau kartų spėja apsisukti skriemulys per duotą laiką.

Taigi, jei diržu sujungtų skriemulių B ir C apsisukimų per tam tikrą laiką santykis yra $6 : 7$, tai jų perimetrų santykis yra atvirkščias: $P_B : P_C = 7 : 6$. Analogiškai $P_A : P_B = 4 : 5$. Tada $P_B = 7P_C : 6 = 7 \cdot 30 : 6 = 35$ (cm) ir $P_A = 4P_B : 5 = 4 \cdot 35 : 5 = 28$ (cm).

! Skriemulio kraštą ir prie to krašto priglundantį diržą galima matematiškai interpretuoti kaip iš dalies sutampančias kreives, kuriomis ratu juda taškai. Visą laiką dalis diržo taškų sutampa su skriemulio krašto taškais ir juda kartu su jais. Tokių taškų per bet kokį laiką, kurio metu jie sutampa, nueinami atstumai yra vienodi. Todėl ir visų skriemulio krašto bei diržo taškų per tą laiką nueinami atstumai yra vienodi. Ši savybė galioja bet kuriam pakankamai trumpam laiko tarpui (galima rasti per visą laiką sutampančius diržo ir skriemulio krašto taškus). Tačiau tada ji galioja bet kokiam laiko tarpui, nes jį galima padalyti į pakankamai trumpus.

Skriemulių A ir B perimetrus atitinkamai pažymėkime P_A cm ir P_B cm.

Kol skriemulys apsisuka vieną kartą, bet kuris jo krašto taškas nueina atstumą, lygų skriemulio perimetrui, todėl ir bet kuris skriemulį juosiančio diržo taškas nueina atstumą, lygų skriemulio perimetrui.

Vadinasi, kai C apsisuka 7 kartus, o B apsisuka 6 kartus, tai tuo metu B ir C jungiantis diržas (visi jo taškai) pasisuka per $7 \cdot 30$ cm arba per $6P_B$ cm. Taigi $6P_B = 7 \cdot 30$ ir $P_B =$ $= 35$ (cm). Analogiškai nagrinėdami skriemulius A ir B, gauname, kad $5P_A = 4P_B$. Todėl $P_A = 4P_B : 5 = 4 \cdot 35 : 5 = 28$ (cm).

28. (**A**) Tik a arba g

? Galime palengvinti uždavinį ir iš kiekvieno iš skaičių a, b, c, d, e, f, g atimti po 286, taip iš sekos su suma 2017 gaunant sveikųjų skaičių seką $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0$ su suma $2017 - 286 \cdot 7 = 15$. Gretimi skaičiai vėl skiriasi vienetu.

Imkime $a = 286$ ir $a_0 = 0$. Nagrinėkime paprasčiausią seką 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jos narių suma yra 21, o ne 15, todėl mažinkime didžiausius narius. Su seka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4 jau gauname sumą 19, su seka 0, 1, 2, 3, 4, 3, 4 – sumą 17, o su seka 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 – sumą 15, kurios mums ir reikia. Vėl pridėję prie sekos narių po 286, gausime seką 286, 287, 288, 289, 290, 289, 288, tenkinančią sąlygą.

Lieka atsakymai **A** ir **E**. Kad atmestume **E**, patikrinkime, pavyzdžiui, atvejį $c = 286$ ir $c_0 = 0$. Net parinkdami didžiausias galimas skaičių reikšmes

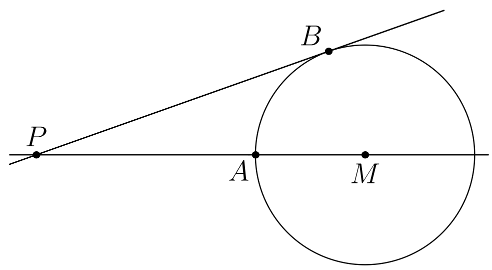
$$b_0 = d_0 = 1, \quad a_0 = e_0 = 2, \quad f_0 = 3, \quad g_0 = 4,$$

gausime sumą $13 < 15$. Taigi $c \neq 286$ (ir analogiškai $e \neq 286$), todėl mums lieka atsakymas **A**.

?? Bet kurie du gretimi skaičiai skiriasi vienetu, todėl vienas iš jų lyginis (L), o kitas nelyginis (N). Tada duotoje sekoje kas antras skaičius nelyginis: turime arba seką N, L, N, L, N, L, N, arba seką L, N, L, N, L, N, L. Pirmuoju atveju 4 nelyginių ir 3 lyginių skaičių suma būtų lyginė, taigi nelygi 2017. Vadinasi, skaičiai b, d ir f yra nelyginiai, jie negali būti lygūs 286. Lieka atsakymai **A** ir **C**. Pastarąjį galima atmesti, kaip **?** dalyje įrodant, jog $c \neq 286$.

! Kad $c, e \neq 286$, įrodėme **?** dalyje, o kad $b, d, f \neq 286$, įrodėme **??** dalyje. Be to, **?** dalyje radome pavyzdį su $a = 286$. Jei šio pavyzdžio skaičius užrašysime atbula tvarka, gausime pavyzdį su $g = 286$.

29. (**D**) 6



! Skaičiai $a = PA$ ir $b = MB$ sveikieji. Apskritimo spindulys MB statmenas liestinei PB ir lygus kitam spinduliui AM. Trikampis PBM statusis ir jam galime pritaikyti Pitagoro teoremą:

$$BP^2+BM^2 = PM^2 = (PA+AM)^2 = (PA+MB)^2,$$

$$(PA+6)^2+MB^2 = (PA+MB)^2, \qquad (a+6)^2+b^2 = (a+b)^2.$$

Suprastinkime ir gaukime ekvivalenčią paprastesnę lygybę:

$$a^2 + 12a + 36 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad 12a + 36 = 2ab,$$

$$6a + 18 = ab, \qquad a(b - 6) = 18.$$

Skaičius $a > 0$ yra skaičiaus 18 daliklis: $a = 1, 2, 3, 6, 9$ arba 18. Atitinkamai $b = 24, 15, 12, 9, 8$ arba 7.

Nėra visai akivaizdu, kad visi 6 atvejai galimi. Kiekvienu iš jų galioja $a(b-6)=18$, todėl ir ekvivalenti lygybė $(a+6)^2+b^2=(a+b)^2$. Pagal Pitagoro teoremą egzistuoja statusis trikampis PBM su kraštinių ilgiais $PB=a+6$, $MB=b$ ir $PM=a+b$. Įžambinę PM galima tašku A padalyti į atkarpas, kurių ilgiai yra $a=PA$ ir $b=AM=MB$. Tada apskritimas su centru M bei spinduliu MB eina per A; jis liečia tiesę PB, nes $\angle PBM=90°$. Gavome uždavinio situaciją. Taigi MB gali įgyti visas šešias rastas skaičiaus b reikšmes.

30. (A) 10

! Nagrinėkime mergaičių padėtis tuo metu, kai jos suplojo pirmą kartą. Mergaitę žymėkime raide K, jei ji pasisukusi į kairę, ir raide D, jei į dešinę. Žiūrėdami į ratelį iš viršaus ir eidami pagal laikrodžio rodyklę, nagrinėkime gretimų mergaičių poras. Kombinacijos DD ir KK reiškia, kad mergaitės žvelgia į tą pačią pusę. Kombinacija DK reiškia, kad mergaitės stovi nusigręžusios viena nuo kitos. Kombinacija KD reiškia, kad mergaitės atsigręžusios viena į kitą. Būtent jos ir suplojo delnais, todėl poroms KD priklauso 10 mergaičių.

Dabar eidami pagal laikrodžio rodyklę nagrinėkime tik poras DK ir KD, nekreipdami dėmesio į KK ir DD. Po poros DK būtinai eina KD, o po KD būtinai eina DK. Vadinasi, porų DK ir KD yra po lygiai (ir jokia mergaitė negali priklausyti dviem skirtingoms poroms KD arba dviem skirtingoms poroms DK). Todėl poroms DK, kaip ir poroms KD, priklauso 10 mergaičių.

Mergaitėms nusigręžus į priešingą pusę, jas vėl analogiškai galime pažymėti raidėmis K ir D, tik dabar kiekvieną raidę turime pakeisti kita. Suplojo mergaitės, sudarančios poras KD, t. y. tos, kurios prieš nusigręžimą sudarė poras DK. Vadinasi, suplojusių mergaičių ir vėl yra 10.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	E
3	B
4	C
5	E
6	C
7	E
8	C
9	A
10	C
11	C
12	E
13	D
14	C
15	B
16	B
17	A
18	D
19	D
20	D
21	D
22	E
23	C
24	E
25	B
26	E
27	B
28	A
29	D
30	A