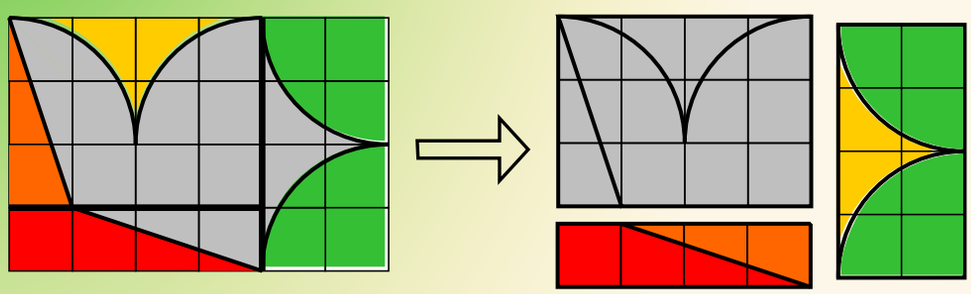
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA
Kadetas



Užduotys ir sprendimai

2018

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2018. Kadetas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Ugnė Šiurienė

© Aivaras Novikas, 2018
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2018

Turinys

Pratarmė **4**

Dalyvio kortelės pavyzdys **6**

Sąlygos **7**

Užduočių sprendimai **11**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 45000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2018 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2018 metų kovo 15 dieną keliavo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25 % uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2018

2018 m. *Kadeto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

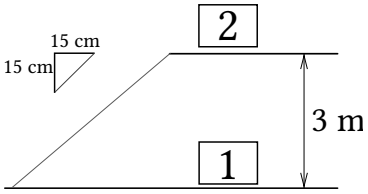
1. $(20 + 18 + 20 + 18) : (20 - 18 + 20 - 18) =$
A) 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 34 **E)** 36

2. Kai žodis MAMA užrašytas iš viršaus į apačią, jis turi vertikalią simetrijos ašį. Kuris žodis taip pat pasižymi šia savybe?
A) TETA **B)** DAMA **C)** BAMBA **D)** NOSIS **E)** ATOMAI

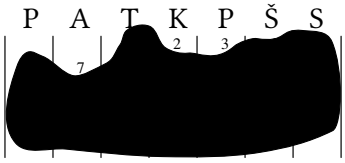
3. Kvadrato perimetras lygus stačiakampio su kraštinėmis 8 ir 12 perimetrui. Kam lygi kvadrato kraštinė?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

4. Kokį skaičių reiškia $\star$, jei lygybė $2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot \star \cdot 7$ yra teisinga?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

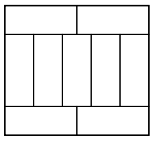
5. Laiptai veda iš mokyklos pirmojo aukšto į antrąjį. Kiekvieno laiptelio aukštis ir plotis yra po 15 cm. Kiek laiptelių sudaro laiptus, jei antrasis aukštas yra 3 metrais aukščiau už pirmąjį?
A) 8 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25



6. Vieno metų mėnesio kalendorius užpiltas rašalu (žr. pav.). Kuri savaitės diena yra to mėnesio 27-oji diena?
A) Pirmadienis **B)** Trečiadienis **C)** Ketvirtadienis
D) Šeštadienis **E)** Sekmadienis

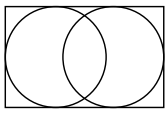


7. Stačiakampis sudarytas iš devynių vienodų stačiakampėlių, kaip parodyta paveikslėlyje. Stačiakampėlio ilgosios kraštinės ilgis yra 10. Koks yra didžiojo stačiakampio perimetras?
A) 40 **B)** 48 **C)** 76 **D)** 81 **E)** 90



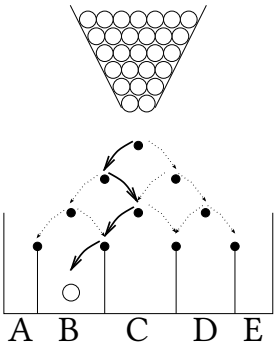
8. Kai Toras suduoda savo kūju į bet kokią uolą, ji skyla į lygiai penkias mažesnes uolas. Sykį Toras aptiko septynias stūksančias uolas. Kiek uolų, stūksančių toje vietoje, galėjo palikti Toras, smogęs kūju kelis kartus?
A) 17 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 23 **E)** 25

9. Paveikslėlyje pavaizduotas 7×11 stačiakampis ir du apskritimai, liečiantys jo kraštines. Koks yra atstumas tarp apskritimų centrų?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



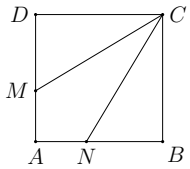
10. Dėžėje guli 65 rutuliai, iš kurių 8 yra balti, o likę – juodi. Tomas užrištomis akimis traukia rutulius iš dėžės. Vienu sykiu iš dėžės jis gali ištraukti daugiausiai 5 rutulius. Kiek mažiausiai kartų jis turi traukti rutulius iš dėžės, kad būtų tikras, jog ištraukė bent vieną baltą rutulį?
A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

Klausimai po 4 taškus



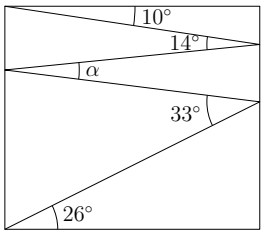
11. Kai iš viršaus paleistas rutuliukas atsitrenkia į vieną iš atsikišusių kuolelių, jis toliau krinta viena iš dviejų krypčių. Paveikslėlyje parodyta viena iš galimų rutuliuko trajektorijų. Kiek yra skirtingų trajektorijų, kuriomis rutuliukas gali nukristi į skyrelį B?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

12. Stačiakampę lentelę sudaro 40 vienetinių langelių. Joje yra daugiau nei viena eilutė. Andrius nuspalvino visas lentelės eilutes, išskyrus viduriniąją. Kiek langelių jis nuspalvino?
A) 20 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 35 **E)** 39



13. Atkarpos CM ir CN dalija kvadratą $ABCD$ į tris lygiaplotes sritis (žr. pav.). Koks yra atkarpos DM ilgis, jei kvadrato kraštinės ilgis yra 3?
A) $\frac{7}{4}$ **B)** $\frac{9}{4}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** 2

14. Viename iš trijų urvų paslėptas lobis, o kiti du urvai yra spąstai. Virš pirmojo urvo užrašyta: „Manyje yra lobis“, virš antrojo: „Manyje nėra lobio“, virš trečiojo: „$2 + 3 = 2 \times 3$“. Lygiai vienas užrašas yra teisingas. Kuriame urve yra lobis?
A) Pirmajame **B)** Antrajame **C)** Trečiajame **D)** Bet kuriame iš trijų
E) Pirmajame arba antrajame

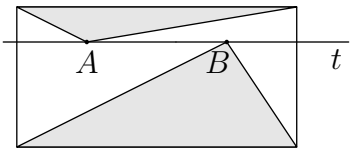


15. Stačiakampyje nubrėžta laužtė. Jos atkarpos sudaro kampus, parodytus paveikslėlyje. Raskite α.
A) 11° **B)** 12° **C)** 16° **D)** 17° **E)** 33°

16. Alvyda užrašė kelis pirminius skaičius, mažesnius nei 100. Skaitmenis $1, 2, 3, 4$ ir 5 ji panaudojo lygiai po vieną kartą, o kitų skaitmenų nenaudojo iš viso. Kurį skaičių Alvyda užrašė garantuotai?
A) 2 **B)** 5 **C)** 31 **D)** 41 **E)** 53

17. Morta sudaugino du dviženklius skaičius, o jos broliukas tris skaitmenis užtepliojo: $\blacksquare 3 \times 2 \blacksquare = 3 \blacksquare 2$. Kokia yra užtepliotųjų skaitmenų suma?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 14

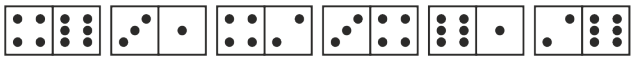
18. Stačiakampį kerta tiesė t, lygiagreti su stačiakampio kraštinėmis (žr. pav.). Nuspalvintų trikampių plotų suma yra 10. Kam lygus stačiakampio plotas?



A) 18 **B)** 20 **C)** 22 **D)** 24
E) Tai priklauso nuo taškų A ir B padėties

19. Laima, Moira ir Fortūnatas išėjo apsipirkti. Parduotuvėje Moira išleido tik 15% to, kiek išleido Fortūnatas, o Laima išleido 60% daugiau nei jis. Kartu jie išleido 55 eurus. Kiek pinigų išleido Laima?
A) 3 EUR **B)** 20 EUR **C)** 25 EUR **D)** 26 EUR **E)** 32 EUR

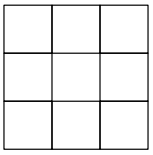
20. Domino kauliukai sudėti teisingai, kai gretimi kauliukai suglausti langeliais, turinčiais po tiek pat akučių. Paulius padėjo 6 kauliukus, kaip parodyta paveikslėlyje. Vienu ėjimu leidžiama arba sukeisti bet kuriuos du kauliukus vietomis (jų neapsukant), arba apsukti bet kurį vieną kauliuką. Kiek mažiausiai ėjimų reikia Pauliaus kauliukams sudėti teisingai?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** To neįmanoma padaryti

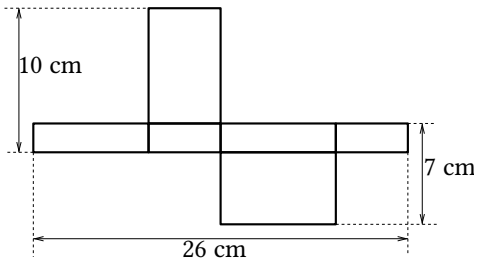
Klausimai po 5 taškus

21. Jokūbas surašė skaičius 1, 2, …, 9 į lentelę 3×3 (po skaičių į langelį). Tada jis apskaičiavo kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą. Penki iš šešių gautųjų skaičių didėjimo tvarka lygūs 12, 13, 15, 16 ir 17. Koks yra šeštasis Jokūbo gautas skaičius?



A) 17 **B)** 16 **C)** 15 **D)** 14 **E)** 13

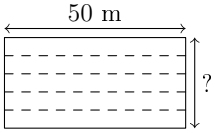
22. Paveikslėlyje pavaizduota stačiakampės dėžės išklotinė. Koks yra dėžės tūris?



A) 43 cm^3 **B)** 70 cm^3 **C)** 80 cm^3
D) 100 cm^3 **E)** 1820 cm^3

23. Tiesėje iš kairės į dešinę pažymėta 11 taškų. Pirmojo taško atstumų iki likusių taškų suma lygi 2018. Antrojo taško atstumų iki likusių taškų (įskaitant pirmąjį) suma lygi 2000. Koks yra atstumas tarp pirmojo ir antrojo taškų?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

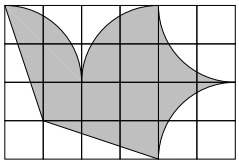
24. Simonas ir Jonas surengė lenktynes. Simonas bėga aplink baseiną, o Jonas plaukia baseino taku, kurio ilgis yra 50 m. Simonas bėga trigubai greičiau, nei Jonas plaukia. Kol Jonas nuplaukė baseino 6 ilgius, Simonas apibėgo jį 5 kartus. Koks yra baseino plotis?



A) 25 m **B)** 40 m **C)** 50 m **D)** 80 m **E)** 180 m

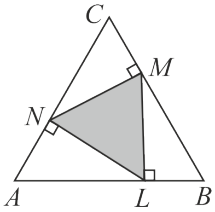
25. Krosnies saloje bent 350 dienų metuose būna saulėtos. Senis Besmegenis nori, kad šiemet jo apsilankymo saloje metu būtų bent dvi saulėtos dienos iš eilės. Kiek mažiausiai dienų turėtų sudaryti Besmegenio planuojamas atostogas saloje, kad jo noras būtinai išsipildytų?
A) 17 **B)** 18 **C)** 31 **D)** 32 **E)** 35

26. Karvelidės vėliavoje pavaizduoto „balandžio“ plotas yra 192 cm^2 (žr. pav.). „Balandžio“ kontūrą sudaro tiesių atkarpos ir apskritimų ketvirčiai, jungiantys kvadratinių langelių viršūnes. Kokie yra vėliavos matmenys?



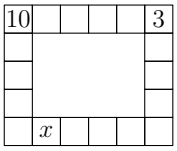
A) 15 cm × 10 cm **B)** 18 cm × 12 cm **C)** 20 cm × 12 cm
D) 24 cm × 16 cm **E)** 27 cm × 18 cm

27. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėse pažymėti tokie taškai N, M, L, kad $NM \perp BC$, $ML \perp AB$ ir $LN \perp AC$ (žr. pav.). Trikampio ABC plotas yra 36. Kam lygus trikampio LMN plotas?



A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

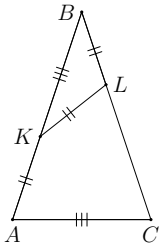
28. Zita nori į 5×6 lentelės kraštinius langelius įrašyti po skaičių, kad kiekvienas skaičius būtų lygus dviejų jam gretimų skaičių sumai. Du skaičiai jau įrašyti (žr. pav.). Kokį skaičių Zita turi įrašyti vietoj x? (Skaičiai gretimi, kai jų langeliai turi bendrą kraštinę.)



A) 7 **B)** 10 **C)** 13 **D)** -13 **E)** -3

29. Julijos šuolių į tolį dienos rezultatų vidurkis buvo lygus 3,80 m. Julija šoko darsyk ir nušoko 3,99 m. Tada jos rezultatų vidurkis pakilo iki 3,81 m. Kiek Julija turi nušokti dar vienu šuoliu, kad vidurkis pakiltų iki 3,82 m?
A) 3,97 m **B)** 4,00 m **C)** 4,01 m **D)** 4,03 m **E)** 4,04 m

30. Lygiašonio trikampio ABC šoninėse kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai K ir L, kad $AK = KL = LB$ ir $KB = AC$. Kam lygus kampas ABC?



A) 30° **B)** 35° **C)** 36° **D)** 40° **E)** 44°

Kadeto užduočių sprendimai

1. (B) 19

! Skaičiavimai, nors ir šiaip paprasti, dar sutrumpės, jei pasinaudosime reiškinio dėsningumais:

$$(20+18+20+18):(20-18+20-18)=\frac{2\cdot(20+18)}{2\cdot(20-18)}=$$

$$=\frac{20+18}{20-18}=(20+18):2=19.$$

2. (E) ATOMAI

! Kad vertikaliai užrašytas žodis turėtų vertikalią simetrijos ašį, pačios raidės turi ją turėti. Pavyzdžiui, raidės A ir M, sudarančios žodį MAMA. Tokios yra ir raidės T, O, I, esančios žodyje ATOMAI. Todėl šis žodis tenkina sąlygą (žr. pav.).

Raidės B, D, E, N ir S taip pat pasižymi simetrija, tačiau kitokia. Raidės B, D, E turi horizontalią simetrijos ašį, o raidės N, S simetriškos ne tiesės, bet taško atžvilgiu. Todėl atsakymai **A**-**D** netinka.

3. (E) 10

! Jei kvadrato kraštinė lygi x, tai kvadrato perimetras $4x$ lygus stačiakampio perimetrui $2\cdot 8+$ $+2\cdot 12=40$. Todėl $x=40:4=10$.

4. (D) 12

? Skaičius $2\cdot 18\cdot 14$ baigiasi tuo pačiu skaitmeniu, kaip ir skaičius $2\cdot 8\cdot 4$, t. y. skaitmeniu 4. Skaičius $6\cdot\star\cdot 7=42\cdot\star$ baigiasi tuo pačiu skaitmeniu, kaip ir skaičius $2\cdot\star$. Pažvelkime į pateiktus atsakymus: skaičius $2\cdot\star$ baigiasi skaitmeniu 4, tik jei $\star=12$.

Renkamės atsakymą **D**.

! Žinoma, $\star=2\cdot 18\cdot 14:6:7$. Būtų galima stulpeliu sudauginti tris skaičius, o tada sandaugą kampu dalyti iš likusių dviejų, bet paprasčiau kitaip pertvarkyti reiškinį:

$$\star=2\cdot(18:6)\cdot(14:7)=2\cdot 3\cdot 2=12.$$

5. (D) 20

! Sprendžiant šį uždavinį, reikia susitelkti vien ties namo aukštų, laiptų bei laiptelių aukščiais ir atmesti nereikalingą informaciją apie laiptelių plotį.

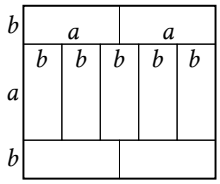
Laiptų aukštis, viena vertus, yra visų laiptelių aukščių suma $15 + 15 + \ldots + 15$ cm, o kita vertus, jis lygus dviejų aukštų aukščių skirtumui 3 m = 300 cm. Todėl jei laiptelių yra n, tai $15n = 300$ ir $n = 300 : 15 = 30 \cdot 10 : 15 = 30 : 15 \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20$.

6. (A) Pirmadienis

! Kalendoriuje matome, kad 2-oji diena yra ketvirtadienis, 3-ioji – penktadienis, 7-oji – antradienis. Galima pradėti skaičiuoti savaitės dienas nuo tų, kurios žinomos. Bet dar greičiau pasieksime tikslą, jei pradėsime nuo 27-osios dienos. Savaitės dienos kartojasi kas 7 dienas, todėl 27-oji diena yra ta pati savaitės diena, kaip ir $27-7 = 20$-oji, $20-7 = 13$-oji, $13-7 = 6$-oji. Jei 7-oji diena yra antradienis, tai 6-oji, o kartu ir 27-oji dienos yra pirmadieniai.

7. (C) 76

! Lengva pastebėti, kad dvi ilgosios stačiakampėlio kraštinės lygios penkioms trumposioms (žr. pav.). Todėl jei kraštinių ilgiai yra $a = 10$ ir b, tai $5b = 2a = 20$ ir $b = 4$. Didžiojo stačiakampio ilgis yra $a + a = 20$, o plotis yra $b+a+b = 18$. Todėl stačiakampio perimetras lygus $2\cdot 20+2\cdot 18 = 76$.

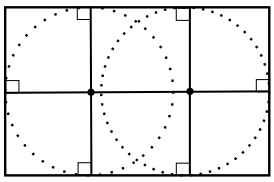


8. (D) 23

! Kokia tvarka Toras daužys uolas, nėra svarbu. O svarbu yra, kad suskilus bet kuriai uolai, vietoj vienos atsiranda penkios, todėl bendras uolų skaičius kaskart padidėja $5 - 1 = 4$. Po pirmojo smūgio uolų bus $7 + 4 = 11$, tada iš eilės $11 + 4 = 15$, $15 + 4 = 19$, $19 + 4 = 23$, $23 + 4 = 27, \ldots$ Matome, kad iš pateiktų atsakymų galimas lygiai vienas: 23. Tiek uolų galėjo rastis po bet kokių keturių Toro smūgių.

9. (D) 4

! Ieškomą atstumą pažymėkime a. Brėžinyje pažymėkime apskritimų centrus ir iš jų išveskime statmenis į stačiakampio kraštines (žr. pav.). Stačiakampio plotis 7 lygus tiek vieno, tiek kito apskritimo skersmeniui. Todėl apskritimų spindulys lygus $7 : 2 = 3{,}5$. Apskritimų centrai (skersmenų vidurio taškai) yra per vidurį tarp ilgųjų stačiakampio kraštinių, todėl juos jungianti atkarpa ir horizontalūs statmenys sudaro vieną atkarpą, kurios ilgis yra 11. Kita vertus, šis ilgis lygus $3{,}5+a+3{,}5 = 7+a$. Todėl $a = 11 - 7 = 4$.



!! Vertikalūs apskritimų skersmenys (žr. **!** dalį) dalija stačiakampį į tris mažesnius. Jei vidurinį iš jų išmesime, o likusius du suglausime, tai du likę pusapskritimiai sudarys vieną apskritimą, liečiantį visas keturias naujojo stačiakampio kraštines. Naujasis stačiakampis yra kvadratas. Jo plotis nepasikeitė ir lygus 7, todėl naujasis ilgis yra 7, o išmestos vidurinės dalies ilgis yra $11 - 7 = 4$. Jis ir yra lygus atstumui tarp apskritimų centrų.

10. (B) 12

! Jei Tomas rutulius trauks 11 ar mažiau kartų, tai ištrauks daugiausiai $11 \cdot 5 = 55$ rutulius, o dėžėje liks $65 - 55 = 10$ rutulių, tarp kurių galbūt bus visi 8 balti. Todėl 11 traukimų nepakanka.

Jei Tomas 12 kartų trauks po 5 rutulius, tai ištrauks $12 \cdot 5 = 60$ rutulių, o dėžėje liks $65 - 60 = 5$ rutuliai. Vadinasi, mažiausiai $8 - 5 = 3$ balti rutuliai bus ištraukti. Todėl 12 traukimų pakanka.

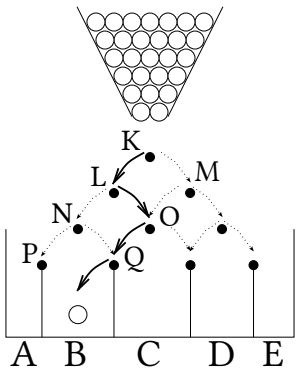
11. (C) 4

! Pažymėkime kuolelius, kaip parodyta paveikslėlyje. Patogu skaičiuoti trajektorijas, pradedant ne nuo kuolelio K, o nuo skyrelio B. Į B rutuliukas gali pakliūti, atsitrenkęs nuo P arba Q.

Į P rutuliukas gali atsitrenkti tik nuo N, į N – tik nuo L, į L – tik nuo K. Gauname vienintelę trajektoriją K-L-N-P-B.

Į Q rutuliukas gali atsitrenkti nuo N arba O. Į N – tik nuo L, o į L – tik nuo K. Gauname vieną trajektoriją K-L-N-Q-B. Į kuolelį O rutuliukas gali atsitrenkti nuo L arba M, o į šiuos kuolelius – tik nuo K. Gauname dar dvi trajektorijas K-L-O-Q-B ir K-M-O-Q-B.

Iš viso gavome 4 trajektorijas.



!! Kadangi atsitrenkęs į kuolelį rutuliukas krinta viena iš dviejų krypčių, tai iki kuolelių L ir M (žr. **!** dalies pav.) jis gali kristi dviem trajektorijomis, iki žemesnių kuolelių jau yra $2 \cdot 2 = 4$ trajektorijos, o iki apatinių kuolelių – $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ trajektorijos. Dėl simetrijos lygiai pusė jų veda link P ir Q. Visos šios 4 trajektorijos gali vieninteliu būdu užsibaigti skyrelyje B, o likusios 4 trajektorijos tegali užsibaigti skyreliuose C, D ir E.

Iš viso gavome 4 tinkamas trajektorijas.

12. (C) 32

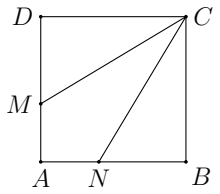
? Kadangi lentelė turi vieną vidurinę eilutę, tai eilučių skaičius yra nelyginis. Jei turime lentelę $m \times n$, tai $mn = 40$, eilučių skaičius m nelyginis ir $m > 1$. Tinka nelyginis skaičiaus 40 daliklis $m = 5$. Tada $n = 8$ ir eilutėse, įskaitant viduriniąją, yra po 8 langelius. Tokiu atveju Andrius nenuspalvino 8 langelių, o $40 - 8 = 32$ langelius nuspalvino.

Renkamės atsakymą **C**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, turime įrodyti, kad 5 yra vienintelė galima m reikšmė.

m turi būti nelyginis skaičiaus 40 daliklis, didesnis už 1. Iš skaičiaus 40 skaidinio pirminiais daugikliais $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ aišku, kad visi skaičiaus 40 dalikliai, didesni už 1, yra patys pirminiai daugikliai 2 ir 5 bei visos įmanomos sandaugos, gaunamos dauginant kuriuos nors iš skaičių 2, 2, 2 ir 5. Visi šie dalikliai, išskyrus 5, gaunami panaudojant dvejetą, todėl lyginiai. Vadinasi, vienintelė galima m reikšmė yra 5, o gautasis atsakymas 32 yra vienintelis teisingas.

13. (E) 2



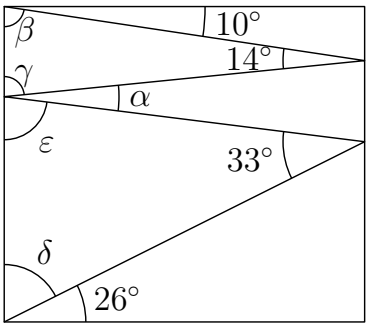
? Galima spėti, kad brėžinys simetriškas kvadrato įstrižainės AC atžvilgiu. Tada trikampio ACM plotas S_1 lygus pusei keturkampio $AMCN$ ploto ir todėl pusei trikampio CDM ploto S_2. Trikampiai ACM ir CDM turi bendrą aukštinę CD, todėl jų plotų santykis lygus pagrindų, į kuriuos nuleista aukštinė, santykiui: $DM : MA = S_2 : S_1 = 2$. Vadinasi, jei kraštinę DA padalysime į tris lygias dalis, tai dvi iš jų sudarys DM. Tada $DM = \frac{2}{3} \cdot DA = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

! Kvadrato plotas yra $3 \cdot 3 = 9$. Stačiojo trikampio CDM plotas S lygus trečdaliui kvadrato ploto $9 : 3 = 3$. Kita vertus, $S = \frac{DC \cdot DM}{2} = \frac{3DM}{2}$. Todėl $\frac{3DM}{2} = 3$ ir $DM = 2$.

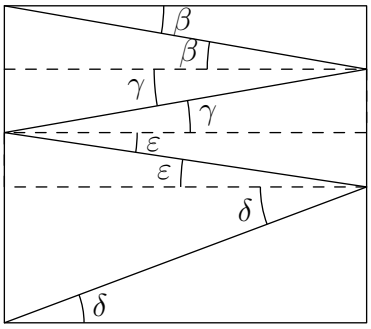
14. (C) Trečiajame

! Kadangi $2 + 3 \neq 2 \times 3$, tai lygiai vienas iš pirmųjų dviejų užrašų teisingas. Bet jei teisingas pirmasis užrašas (lobis yra pirmajame urve), tai teisingas ir antrasis (lobio antrajame urve nėra). Todėl teisingas turi būti antrasis užrašas (lobio antrajame urve nėra), o pirmasis tada klaidingas (lobio nėra ir pirmajame urve). Vadinasi, lobis turi būti trečiajame urve. Iš tiesų, jei taip yra, tai antrasis užrašas teisingas, o kiti du klaidingi.

15. (A) $11°$



! Pažymėkime kampus, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada $\beta = 90° - 10° = 80°$ ir $\gamma = 180° - \beta - 14° = 86°$. Analogiškai $\delta = 90° - 26° = 64°$ ir $\varepsilon = 180° - \delta - 33° = 83°$. Kampai α, γ ir ε sudaro ištiestinį kampą, todėl $\alpha = 180° - \gamma - \varepsilon = 11°$.



!! Nubrėžkime tris atkarpas, lygiagrečias su stačiakampio kraštinėmis, ir pažymėkime lygius priešinius kampus, kaip parodyta paveikslėlyje. Iš pradinio brėžinio žinome, kad $\beta = 10°$, $\beta + \gamma = 14°$, $\delta = 26°$, $\delta + \varepsilon = 33°$ ir $\gamma + \varepsilon = \alpha$. Todėl $\gamma = 14° - 10° = 4°$, $\varepsilon = 33° - 26° = 7°$ ir $\alpha = 4° + 7° = 11°$.

!!! Nagrinėkime tiesę, kuriai priklauso viršutinė stačiakampio kraštinė. Pasukę ją apie tašką (stačiakampio viršūnę) $10°$ kampu pagal laikrodžio rodyklę, gausime tiesę, kuriai priklauso viršutinė laužtės atkarpa. Toliau pasukus tiesę apie kitą tašką $14°$ kampu prieš laikrodžio rodyklę, tiesei jau priklausys antroji laužtės atkarpa. Toliau sukame tiesę kampu α pagal laikrodžio rodyklę, $33°$ kampu prieš laikrodžio rodyklę, $26°$ kampu pagal laikrodžio rodyklę taip, kad tiesei priklausytų iš eilės kiekviena laužtės atkarpa, o galop – apatinė stačiakampio kraštinė.

Tiesę pastūmėme, bet nekreipkime dėmesio į jos tikslią padėtį, o vien į posvyrį, kuris priklauso tik nuo to, kokiu kampu sukome. Iš viso pasukome tiesę $10° - 14° + \alpha - 33° + 26° = \alpha - 11°$ kampu pagal laikrožio rodyklę ir gavome lygiagrečią tiesės padėtį, lyg jos nebūtume sukę apskritai. Taip gali nutikti, tik jei tiesė pasukta $0°, 180°, 360°, \ldots$ kampu. Kadangi $0° < \alpha < 180°$, tai $\alpha - 11° = 0°$ ir $\alpha = 11°$.

16. (D) 41

? Pabandžius kurti pirminius skaičius iš duotųjų skaitmenų, nėra sunku atspėti, kad Alvyda galėjo užrašyti skaičius 41, 2, 53 arba 41, 5, 23. Bet kurio iš šių sąrašų radimas leidžia atmesti dalį pateiktų atsakymų, o jie abu parodo, kad bet kurio iš skaičių **A)** 2, **B)** 5, **C)** 31 ir **E)** 53 Alvyda galėjo neužrašyti.

Renkamės atsakymą **D**.

! Skaičiai 1 ir 4 nėra pirminiai, todėl Alvyda skaitmenis 1 ir 4 galėjo panaudoti tik dviženkliams pirminiams skaičiams užrašyti. Ji negalėjo sudaryti pirminio skaičiaus, panaudodama vieną iš skaitmenų 1 ir 4 bei vieną iš skaitmenų 2 ir 5: tokio skaičiaus skaitmenų suma $1+2$, $1+5$, $4+2$ arba $4+5$ dalytųsi iš 3, todėl pats skaičius dalytųsi iš 3 (dalumo iš 3 požymis) ir nebūtų pirminis. Tada skaitmuo 1 tegali būti viename skaičiuje su skaitmeniu 4 arba 3, o skaitmuo 4 – su skaitmeniu 1 arba 3. Jei skaitmuo 1 yra su skaitmeniu 3, tai skaitmuo 4 lieka iš viso be poros. Todėl skaitmuo 1 sudaro pirminį skaičių su skaitmeniu 4. Kadangi 14 nėra pirminis skaičius, tai Alvydos sąraše privalo būti skaičius 41.

Beje, dabar jau lengva patikrinti, kad **?** dalyje išvardytos visos galimybės, kokius skaičius galėjo užrašyti Alvyda. Jų tėra dvi, o 41 yra vienintelis skaičius, esantis abiejuose sąrašuose.

17. (A) 6

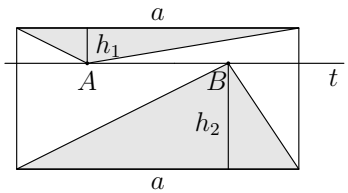
! Turime rasti $a+b+c$, kai $\overline{a3}\cdot\overline{2b}=\overline{3c2}$. Pastebėkime, kad skaitmuo a negali būti didelis. Jei $a\geqslant 2$, tai $\overline{a3}\cdot\overline{2b}\geqslant 23\cdot 20>20^2=400>\overline{3c2}$. Todėl $a=1$.

Sandaugos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutinių skaitmenų, todėl sandauga $3\cdot b$ turi baigtis skaitmeniu 2. Prisiminus daugybos lentelę, galima greitai patikrinti, kad taip bus vieninteliu atveju: kai $b=4$.

Radus tik a arba b, galima samprotauti ir kitaip. Pavyzdžiui, radus b, ieškoti tokio c, kad $\overline{3c2}$ dalytųsi iš 24. Bet kai nustatėme ir a, ir b, belieka apskaičiuoti $\overline{3c2}=13\cdot 24=$ $=24\cdot(10+3)=24\cdot 10+24\cdot 3=240+72=312$. Vadinasi, $c=1$ ir $a+b+c=1+4+1=6$.

18. (B) 20

! Iš taškų A ir B išveskime nuspalvintų trikampių aukštines, jų ilgius atitinkamai pažymėkime h_1 ir h_2 (žr. pav.). Kadangi tiesė t lygiagreti su stačiakampio kraštinėmis, tai h_1 ir h_2 yra atstumai nuo tiesės t iki tų kraštinių. Bendras atstumas h_1+h_2 tarp stačiakampio kraštinių yra stačiakampio plotis. Stačiakampio ilgį pažymėkime a. Tada stačiakampio plotas lygus $S=a(h_1+h_2)$, o nuspalvintų trikampių plotai lygūs $\frac{1}{2}\cdot h_1\cdot a$ ir $\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot a$. Trikampių plotų suma T lygi



$$\frac{h_1a}{2}+\frac{h_2a}{2}=\frac{a(h_1+h_2)}{2}=\frac{S}{2}.$$

Tada $S=2T=2\cdot 10=20$.

19. (E) 32 EUR

? Laimos išlaidos daugiau nei 50%, t. y. daugiau nei pusantro karto didesnės nei Fortūnato. Pasakykime tą patį atbulai: Forūnato išlaidos yra mažiau nei du trečdaliai Laimos išlaidų. Todėl jei teisingas vienas iš atsakymų **A**-**D** ir Laima išleido ne daugiau nei 26 eurus, tai Fortūnatas išleido ne daugiau nei $\frac{2}{3} \cdot 26 < \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$ (eurų). Dar kur kas mažiau išleido Moira: 15% yra daug mažiau nei trečdalis. Taigi ji išleido mažiau nei $18 : 3 = 6$ (eurus). Tada bendros išlaidos mažesnės nei $26 + 18 + 6 = 50$ (eurų), o tai prieštarauja sąlygai.

Renkamės atsakymą **E**.

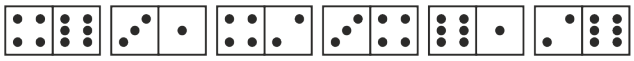
! Tiek Laimos, tiek Moiros išlaidos apibūdintos, remiantis Fortūnato išlaidomis, todėl būtent Fortūnato išlaidas ir pažymėkime x eurų. Tada Moiros išlaidos yra $\frac{15\%}{100\%} \cdot x = 0{,}15x$ (eurų), o Laimos – $x + \frac{60\%}{100\%} \cdot x = x + 0{,}6 = 1{,}6x$ (eurų). Bendra išlaidų suma (eurais) lygi $x + 0{,}15x + 1{,}6x = 2{,}75x = 55$. Tada Fortūnatas išleido $\frac{55}{2{,}75}$ eurų, o Laima – $1{,}6 \cdot \frac{55}{2{,}75}$ eurų.

Belieka atlikti skaičiavimus. Pastebėkime, kad $2{,}75 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Todėl $\frac{55}{2{,}75} = 55 : \frac{11}{4} = 55 : 11 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ ir $1{,}6 \cdot \frac{55}{2{,}75} = 1{,}6 \cdot 20 = 1{,}6 \cdot 10 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$.

Vadinasi, Laima išleido 32 eurus (Fortūnatas – 20 eurų, Moira – 3 eurus).

20. (C) 3

? Uždavinį greitai išspręsti gali padėti įvairūs pastebėjimai.



Langelių su 4 ir su 6 akutėmis yra po tris, todėl po vieną langelį su 4 ir 6 akutėmis neturi poros ir turi likti iš krašto. Pradinėje padėtyje taip ir yra, todėl kraštinių kauliukų liesti neskubėkime.

Trečiasis (iš kairės) kauliukas 4-2 net neapsuktas puikiai tinka penktojo kauliuko 6-1 vietoje. Tai gali paskatinti juos sukeisti vietomis. Po šio ėjimo, atsisakius liesti kraštinius kauliukus ir jau teisingai sudėtus tris kauliukus dešinėje, gana lengva pastebėti, ką daryti su likusiais dviem kauliukais. Juos būtina sukeisti vietomis, o tada tereikia apsukti kauliuką 3-1 ir gausime teisingai sudėtus visus kauliukus.

Matome, kad pakako trijų ėjimų. Bet gal užtenka vieno ar dviejų? Kiek padėliojus kauliukus mintyse, galima jau ne aklai spėti, bet ir aiškiai nujausti, kad dviejų ėjimų neužteks.

Renkamės atsakymą **C**.

! Dalyje **?** nustatėme, po kiek akučių turi būti iš krašto. Toliau galime nustatyti ir tai, kurių kauliukų langeliai būtinai turi būti suglausti. Pavyzdžiui, yra tik du langeliai su 3 akutėmis (antrasis ir ketvirtasis kauliukai). Tie langeliai turi būti suglausti. Tą patį galima pasakyti ir apie du langelius, turinčius po 1 akutę. Taip gauname, kad antrasis kauliukas 3-1 privalo atsidurti tiksliai tarp ketvirtojo 3-4 ir penktojo 6-1. Tam reikės bent dviejų ėjimų, kai kauliukai apkeičiami vietomis. Tačiau, kad kauliukai 3-1 ir 3-4 būtų suglausti teisingai, reikės vieną iš jų ir apsukti.

Vadinasi, kauliukams teisingai sudėti reikia, bet kartu ir užtenka (kaip matėme **?** dalyje) trijų ėjimų.

21. (A) 17

! Atrodytų, kad reikia sugalvoti, kaip konkrečiai surašyti skaičius į lentelę. Bet uždavinį galima išspręsti kur kas greičiau. Visų lentelės skaičių suma lygi

$$1+2+\ldots+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=4\cdot 10+5=45.$$

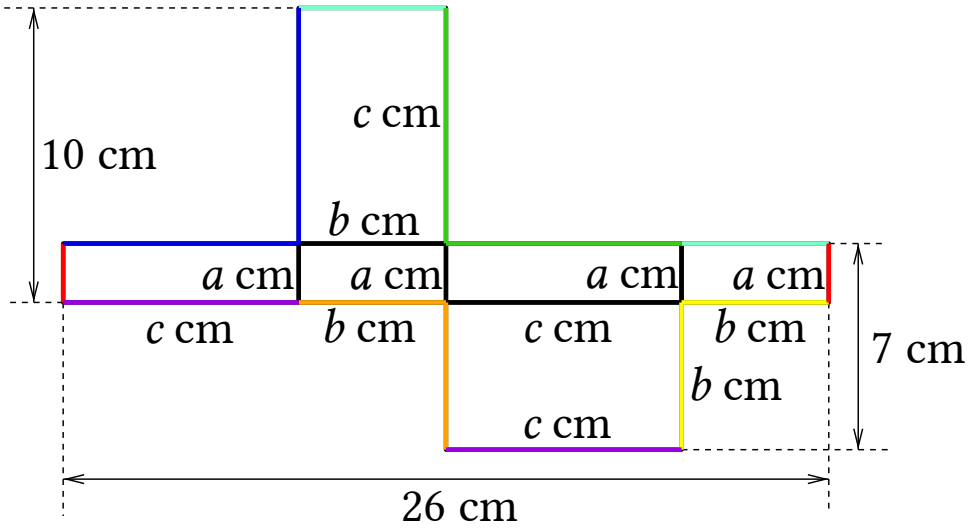
Šią sumą gausime, jei iš pradžių sudėsime skaičius kiekvienoje eilutėje, o tada sudėsime tris gautąsias sumas e_1, e_2, e_3. Tą patį galima pasakyti ir apie stulpelių skaičių sumas s_1, s_2, s_3. Todėl šešių Jokūbo gautųjų skaičių e_1, e_2, e_3, s_1, s_2, s_3 suma lygi $45+45=90$, o nežinomas Jokūbo skaičius lygus $90-12-13-15-16-17=17$.

Kad lentelę įmanoma užpildyti nurodytu būdu, parodyta paveikslėlyje.

1	2	9
4	7	5
8	6	3

22. (C) 80 cm^3

! Nors išklotinę sudaro daug linijų, nepamirškime, kad dėžė turi tris matmenis. Jei juos pažymėsime (didėjimo tvarka) a, b, c (cm), tai dėžės sienų matmenys (plotų didėjimo tvarka) yra a cm $\times$ b cm, a cm $\times$ c cm ir b cm $\times$ c cm. Priešingų sienų matmenys yra tokie patys, ir išklotinėje nesunku pastebėti tris lygių priešingų sienų poras.



Tačiau galima ir labiau apsidrausti: pamėginti įsivaizduoti, kaip, iškirpus išklotinę iš popieriaus, vėl atkuriama dėžės forma ir pavaizduotieji stačiakampiai tampa sienomis. Suglaudžiamos stačiakampių kraštinės, paveikslėlyje nuspalvintos ta pačia spalva, turi būti lygios, o priešingų sienų matmenys yra vienodi.

Kad ir kaip žiūrėtume, prieisime prie išvados, kad stačiakampių kraštines galima pažymėti, kaip parodyta paveikslėlyje.

Dabar aišku, kad $a+c=10$, $a+b=7$ ir $2b+2c=26$. Tada $b+c=13$ ir $2a=(a+c)+(a+b)-(b+c)=10+7-13=4$. Randame $a=2$, $b=7-a=5$ ir $c=10-a=8$. Tada dėžės tūris lygus $abc=2\cdot 5\cdot 8=10\cdot 8=80$ (cm^3).

23. (B) 2

! Taškus iš kairės į dešinę pažymėkime $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$. Taip pat pažymėkime $d = A_1A_2$. Kadangi taškas A_1 yra kairiausias, tai $A_1A_3 = A_1A_2 + A_2A_3 = A_2A_3 + d$. Analogiškai $A_1A_4 = A_2A_4 + d$, $A_1A_5 = A_2A_5 + d$, ir t. t. Tada

$$2018 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + \ldots + A_1A_{11} =$$

$$= A_2A_1 + (A_2A_3 + d) + (A_2A_4 + d) + \ldots + (A_2A_{11} + d) =$$

$$= (A_2A_1 + A_2A_3 + A_2A_4 + \ldots + A_2A_{11}) + 9d = 2000 + 9d.$$

Vadinasi, $9d = 2018 - 2000 = 18$ ir $d = 18 : 9 = 2$.

!! Taškus iš kairės į dešinę pažymėkime $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$. Taip pat pažymėkime $d = A_1A_2$. Tašką A_1 pastumkime į dešinę atstumu d, kad A_1 sutaptų su A_2. Kaip pakito atstumų sumos 2018 ir 2000? Taškas A_1 iki kiekvieno iš likusių 10 taškų priartėjo per d, todėl atstumų suma 2018 sumažėjo skaičiumi $10d$. Taško A_2 atstumas iki A_1 sumažėjo nuo d iki 0, o atstumai iki kitų taškų nepakito, todėl suma 2000 sumažėjo skaičiumi d. Kadangi taškai A_1 ir A_2 sutampa, tai ir atstumų nuo jų iki kitų taškų sumos sutampa: $2018 - 10d = 2000 - d$. Vadinasi, $9d = 2018 - 2000 = 18$ ir $d = 18 : 9 = 2$.

24. (B) 40 m

! Baseino plotį pažymėkime x m, o Jono greitį – v m/s. Tada Simono greitis yra $3v$ m/s, o baseino perimetras lygus $p = 2 \cdot 50 + 2 \cdot x = 2x + 100$ (m). Simonas apibėgo baseiną 5 kartus, todėl jo nubėgtas atstumas lygus $5p = 10x + 500$ (m). Jono nuplauktas atstumas yra $6 \cdot 50 = 300$ (m). Padaliję atstumus iš greičių, gausime bėgimo ir plaukimo laiką, kuris abiem atvejais toks pats:

$$\frac{10x + 500}{3v} = \frac{300}{v}, \qquad 10x + 500 = 3v \cdot \frac{300}{v} = 3 \cdot 300 = 900,$$

$$10x = 900 - 500 = 400, \qquad x = 400 : 10 = 40 \text{ (m)}.$$

!! Kadangi Simonas trigubai greitesnis, tai 6 baseino ilgiai, nuplaukti Jono, yra tris kartus trumpesnis atstumas nei 5 baseino perimetrai, kuriuos nubėgo Simonas per tą patį laiką. Tada 5 baseino perimetrai lygūs $6 \cdot 3 = 18$-ai baseino ilgių. Baseino perimetrą sudaro du baseino ilgiai ir du jo pločiai, todėl 18 baseino ilgių lygūs 10-iai ilgių ir 10-iai pločių, o $18 - 10 = 8$ ilgiai lygūs 10-iai pločių. Tada baseino ilgio ir pločio santykis yra $10 : 8 = 5 : 4$. Kadangi ilgis yra 50 m, tai plotis yra 40 m.

25. (D) 32

! Kiek dienų galima išbūti Krosnies saloje, kad jokios dvi dienos iš eilės nebūtų saulėtos? Jei sugalvosime maksimalų pavyzdį, prie gautojo dienų skaičiaus tereiks pridėti vienetą, kad gautume atsakymą.

Šiuos 2018 metus sudaro 365 dienos, todėl Krosnies saloje gali būti daugiausiai $365-350 = 15$ apniukusių dienų. Lengva nuspėti, kad Besmegeniui labiausiai nepasiseks, jei visos 15 apniukusių dienų bus jo atostogų metu. Bet ar jos turėtų eiti iš eilės? Konstruojant pavyzdį, mums reikia vengti ne saulėtų dienų apskritai, bet dviejų saulėtų dienų iš eilės. Todėl tarp bet kurių dviejų gretimų apniukusių dienų galėtų būti dar po vieną saulėtą. Be to, nereikia pamiršti, kad po vieną saulėtą dieną galime prijungti šio laiko tarpsnio pradžioje ir pabaigoje. Taip gauname 16 saulėtų dienų, kurios kaitaliojasi su 15 apniukusių. Vadinasi, jei Besmegenis atostogaus tik $16 + 15 = 31$ dieną (ar dar trumpiau), jo noras gali neišsipildyti.

Bet ar tikrai pakaks Besmegeniui 32 dienų? Jas galime suskirstyti į $32 : 2 = 16$ dvidienių. Kadangi apniukusių dienų gali būti daugiausiai 15, tai daugiausiai 15-oje dvidienių bent viena iš dienų apniukusi. Vadinasi, bent vienas dvidienis turi būti saulėtas, ir jei Besmegenis atostogaus saloje 32 dienas, jo noras išsipildys.

26. (D) 24 cm × 16 cm

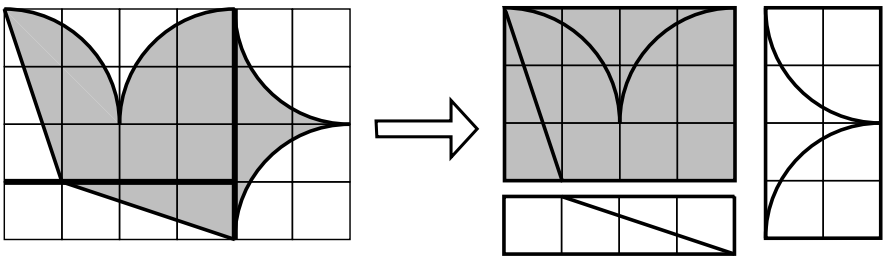
? Vėliavos ilgio ir pločio santykis yra $6 : 4 = 3 : 2$, todėl netinka atsakymas **C**. Vėliavos plotas turi būti didesnis nei „balandžio“, todėl netinka atsakymas **A**.

Jei teisingas atsakymas **B**, tai vėliavos plotas yra $18 \cdot 12 = 216$ (cm^2), o nenuspalvinta tėra $\frac{216-192}{216} = \frac{1}{9}$ vėliavos dalis. Tačiau iš $6 \cdot 4 = 24$ langelių, sudarančių vėliavą, trys (t. y. aštuntoji dalis) visai nenuspalvinti. Todėl akivaizdu, kad nenuspalvinta daugiau nei $\frac{1}{9}$ visos vėliavos.

Jei teisingas atsakymas **E**, tai vėliavos plotas yra $27 \cdot 18 = 486$ (cm^2), o nuspalvinta tėra $\frac{192}{486} = \frac{32}{81} < \frac{32}{80} = 0{,}4$ visos vėliavos. Vien pažvelgus į vėliavą, tai atrodo mažai tikėtina.

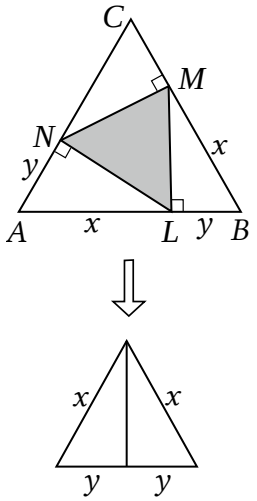
Renkamės atsakymą **D**.

! Vėliavą sudarančių langelių kraštinės ilgį pažymėkime a cm. Pastebėkime, kad „balandžio“ kraštą sudaro dvi lygios atkarpos ir keturi lygūs apskritimų ketvirčiai (priklausantys apskritimams su spinduliu $2a$ cm). Todėl „balandį“ padalijus į tris dalis arba nenuspalvintą vėliavos dalį padalijus į penkias dalis, kaip parodyta paveikslėlio kairėje, iš jų galima sudėti stačiakampius, pavaizduotus paveikslėlio dešinėje. Matome, kad „balandžio“ plotas 192 cm^2 lygus 12 iš 24 langelių plotui $12a^2$ cm^2. Todėl $a^2 = 192 : 12 = (120 + 72) : 12 = 10 + 6 = 16$ ir $a = 4$.



Vadinasi, vėliavos matmenys yra $6a$ cm × $4a$ cm = 24 cm × 16 cm.

27. (B) 12



? Galima numanyti, kad statieji trikampiai ANL, BLM, CMN, turintys po $60°$ ir $90° - 60° = 30°$ kampą, lygūs, o trikampis LMN – lygiakraštis. Pažymėkime $a = AB = BC = CA$, $x = AL = BM = CN$, $y = AN = BL = CM$. Tada $a = x + y$.

Suglaudus trikampius ANL ir BLM lygiomis kraštinėmis LN ir ML, gaunamas trikampis, kurio kampai lygūs $60°, 60°$ ir $30° + 30° = 60°$, o kraštinės lygios x, x ir $y + y = 2y$. Pagal kampus šis trikampis lygiakraštis, todėl $x = 2y$ ir $a = \frac{3}{2}x$. Vadinasi, šis trikampis yra tokios pačios formos, kaip trikampis ABC, tik jo kraštinės, o todėl ir aukštinės pusantro karto trumpesnės. Tada jo plotas lygus $36 : (\frac{3}{2})^2 = 36 \cdot \frac{4}{9} = 16$, o trikampių ANL ir BLM plotai lygūs $16 : 2 = 8$. Toks yra ir jiems lygaus trikampio CMN plotas.

Vadinasi, trikampio LMN plotas lygus $36 - 8 - 8 - 8 = 12$.

Renkamės atsakymą **B**.

! Pažymėkime $a = AB = BC = CA$.

Statieji trikampiai ANL, BLM, CMN turi po $60°$ ir $90° - 60° = 30°$ kampą. Tada

$$\angle LMN = 180° - \angle CMN - \angle BML = 180° - 90° - 30° = 60°.$$

Analogiškai $\angle MNL = \angle NLM = 60°$, todėl trikampis LMN lygiakraštis. Tada trikampiai ANL, BLM, CMN lygūs pagal kraštinę ($LM = MN = NL$) ir du kampus prie jos ($90°$ ir $30°$).

Stačiajame trikampyje statinis, esantis prieš $30°$ kampą, visada lygus pusei įžambinės. Todėl $AL = 2AN$, $a = AB = AL + LB = 2AN + AN = 3AN$, $AN = \frac{a}{3}$ ir $AL = 2AN = \frac{2a}{3}$. Pagal Pitagoro teoremą $NL^2 = AL^2 - AN^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3}$. Todėl trikampio LMN kraštinės ilgis yra $a : \sqrt{3}$. Šis trikampis lygiakraštis, todėl yra tokios pačios formos, kaip trikampis ABC (panašieji trikampiai), tik jo kraštinės ir aukštinės $\sqrt{3}$ karto trumpesnės. Vadinasi, jo plotas lygus $36 : (\sqrt{3})^2 = 36 : 3 = 12$.

28. (A) 7

10					3
	x	y	z		

! Tarkime, kad langeliuose iš eilės ratu įrašyti skaičiai a, b, c, d. Tada $b = a + c$, $c = b + d$, todėl $c = b - a$, $d = c - b = -a$. T. y. bet kuriuose langeliuose, kuriuos einant ratu skiria du langeliai, skaičiai a ir d turi būti priešingi. Tada kas šeštame langelyje įrašytas tas pats skaičius. Todėl $y = 10$, $z = 3$ (žr. pav.). Kadangi $y = x + z$, tai $x = y - z = 7$.

(Beje, langelius įmanoma užpildyti vieninteliu būdu: 6 skaičiai 3, 10, 7, -3, -10, -7 iš eilės ratu užrašomi tris kartus.)

29. Ⓒ 4,01 m

! Tarkime, kad Julijos rezultatų vidurkis buvo 3,8 m, jai atlikus n šuolių. Jei Julijos rezultatų suma tuo metu buvo s_0 m, tai $3{,}8 = \frac{s_0}{n}$ ir $s_0 = 3{,}8n$. Analogiškai rezultatų suma po $(n+1)$-ojo šuolio lygi $s_1 = 3{,}81(n+1)$ (m), o po $(n+2)$-ojo šuolio turi būti lygi $s_2 = 3{,}82(n+2)$ (m). Kita vertus, $s_1 = s_0 + 3{,}99$, todėl

$$3{,}81(n+1) = 3{,}8n + 3{,}99 = 3{,}8n + 3{,}8 + 0{,}19 = 3{,}8(n+1) + 0{,}19,$$

$$0{,}19 = 3{,}81(n+1) - 3{,}8(n+1) = 0{,}01(n+1),$$

$$n + 1 = 0{,}19 : 0{,}01 = 19.$$

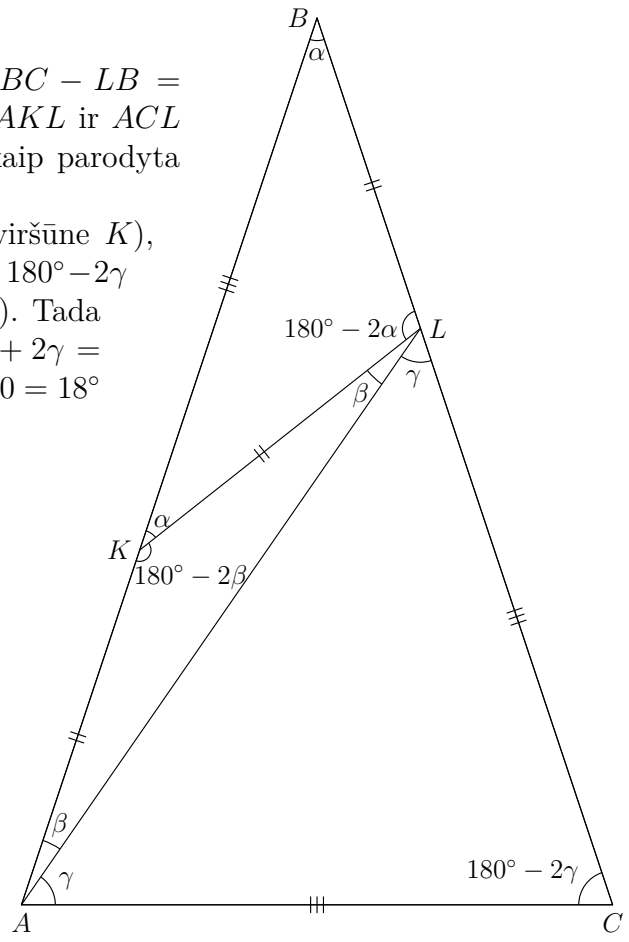
Jei dar vienu šuoliu Julija turi nušokti x m, tai $s_2 = s_1 + x$ ir

$$3{,}81 \cdot 19 + x = 3{,}82 \cdot 20 = 3{,}81 \cdot 20 + 0{,}01 \cdot 20 = 3{,}81 \cdot 20 + 0{,}2,$$

$$x = 3{,}81 \cdot 20 + 0{,}2 - 3{,}81 \cdot 19 = 3{,}81 + 0{,}2 = 4{,}01 \text{ (m)}.$$

!! Tarkime, kad Julijos rezultatų vidurkis buvo 3,8 m, jai atlikus n šuolių. Jei Julijos rezultatų suma tuo metu buvo s m, tai $3{,}8 = \frac{s}{n}$ ir $s = 3{,}8n$. Rezultatų suma tokia, lyg kiekvienu šuoliu Julija būtų nušokusi po 3,8 m. Analogiškai, kai Julija nušoko dar 3,99 m, jos rezultatų suma tapo tokia, lyg ji būtų nušokusi $n+1$ kartų po 3,81 m. Vadinasi, Julijos 3,99 m šuolis padidino s tiek, kiek būtų padidinęs 3,8 m šuolis ir tada visų rezultatų padidinimas 0,01 m. Tam prireikė $3{,}99 - 3{,}8 = 0{,}19$ (m) perviršio. Analogiškai, $(n+2)$-uoju šuoliu Julija turi nušokti bent 3,81 m ir viršyti šį atstumą tiek, kad tai prilygtų kiekvieno iš $n+2$ atstumų pailginimui 0,01 m. Jei prieš tai Julijai prireikė 0,19 m perviršio, tai dabar, kadangi jau yra vienu rezultatu daugiau, jai reikalingas $0{,}19+0{,}01 = 0{,}2$ (m) perviršis. Vadinasi, ji turi nušokti $3{,}81+0{,}2 = 4{,}01$ (m).

30. Ⓒ 36°



! Kadangi $BA = BC$ ir $AK = LB$, tai $CL = BC - LB = BA - AK = KB = AC$. Trikampiai BKL, AKL ir ACL lygiašoniai, todėl jų kampus galima pažymėti, kaip parodyta paveikslėlyje.

Gauname, kad $\alpha = 2\beta$ (pagal kampus su viršūne K), $2\alpha = \beta+\gamma$ (pagal kampus su viršūne L) ir $\beta+\gamma = 180^\circ - 2\gamma$ (lygiašonio trikampio ABC kampai prie pagrindo). Tada $\gamma = 2\alpha - \beta = 2 \cdot 2\beta - \beta = 3\beta$ ir $180^\circ = \beta + \gamma + 2\gamma = \beta+3\gamma = \beta+3\cdot 3\beta = 10\beta$. Vadinasi, $\beta = 180^\circ : 10 = 18^\circ$ ir $\angle ABC = \alpha = 2\beta = 36^\circ$.

!! Pažymėkime $\alpha = \angle ABC$. Lygiašoniame trikampyje BKL turime $\angle BLK = 180^\circ - \angle KBL - \angle BKL = 180^\circ - 2\angle KBL = 180^\circ - 2\alpha$. Tada $\angle KLC = 180^\circ - \angle BLK = 2\alpha$.

Kadangi $BA = BC$ ir $AK = LB$, tai $CL = BC - LB = BA - AK = KB = AC$. Tada trikampiai ACK ir LCK lygūs pagal tris kraštines ir $\angle CAK = \angle CLK = 2\alpha$. Lygiašonio trikampio ABC kampai yra $\alpha, 2\alpha$, 2α, o jų suma lygi $5\alpha = 180^\circ$. Vadinasi, $\alpha = 180^\circ : 5 = 36^\circ$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	E
3	E
4	D
5	D
6	A
7	C
8	D
9	D
10	B
11	C
12	C
13	E
14	C
15	A
16	D
17	A
18	B
19	E
20	C
21	A
22	C
23	B
24	B
25	D
26	D
27	B
28	A
29	C
30	C