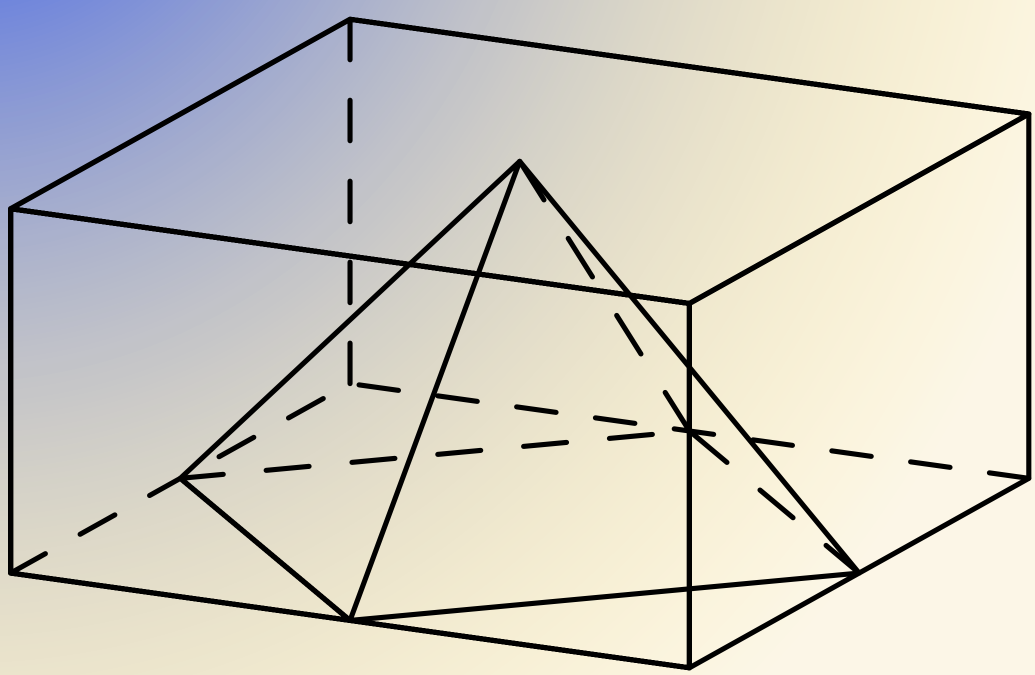
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Senjoras



Užduotys ir sprendimai

2018

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2018. Senjoras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavimas
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 45000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2018 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2018 metų kovo 15 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
Klasė	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐
17	☐	☐	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐
22	☐	☐	☐	☐	☐
23	☐	☐	☐	☐	☐
24	☐	☐	☐	☐	☐
25	☐	☐	☐	☐	☐
26	☐	☐	☐	☐	☐
27	☐	☐	☐	☐	☐
28	☐	☐	☐	☐	☐
29	☐	☐	☐	☐	☐
30	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

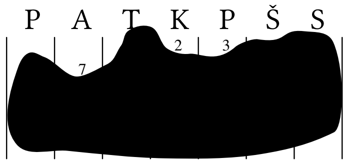
1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25 % uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2018

2018 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

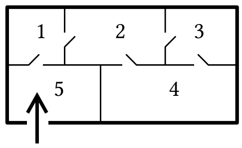
Klausimai po 3 taškus

1. Vieno metų mėnesio kalendorius užpiltas rašalu (žr. pav.). Kuri savaitės diena yra to mėnesio 27-oji diena?
A) Pirmadienis **B)** Trečiadienis **C)** Ketvirtadienis
D) Šeštadienis **E)** Sekmadienis



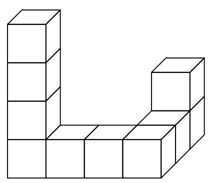
2. Kuris skaičius didžiausias?
A) $2 - 0 \cdot 1 + 8$ **B)** $2 + 0 \cdot 1 \cdot 8$ **C)** $2 \cdot 0 + 1 \cdot 8$ **D)** $2 \cdot (0 + 1 + 8)$ **E)** $2 \cdot 0 + 1 + 8$

3. Paveikslėlyje pavaizduotas Renatos namo planas. Renata grįžo iš darbo ir pro kiekvienas savo namo duris įėjo lygiai po vieną kartą. Kuriame kambaryje ji atsidūrė?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



4. Kai Toras suduoda savo kūju į bet kokią uolą, ji skyla į lygiai penkias mažesnes uolas. Sykį Toras aptiko septynias stūksančias uolas. Kiek uolų, stūksančių toje vietoje, galėjo palikti Toras, smogęs kūju kelis kartus?
A) 17 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 23 **E)** 25

5. Paveikslėlyje pavaizduota figūra, suklijuota iš 10 kubelių. Ji pilnai panardinta į dažus ir ištraukta. Kelių kubelių nusidažė lygiai keturios sienos?
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10



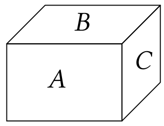
6. Tarkime, kad teisingi šie du teiginiai: 1) kai kurie ateiviai žali, o visi kiti ateiviai raudoni; 2) žali ateiviai gyvena tik Marse. Iš to išplaukia, kad
A) visi ateiviai gyvena Marse **B)** Marse gyvena tik žali ateiviai
C) Veneroje yra raudonų ateivių **D)** visi raudoni ateiviai gyvena Veneroje
E) Veneroje nėra žalių ateivių

7. Sudėtyje stulpeliu keturi skaitmenys pakeisti raidėmis P, Q, R ir S (žr. pav.). Kam lygi suma $P + Q + R + S$?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 24

$$\begin{array}{r} P\,4\,5 \\ +\;Q\,R\,S \\ \hline 6\,5\,4 \end{array}$$

8. Dėžėje guli 65 rutuliai, iš kurių 8 yra balti, o likę – juodi. Tomas užrištomis akimis traukia rutulius iš dėžės. Vienu sykiu iš dėžės jis gali ištraukti daugiausiai 5 rutulius. Kiek mažiausiai kartų jis turi traukti rutulius iš dėžės, kad būtų tikras, jog ištraukė bent vieną baltą rutulį?
A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

9. Stačiakampės plytos trijų sienų plotai lygūs A, B ir C (žr. pav.). Kuris reiškinys yra tokios plytos tūrio formulė?

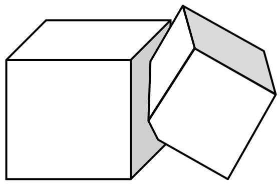


A) ABC **B)** $\sqrt{ABC}$ **C)** $\sqrt{AB+BC+CA}$ **D)** $\sqrt[3]{ABC}$ **E)** $2(A+B+C)$

10. Kiek yra tokių pirminių skaičių p_1 ir p_2 porų, kad $p_1 + p_2 = 1001$ ir $p_1 < p_2$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Daugiau nei 3

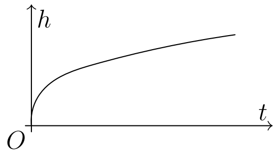
Klausimai po 4 taškus

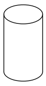
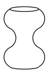
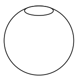
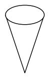
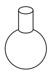
11. Besikertančių kubų A ir B (žr. pav.) tūriai atitinkamai lygūs V ir W. Kubo A dalies, nepriklausančios B, tūris sudaro 90% viso A tūrio. Kubo B dalies, nepriklausančios A, tūris sudaro 85% viso B tūrio. Kuri lygybė teisinga?



A) $V = \frac{2}{3}W$ **B)** $V = \frac{3}{2}W$ **C)** $V = \frac{85}{90}W$ **D)** $V = \frac{90}{85}W$ **E)** $V = W$

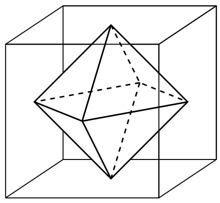
12. Pastoviu greičiu tekanti vandens srovė pripildė vazą iki viršaus. Vandens lygio h vazoje priklausomybė nuo laiko t šio proceso metu pavaizduota paveikslėlyje. Kokia galėtų būti vazos forma?



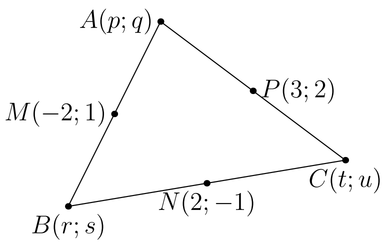
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

13. $|\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5| =$
A) 10 **B)** $2\sqrt{17}$ **C)** $\sqrt{34} - 10$ **D)** $10 - \sqrt{34}$ **E)** 0

14. Sujungus kubo sienų vidurio taškus, gautas oktaedras (žr. pav.). Koks yra oktaedro tūris, jei kubo kraštinės ilgis yra 1?
A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{8}$



15. Paveikslėlyje parodytos trikampio ABC kraštinių vidurio taškų M, N, P koordinatės. Kam lygi trikampio viršūnių visų koordinačių suma $p + q + r + s + t + u$?
A) 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** 3 **D)** 4 **E)** Kitam skaičiui



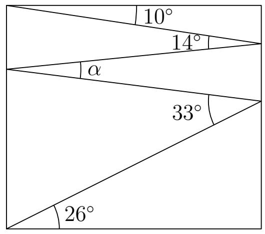
16. Ekspertai pateikė tokias futbolo rungtynių Madrido „Real“ – Mančesterio „United“ prognozes: 1) lygiųjų nebus; 2) „Real“ įmuš; 3) „Real“ laimės; 4) „Real“ nepralaimės; 5) bus įmušti lygiai 3 įvarčiai. Kokiu rezultatu baigėsi rungtynės „Real“ – „United“, jei pasitvirtino lygiai trys prognozės?
A) 3 : 0 **B)** 2 : 1 **C)** 1 : 2 **D)** 0 : 3 **E)** Ši situacija negalima

17. Funkcija f tenkina lygybę $f(x+y) = f(x)f(y)$ bet kokiems sveikiesiems x ir y. Raskite $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$, jei $f(1) = 1/2$.
A) 1/8 **B)** 3/2 **C)** 5/2 **D)** 15/8 **E)** 6

18. Iš kurio skaičiaus nesidalija $18^{2017} + 18^{2018}$?
A) 8 **B)** 18 **C)** 28 **D)** 38 **E)** 48

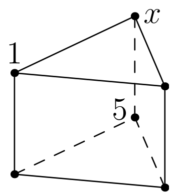
19. Ant penkių kortų užrašyta po skaičių: 3, 4, 5, 6 ir 7. Milda paėmė tris kortas, o Meilė – likusias dvi. Mildos skaičių sandaugos ir Meilės skaičių sandaugos suma yra pirminis skaičius. Kokia yra Mildos skaičių suma?
A) 12 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 17 **E)** 18

20. Stačiakampyje nubrėžta laužtė. Jos atkarpos sudaro kampus, parodytus paveikslėlyje. Raskite α.
A) 11° **B)** 12° **C)** 16° **D)** 17° **E)** 33°



Klausimai po 5 taškus

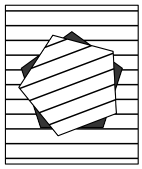
21. Prizmę sudaro du trikampiai ir trys kvadratai. Jos viršūnės sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 6. Kiekvienos kvadratinės sienos viršūnių skaičių suma yra tokia pati. Skaičių 1, 5 ir x padėtis nurodyta paveikslėlyje. Raskite x.
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** Ši situacija negalima

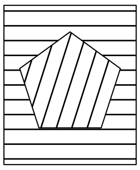
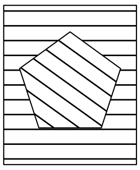
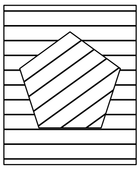
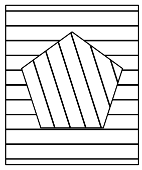
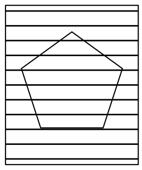


22. Lygtis $x^2 - x - 2018 = 0$ turi sprendinius x_1 and x_2. Raskite $x_1^2 + x_2$.
A) 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 2019 **E)** 2020

23. Keturių brolių A, B, C ir D ūgis skirtingas. Brolių paklausė, kuris iš jų aukščiausias, o kuris žemiausias. A atsakė: „Esu nei toks, nei toks.“ B atsakė: „Nesu žemiausias.“ C atsakė: „Esu aukščiausias.“ D atsakė: „Esu žemiausias.“ Kuris brolis aukščiausias, jei lygiai vienas iš jų apsiriko?
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** Neįmanoma nustatyti

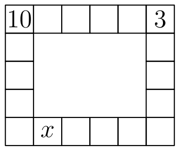
24. Iš liniuoto popieriaus lapo iškirptas (bet iš atsiradusios skylės neišimtas) taisyklingasis penkiakampis. Penkiakampį leidžiama pasukti aplink jo centrą 21° kampu prieš laikrodžio rodyklę. Paveikslėlyje parodyta padėtis po pirmojo posūkio. Kokį vaizdą gausime, kai penkiakampis pirmą kartą vėl pilnai uždengs lape atsiradusią skylę?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

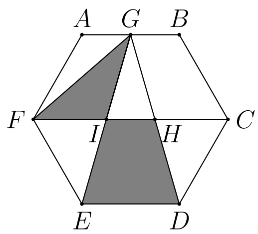
25. Kvadratinės funkcijos $f(x) = x^2 + px + q$ grafikas kerta koordinačių ašis trijuose skirtinguose taškuose. Apskritimas, einantis per šiuos tris taškus, kerta grafiką dar viename taške. To taško koordinatės garantuotai yra
A) $(0; -q)$ **B)** $(p; q)$ **C)** $(-p; q)$ **D)** $\left(-\frac{q}{p}; \frac{q^2}{p^2}\right)$ **E)** $(1;\, p+q+1)$

26. Zita nori į 5×6 lentelės kraštinius langelius įrašyti po skaičių, kad kiekvienas skaičius būtų lygus dviejų jam gretimų skaičių sumai. Du skaičiai jau įrašyti (žr. pav.). Kokį skaičių Zita turi įrašyti vietoj x? (Skaičiai gretimi, kai jų langeliai turi bendrą kraštinę.)
A) 7 **B)** 10 **C)** 13 **D)** -13 **E)** -3



27. Kiek realiųjų sprendinių turi lygtis $\left||4^x - 3| - 2\right| = 1$?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

28. Taškas G taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ kraštinę AB dalija pusiau. Atkarpos GD and GE kerta atkarpą FC atitinkamai taškuose H ir I. Koks yra trikampio GIF ploto ir trapecijos $IHDE$ ploto santykis?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$



29. Klasėje mergaičių yra 40% daugiau nei berniukų. Tikimybė, kad atsitiktinai parinktoje šios klasės mokinių poroje bus berniukas ir mergaitė, lygi $\frac{1}{2}$. Kiek mokinių yra klasėje?
A) 20 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 38 **E)** Ši situacija negalima

30. Arkis Medas apskaičiavo $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15$ ir sandaugos reikšmę užrašė lentoje. Pitas Goras du skaitmenis nutrynė, ir liko užrašas $1\blacksquare 0767436\blacksquare 000$. Kokie yra Arkio Medo skaičiaus antrasis ir dešimtasis skaitmenys?
A) 2 ir 0 **B)** 4 ir 8 **C)** 5 ir 6 **D)** 9 ir 2 **E)** 3 ir 8

Senjoro užduočių sprendimai

1. Ⓐ Pirmadienis

! Kalendoriuje matome, kad 2-oji diena yra ketvirtadienis, 3-ioji – penktadienis, 7-oji – antradienis. Galima pradėti skaičiuoti savaitės dienas nuo tų, kurios žinomos. Bet dar greičiau pasieksime tikslą, jei pradėsime nuo 27-osios dienos. Savaitės dienos kartojasi kas 7 dienas, todėl 27-oji diena yra ta pati savaitės diena, kaip ir $27-7=20$-oji, $20-7=13$-oji, $13-7=6$-oji. Jei 7-oji diena yra antradienis, tai 6-oji, o kartu ir 27-oji dienos yra pirmadieniai.

2. Ⓓ $2\cdot(0+1+8)$

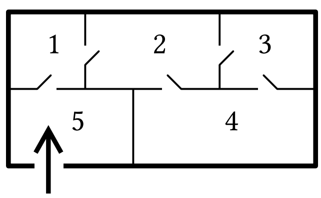
! Reikia palyginti tokius skaičius:

A) $2-0\cdot 1+8=2-0+8=10$;
B) $2+0\cdot 1\cdot 8=2+0=2$;
C) $2\cdot 0+1\cdot 8=0+8=8$;
D) $2\cdot(0+1+8)=2\cdot 9=18$;
E) $2\cdot 0+1+8=0+1+8=9$.

Didžiausias skaičius yra **D)** 18.

3. Ⓑ 2

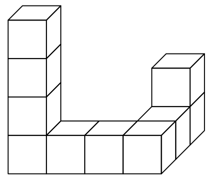
! Iš lauko Renata galėjo įeiti tik į kambarį 5, iš jo – tik į kambarį 1, o iš kambario 1 – tik į kambarį 2. Toliau Renata galėjo eiti į kambarį 3 arba kambarį 4. Pirmuoju atveju ji toliau įėjo į kambarį 4, o tada į kambarį 2. Antruoju atveju ji toliau įėjo į kambarį 3, o tada į kambarį 2. Abiem atvejais Renata įėjo pro visas šešerias paveikslėlyje pavaizduotas duris po vieną kartą, todėl iš kambario 2 jau negalėjo išeiti kitur. Norint pasirinkti atsakymą, pakanka pastebėti bent vieną iš šių dviejų namo apėjimo būdų, kurie abu baigiasi kambaryje 2.



4. Ⓓ 23

! Kokia tvarka Toras daužys uolas, nėra svarbu. O svarbu yra, kad suskilus bet kuriai uolai, vietoj vienos atsiranda penkios, todėl bendras uolų skaičius kaskart padidėja $5-1=4$. Po pirmojo smūgio uolų bus $7+4=11$, tada iš eilės $11+4=15$, $15+4=19$, $19+4=23$, $23+4=27$, ... Matome, kad iš pateiktų atsakymų galimas lygiai vienas: 23. Tiek uolų galėjo rastis po bet kokių keturių Toro smūgių.

5. C 8



! Svarbiausia greitai susivokti, kad 10 kubelių sudaro seką, kurios bet kurie du gretimi kubeliai liečiasi sienomis, o negretimi – nesiliečia. Du kraštiniai kubeliai turi po vieną gretimą kubelį, todėl kiekvieno iš jų tik viena siena uždengta, o likusios penkios nusidažė. Likę kubeliai turi po du gretimus kubelius, todėl kiekvieno iš jų lygiai dvi sienos uždengtos, o likusios lygiai keturios sienos nusidažė. Šių kubelių yra $10 - 2 = 8$.

6. E Veneroje nėra žalių ateivių

? Jei žali ateiviai gyvena tik Marse, tai akivaizdu, kad Veneroje jų nėra. Todėl atsakymas **E** teisingas.

Renkamės atsakymą **E**.

! Įsitikinkime, kad atsakymai **A**-**D** klaidingi, t. y. kad šie teiginiai neišplaukia iš sąlygos teiginių. Tai galima padaryti paprastai samprotaujant, bet padarykime tai formaliau. Visus ateivius galima būtų suskirstyti į žalius, raudonus ir kitokios spalvos. Taip pat juos galima suskirstyti į gyvenančius Marse, Veneroje ir kitur. Taip gauname 3×3 galimybes – devynis nesikertančius visų ateivių aibės poaibius (žr. pav.).

	Marsas	Venera	Kitur
Žali	1	~~2~~	~~3~~
Raudoni	4	5	6
Kitokie	~~7~~	~~8~~	~~9~~

Teiginys 1) sako, kad ateiviai yra tik žali ir raudoni, t. y. kad apatinėje eilutėje poaibiai 7, 8, 9 yra tušti, ir kad yra žalių ateivių, t. y. kad bent vienas iš poaibių 1, 2, 3 netuščias. Teiginys 2) sako, kad viršutinėje lentelės eilutėje nebent tik poaibis 1 yra netuščias. Vadinasi, poaibis 1 netuščias, o poaibiai 2 ir 3 tušti. Kiekvienas iš poaibių 4, 5, 6 gali būti tuščias arba ne. Apie juos sąlygos teiginiai nieko nesako.

Atsakymas **A** teigia, kad tik kairiajame stulpelyje poaibiai gali būti netušti. Tačiau ir poaibiai 5 bei 6 gali būti netušti (gali būti raudonų ateivių, gyvenančių Veneroje ar kitur).

Atsakymas **B** teigia, kad kairiajame stulpelyje tik poaibis 1 gali būti netuščias. Tačiau ir poaibis 4 gali būti netuščias (gali būti raudonų ateivių, gyvenančių Marse).

Atsakymas **C** teigia, kad poaibis 5 netuščias. Bet jis gali būti ir tuščias (raudonų ateivių, gyvenančių Veneroje, gali nebūti).

Atsakymas **D** teigia, kad vidurinėje eilutėje tik poaibis 5 gali būti netuščias. Tačiau ir poaibiai 4 bei 6 gali būti netušti (gali būti raudonų ateivių, gyvenančių Marse ar kitur).

Lieka atsakymas **E**, kuris teigia, kad poaibis 2 tuščias. Atitinkamas lentelės langelis jau išbrauktas, todėl **E** išplaukia iš teiginių 1) ir 2).

7. B 15

? Iš lygybės $\overline{P45} + \overline{QRS} = 654$ gauname, kad $100P + 45 + 100Q + 10R + S = 654$ ir $100(P+Q)+$ $+10R + S = 609$. Matome, kad tinka $S = 9$, $R = 0$ ir $P + Q = 6$ (pvz., $P = Q = 3$). Gautąsias reikšmes galima greitai patikrinti, įrašant jas į duotąjį sudėties stulpeliu užrašą. Todėl tinka $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$.

Renkamės atsakymą **B**.

! Bandykime atkurti sudėties stulpeliu veiksmą: 1) randame $5+S$ ir rašome 4, todėl $5+S=14$, $S=9$ ir dešimčių skaitmenį 1 laikome mintyje; 2) randame $4+R+1$ ir rašome 5, todėl $R=0$ ir mintyje nieko nelaikome; 3) randame $P+Q$ ir rašome 6, todėl P ir Q yra bet kokie (nenuliniai) skaitmenys, kuriems $P+Q=6$. Gauname $P+Q+R+S=6+0+9=15$.

8. **B** 12

! Jei Tomas rutulius trauks 11 ar mažiau kartų, tai ištrauks daugiausiai $11\cdot 5=55$ rutulius, o dėžėje liks $65-55=10$ rutulių, tarp kurių galbūt bus visi 8 balti. Todėl 11 traukimų nepakanka.

Jei Tomas 12 kartų trauks po 5 rutulius, tai ištrauks $12\cdot 5=60$ rutulių, o dėžėje liks $65-60=5$ rutuliai. Vadinasi, mažiausiai $8-5=3$ balti rutuliai bus ištraukti. Todėl 12 traukimų pakanka.

9. **B** $\sqrt{ABC}$

? Jei $A=a$ cm^2, $B=b$ cm^2, $C=c$ cm^2, tai:

A) $ABC=abc$ cm^6;
B) $\sqrt{ABC}=\sqrt{abc\ \mathrm{cm}^6}=\sqrt{abc}$ cm^3;
C) $\sqrt{AB+BC+CA}=\sqrt{(ab+bc+ca)\ \mathrm{cm}^4}=\sqrt{ab+bc+ca}$ cm^2;
D) $\sqrt[3]{ABC}=\sqrt[3]{abc\ \mathrm{cm}^6}=\sqrt[3]{abc}$ cm^2;
E) $2(A+B+C)=2(a+b+c)$ cm^2.

Tūris turėtų būti išreikštas kubiniais centimetrais, o formulėse įrašomi bei prastinami matavimo vienetai paprastai turi atitikti tai, kas jais matuojama. Tuo remiantis, tinka tik vienas atsakymas.

Renkamės atsakymą **B**.

?? Tarkime, kad plytos matmenys (bet kokiais matavimo vienetais) yra $1\times 1\times 2$. Tada galime imti $A=1\cdot 1=1$, $B=1\cdot 2=2$, $C=1\cdot 2=2$. Pagal formulę turime gauti tūrį $1\cdot 1\cdot 2=2$. Gauname:

A) $ABC=4$;
B) $\sqrt{ABC}=\sqrt{4}=2$;
C) $\sqrt{AB+BC+CA}=\sqrt{2+4+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$;
D) $\sqrt[3]{ABC}=\sqrt[3]{4}$;
E) $2(A+B+C)=2\cdot 5=10$.

Tinka tik viena gauta reikšmė.

Renkamės atsakymą **B**.

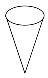
! Tarkime, kad plytos (turinčios stačiakampio gretasienio formą) matmenys (bet kokiais matavimo vienetais) yra $a\times b\times c$. Tada sienų plotai A, B, C tam tikra tvarka turi būti lygūs ab, bc, ca, o plytos tūris V lygus abc. Nesunku pastebėti, kad $ABC=ab\cdot bc\cdot ca=a^2b^2c^2=(abc)^2=V^2$. Todėl $V=\sqrt{ABC}$. Dalyje **??** įsitikinome, kad kiti reiškiniai netinka.

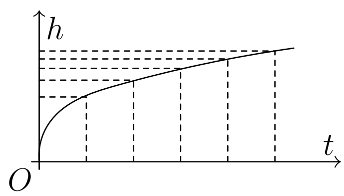
10. (**A**) 0

! Tarkime, kad skaičiai p_1 ir p_2 tenkina sąlygą. Svarbiausia atkreipti dėmesį į p_1 ir p_2 lyginumą. Jei šie pirminiai skaičiai abu nelyginiai, tai jų suma yra lyginis skaičius ir nelygi 1001. Todėl bent vienas iš skaičių p_1 ir p_2 lyginis. Tačiau vienintelis lyginis pirminis skaičius yra 2 (bet koks didesnis lyginis skaičius n turi tris skirtingus teigiamus daliklius 1, 2 ir n, todėl yra sudėtinis). Tada vienas iš skaičių p_1 ir p_2 turi būti lygus 2, o kitas turi būti lygus $1001 - 2 = 999$. Tačiau $999 = 9 \cdot 111$ yra sudėtinis skaičius. Gavome prieštarą. Vadinasi, skaičių p_1 ir p_2 porų, tenkinančių sąlygą, nėra.

11. (**B**) $V = \frac{3}{2}W$

! Paveikslėlis gali gluminti, bet jis sprendime visai nereikalingas. Kubų bendros dalies tūris, kaip jie besikirstų, lygus $100\% - 90\% = 10\%$ kubo A tūrio ir tuo pat metu $100\% - 85\% = 15\%$ kubo B tūrio. Todėl $0{,}1V = 0{,}15W$ ir $V = 0{,}15W : 0{,}1 = 1{,}5W = \frac{3}{2}W$.

12. (**D**) 



! Ką grafikas gali pasakyti apie vazos formą? Visų pirma, matome, kad kai t didėja, tai ir h didėja. Tai reiškia, kad bėgant laikui, vandens lygis vazoje kilo. Bet tai ir taip akivaizdu. Todėl toliau mums turėtų rūpėti, **kaip** h didėja.

Vandens lygis gali kilti ne tik greičiau ar lėčiau, bet greitėdamas ar lėtėdamas, t. y. h gali kisti su teigiamu ar neigiamu pagreičiu, nors greitis lieka teigiamas. Paveikslėlyje matome, kad lygio h kaip laiko t funkcijos grafikas kairėje šauna aukštyn gana stačiai, bet toliau tampa gulstesnis, kyla vis lėčiau. Šią grafiko savybę galima apibūdinti ir griežčiau: jei padalysime Ot į bet kokio ilgio lygius intervalus, tai matysime, kad per kiekvieną laiko intervalą lygis h didėjo po vis mažiau (žr. pav.). Vadinasi, lygis h didėjo lėtėdamas.

Vanduo to paties aukščio platesnę vazą pripildo lėčiau nei siauresnę. Vandens srovei tekant pastoviu greičiu, vandens lygis kyla tuo lėčiau, kuo vaza yra platesnė aukštyje, iki kurio vanduo pakilo. Kadangi vandens lygis vazoje kilo lėtėdamas, tai vaza yra platėjanti nuo apačios iki viršaus. Tokia vaza pavaizduota tik atsakyme **D**.

Pastabos. Pastebėtoji didėjančios funkcijos grafiko savybė ekvivalenti tokiai: bet kuriuos du jo taškus jungianti atkarpa yra visa po grafiku, o ne virš jo. Matematikoje sakoma: grafikas yra iškilas į viršų. Taip yra, kai funkcija didėja lėtėdama arba mažėja greitėdama (pagreitis, antroji išvestinė neigiami).

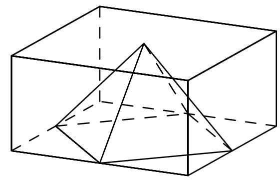
Žinant, kad vaza yra kūgio formos, galima rasti pačią funkciją $h(t)$. Jei per laiko vienetą į vazą tekėjo po c vienetų vandens, tai vandens vazoje tūris laiko momentu t buvo lygus $V = ct$. Pagal kūgio tūrio formulę turime $V = bh^3$, kur $b > 0$ yra konstanta. Tada $h(t) = a\sqrt[3]{t}$, kur $a = \sqrt[3]{\frac{c}{b}}$.

13. A 10

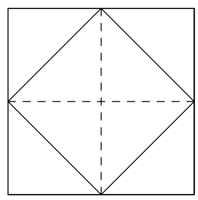
! Prisiminkime, kad $|x| = x$, kai $x > 0$, ir $|x| = -x$, kai $x < 0$. Dviejų teigiamų skaičių suma $\sqrt{17} + 5$ pati teigiama, todėl $|\sqrt{17} + 5| = \sqrt{17} + 5$. Tačiau $17 < 25$, todėl $\sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$ ir $\sqrt{17} - 5 < 0$. Gauname $|\sqrt{17} - 5| = -(\sqrt{17} - 5) = 5 - \sqrt{17}$. Vadinasi,

$$|\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5| = 5 - \sqrt{17} + \sqrt{17} + 5 = 5 + 5 = 10.$$

14. D $\frac{1}{6}$



! Atsižvelkime į duotojo kubo simetriškumą: simetrijos plokštuma, lygiagreti su dviem kubo sienomis (pvz., viršutine ir apatine) bei einanti per vidurį tarp jų, dalija kubą į du lygius stačiakampius gretasienius $1 \times 1 \times \frac{1}{2}$. Ji eina per kubo centrą, keturių kubo briaunų vidurio taškus (kvadrato 1×1 viršūnes) ir keturių kubo sienų centrus (to paties kvadrato kraštinių vidurio taškus). Todėl ši plokštuma eina per keturias oktaedro viršūnes ir dalija jį į dvi keturkampes piramides, įbrėžtas į stačiakampius gretasienius (žr. pav.).

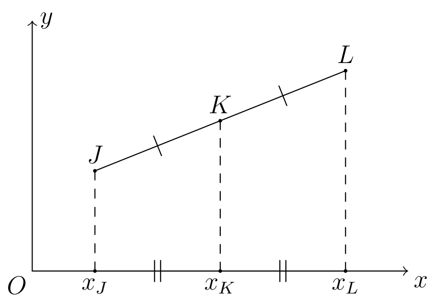


Toliau nagrinėkime bet kurią piramidę ir raskime jos tūrį V.

Prisiminkime formulę: $V = \frac{Sh}{3}$. Turime rasti piramidės pagrindo plotą S ir aukštinės ilgį h. Piramidės viršūnė ir pagrindas yra priešingose stačiakampio gretasienio $1 \times 1 \times \frac{1}{2}$ sienose 1×1. Todėl h yra atstumas tarp šių sienų $\frac{1}{2}$. Piramidės pagrindas yra keturkampis, gaunamas sujungus kvadrato 1×1 kraštinių vidurio taškus (žr. pav.). Jo plotą $\frac{1}{2}$ galima rasti įvairiai: verta pastebėti, kad tai yra kvadratas, ir tada galima rasti jo kraštinės ilgį; galima prisiminti, kad rombo plotas lygus pusei įstrižainių ilgių sandaugos; galima padalyti kvadratą 1×1 į 8 lygius trikampėlius, ir pan. Šiaip ar taip, $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Analogiškai ir kitos piramidės tūris lygus $\frac{1}{12}$. Tada oktaedro tūris lygus $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

15. E Kitam skaičiui



? Sprendžiant šį uždavinį, svarbu suvokti, kaip atkarpos vidurio taško koordinatės susijusios su atkarpos galų koordinatėmis. Ir nežinant galima numanyti, kad jei taškas yra per vidurį tarp dviejų taškų, tai jo x koordinatė Ox ašyje yra per vidurį tarp tų dviejų taškų x koordinačių (žr. pav.). Pvz., per vidurį tarp taškų $(3; 2)$ ir $(5; 2)$ yra taškas $(4; 2)$, o per vidurį tarp taškų $(4; 4)$ ir $(6; 6)$ yra taškas $(5; 5)$. Beje, prisiminus, kad x koordinatė gaunama, iš taško nuleidus statmenį į ašį, ši atkarpos vidurio taško savybė yra tiesioginė Talio teoremos apie lygiagrečias tieses išvada. Žinoma, tas pats tinka ir y koordinatėms.

Kadangi taškas $M(-2; 1)$ yra per vidurį tarp taškų $A(p; q)$ ir $B(r; s)$, tai skaičių tiesėje taškas -2 yra per vidurį tarp taškų p ir r. Kitaip tariant, jis yra jų aritmetinis vidurkis: $\frac{p+r}{2} = -2$. Analogiškai gauname, kad $\frac{q+s}{2} = 1$, $\frac{r+t}{2} = 2$, $\frac{s+u}{2} = -1$, $\frac{t+p}{2} = 3$, $\frac{u+q}{2} = 2$. Ieškoti koordinačių reikšmių nebūtina. Gautosiose 6 lygybėse kairėje pusėje kiekvienas iš p, q, r, s, t, u pasikartoja po du kartus, todėl sudėjus lygybes kairėje gaunamas reiškinys $\frac{2p+2q+2r+2s+2t+2u}{2} = p + q + r + s + t + u$. Jis turi būti lygus dešinėje gaunamai skaičių sumai $(-2) + 1 + 2 + (-1) + 3 + 2 = 5$.

Renkamės atsakymą **E**.

! Pasinaudokime vektoriais. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AM}$ yra vienakrypčiai, tik vienas perpus trumpesnis, todėl $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. Tada

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA},$$

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Analogiškai gauname, kad $2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ir $2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$. Tada

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) = \\ &= 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \end{aligned}$$

$$(3;2) = (-2;1) + (2;-1) + (3;2) = (p;q) + (r;s) + (t;u) = (p+r+t; q+s+u),$$

$$p+q+r+s+t+u = (p+r+t) + (q+s+u) = 3+2 = 5.$$

Beje, iš gautųjų lygybių galima rasti ir pačius taškus A, B, C. Pvz., $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}$ ir $(p;q) = (-1;4)$. Analogiškai $(r;s) = (-3;-2)$, $(t;u) = (7;0)$.

16. (**C**) 1 : 2

? Tikrinkime atsakymus **A**-**D**. Jei jie teisingi, tai iš penkių prognozių 1, 2, 3, 4 ir 5 pasitvirtino prognozės: **A)** 1, 2, 3, 4, 5; **B)** 1, 2, 3, 4, 5; **C)** 1, 2, 5; **D)** 1, 5. Lygiai trys prognozės pasitvirtino, jei teisingas atsakymas **C**. Jei rungtynių rezultatas yra 1 : 2, tai sąlyga tenkinama.

Renkamės atsakymą **C**.

! Jei „Real“ laimėjo, tai pasitvirtino pirmosios keturios prognozės. Jei rungtynės baigėsi lygiosiomis, tai net trys – pirmoji, trečioji ir penktoji – prognozės nepasitvirtino (lygiosios reiškia, kad niekas nelaimėjo ir kad įmušta lyginis skaičius įvarčių).

Vadinasi, „Real“ pralaimėjo. Tada trečioji bei ketvirtoji prognozės nepasitvirtino, o likusios trys prognozės turėjo pasitvirtinti: „Real“ įmušė bent vieną įvartį iš lygiai trijų įmuštųjų. Kadangi „Real“ pralaimėjo, tai įmušė mažiau nei pusę įvarčių – lygiai vieną, o „United“ įmušė įvartį $3 - 1 = 2$ kartus.

Gautasis rungtynių rezultatas 1 : 2 tenkina sąlygą.

17. (**D**) 15/8

? Prisiminus formulę $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ir palyginus ją su lygybe $f(x+y) = f(x)f(y)$, galima būtų susimąstyti: o ar negali būti, kad $f(x) = a^x$ su visais sveikaisiais x? Tada $1/2 = f(1) = a^1 = a$ ir gauname funkciją $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, tenkinančią abi sąlygas $f(x+y) = f(x)f(y)$ bei $f(1) = 1/2$.

Tada $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$.

Renkamės atsakymą **D**.

! Lygybėje $f(x+y) = f(x)f(y)$ rinkimės tokias sveikąsias x ir y reikšmes, kad dvi iš trijų reikšmių $f(x), f(y), f(x+y)$ jau būtų žinomos, ir taip rasime trečiąją:

kai $x = y = 1$, tai $f(2) = f(1)f(1) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$;

kai $x = 1$, $y = 2$, tai $f(3) = f(1+2) = f(1)f(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;

kai $x = 1$, $y = 0$, tai $\frac{1}{2} = f(1) = f(1+0) = f(1)f(0) = \frac{f(0)}{2}$ ir $f(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Todėl $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$.

Pastebėkime, kad jei imtume $x = y = 0$, tai gautume $f(0) = f^2(0)$ ir dar galėtume dvejoti, ar $f(0) = 1$, ar $f(0) = 0$, sugaištume daugiau laiko.

18. (C) 28

? Turime, kad

$$18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017} + 18^{2017} \cdot 18 = 18^{2017} \cdot (1+18) = 18^{2017} \cdot 19 =$$

$$= 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 18 \cdot 19.$$

Jei šis skaičius dalytųsi iš $28 = 7 \cdot 4$, tai dalytųsi ir iš 7. Kadangi skaičius 7 pirminis, tai iš 7 turėtų dalytis bent vienas iš dauginamųjų 18 ir 19. Taip nėra, todėl duotasis skaičius nesidalija iš 28.

Renkamės atsakymą **C**.

! Dalyje **?** jau patikrinome, kad atsakymas **C** tinka.

Jį galima pasirinkti, ir lengvai atmetus kitus keturis atsakymus. Padarykime tai ir taip užbaikime **?** dalies sprendimą.

Kadangi $18^{2017} = (2 \cdot 3^2)^{2017} = 2^{2017} \cdot 3^{2 \cdot 2017}$, tai šis skaičius dalijasi iš skaičių $8 = 2^3$, $18 = 2 \cdot 3^2$ ir $48 = 2^4 \cdot 3$. Todėl iš jų dalijasi ir

$$18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017} + 18^{2017} \cdot 18 = 18^{2017} \cdot (1+18) = 18^{2017} \cdot 19.$$

Kadangi šis skaičius dalijasi iš $18 \cdot 19 = 9 \cdot (2 \cdot 19)$, tai dalijasi ir iš $38 = 2 \cdot 19$.

Vadinasi, atsakymai **A**, **B**, **D** ir **E** netinka, ir atsakymas **C** yra vienintelis teisingas.

19. (B) 13

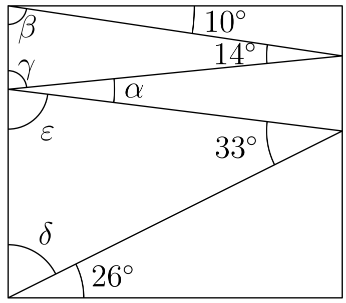
! Atkreipkime dėmesį į dviejų sandaugų sumos lyginumą. Suma yra pirminis skaičius ir, žinoma, didesnė už 2. Todėl ji yra nelyginis skaičius. Jei lyginiai skaičiai 4 ir 6 atitektų vienas Mildai, o kitas Meilei, tai abi sandaugos, o tada ir jų suma būtų lyginiai skaičiai. Vadinasi, skaičiai 4 ir 6 abu atiteko Mildai arba abu Meilei.

Analogiškai, jei skaičiai 3 ir $6 = 2 \cdot 3$ atitektų vienas Mildai, o kitas Meilei, tai abi sandaugos, o tada ir jų suma, didesnė už 3, dalytųsi iš 3. Suma nebūtų pirminis skaičius, todėl skaičiai 3 ir 6 abu atiteko Mildai arba abu Meilei.

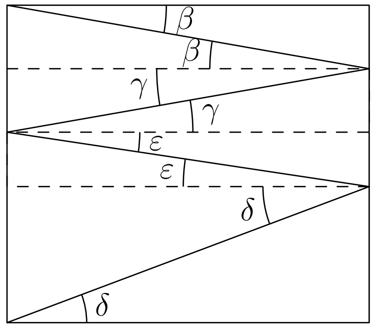
Vadinasi, skaičiai 3, 4 ir 6 buvo sudauginti. Jie turi būti ant trijų Mildos kortų. Jų suma lygi $3 + 4 + 6 = 13$.

Beje, galime rasti ir dviejų sandaugų sumą $3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 107$. Ji iš tiesų yra pirminis skaičius.

20. **(A)** 11°



! Pažymėkime kampus, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada $\beta = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$ ir $\gamma = 180^\circ - \beta - 14^\circ = 86^\circ$. Analogiškai $\delta = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$ ir $\varepsilon = 180^\circ - \delta - 33^\circ = 83^\circ$. Kampai α, γ ir ε sudaro ištiestinį kampą, todėl $\alpha = 180^\circ - \gamma - \varepsilon = 11^\circ$.



!! Nubrėžkime tris atkarpas, lygiagrečias su stačiakampio kraštinėmis, ir pažymėkime lygius priešinius kampus, kaip parodyta paveikslėlyje. Iš pradinio brėžinio žinome, kad $\beta = 10^\circ$, $\beta+\gamma = 14^\circ$, $\delta = 26^\circ$, $\delta + \varepsilon = 33^\circ$ ir $\gamma + \varepsilon = \alpha$. Todėl $\gamma = 14^\circ - 10^\circ = 4^\circ$, $\varepsilon = 33^\circ - 26^\circ = 7^\circ$ ir $\alpha = 4^\circ + 7^\circ = 11^\circ$.

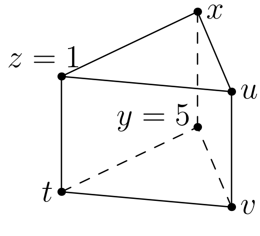
!!! Nagrinėkime tiesę, kuriai priklauso viršutinė stačiakampio kraštinė. Pasukę ją apie tašką (stačiakampio viršūnę) 10° kampu pagal laikrodžio rodyklę, gausime tiesę, kuriai priklauso viršutinė laužtės atkarpa. Toliau pasukus tiesę apie kitą tašką 14° kampu prieš laikrodžio rodyklę, tiesei jau priklausys antroji laužtės atkarpa. Toliau sukame tiesę kampu α pagal laikrodžio rodyklę, 33° kampu prieš laikrodžio rodyklę, 26° kampu pagal laikrodžio rodyklę taip, kad tiesei priklausytų iš eilės kiekviena laužtės atkarpa, o galop – apatinė stačiakampio kraštinė.

Tiesę pastūmėme, bet nekreipkime dėmesio į jos tikslią padėtį, o vien į posvyrį, kuris priklauso tik nuo to, kokiu kampu sukome. Iš viso pasukome tiesę $10^\circ - 14^\circ + \alpha - 33^\circ + 26^\circ = \alpha - 11^\circ$ kampu pagal laikrožio rodyklę ir gavome lygiagrečią tiesės padėtį, lyg jos nebūtume sukę apskritai. Taip gali nutikti, tik jei tiesė pasukta $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \ldots$ kampu. Kadangi $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, tai $\alpha - 11^\circ = 0^\circ$ ir $\alpha = 11^\circ$.

21. **(A)** 2

? Šešis skaičius galima padalyti į poras, kad kiekvienos poros skaičių suma būtų ta pati: $1+6 = 2+5 = 3+4 (= 7)$. Jei kiekvienos iš prizmės trijų vertikalių briaunų galuose įrašytume porą sudarančius skaičius, tai kiekvienos kvadratinės sienos viršūnėse būtų dvi skaičių poros, kurių suma lygi $7 + 7 = 14$. Kadangi skaičiai x ir 5 yra vienos tokios briaunos galuose, tai galime imti $x = 7 - 5 = 2$.

Renkamės atsakymą **A**.



! Skaičius prizmės viršūnėse pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje.

Kvadratinių sienų skaičių sumos lygios $x + y + z + t$, $z + t + u + v$, $u+v+x+y$. Kadangi $x+y+z+t = z+t+u+v$ ir $u+v+x+y = z+t+u+v$, tai $x + y = u + v$ ir $x + y = z + t$. Vadinasi,

$$3(x + y) = (x + y) + (z + t) + (u + v) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

$$x + y = 21 : 3 = 7 \text{ ir } x = 7 - y = 7 - 5 = 2.$$

22. (D) 2019

! Galima rasti duotosios lygties sprendinius $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2018}}{2}$, įrašyti juos į reiškinį $x_1^2 + x_2$, o tada bandyti jį suprastinti. Tačiau paprasčiau prisiminti Vijeto teoremą, pagal kurią $x_1 + x_2 = 1$ ir todėl

$$x_1^2 + x_2 = x_1^2 + (1 - x_1) = (x_1^2 - x_1) + 1.$$

Kadangi x_1 yra duotosios lygties sprendinys, tai $x_1^2 - x_1 = 2018$ ir $x_1^2 + x_2 = (x_1^2 - x_1) + 1 = 2018 + 1 = 2019$.

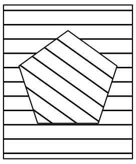
Šis sprendimas parodo, kodėl atsakymas nepakinta, sukeitus x_1 ir x_2 vietomis.

23. (B) B

! Jei C neapsiriko, tai jis ir yra aukščiausias. Bet jei apsiriko, tai jis nėra aukščiausias, o kiti broliai pasakė tiesą: A yra nei toks, nei toks, o D yra žemiausias. Tada C yra nei toks, nei toks, o aukščiausiu broliu tegali būti B. Pastebėkime, kad pastaroji situacija tenkina uždavinio sąlygą. Tačiau jei yra galima situacija, kai C neapsiriko, tai teisingas atsakymas **E** (aukščiausiu broliu gali būti tiek B, tiek C).

Tarkime, C neapsiriko. Jei D neapsiriko, tai aukščiausias ir žemiausias broliai yra C ir D, o A ir B yra nei tokie, nei tokie. Tačiau tada niekas neapsiriko. Todėl D apsiriko, o A ir B pasakė tiesą. Tačiau tada joks brolis nėra žemiausias. Gavome prieštarą.

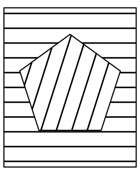
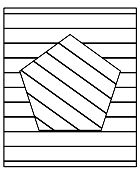
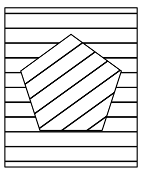
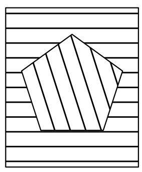
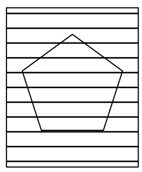
Vadinasi, C apsiriko, o aukščiausiu broliu tegali būti B.

24. (B) 

! Jei taisyklingojo penkiakampio centrą sujungiame su viršūnėmis, tai atkarpos dalija pilnąjį kampą į 5 lygias dalis, po $360° : 5 = 72°$. Todėl penkiakampis uždengtų skylę, jei iš savo pradinės padėties būtų pasuktas $72°$, $2 \cdot 72°$, $3 \cdot 72°$, ... kampu.

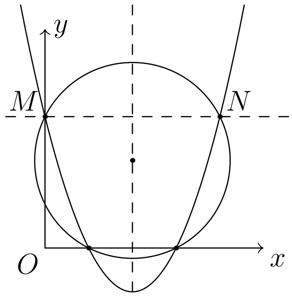
Nustatykime, kiek kartų reikia pasukti penkiakampį per $21°$, kad jis pirmą kartą uždengtų skylę. Po n posūkių penkiakampis pasuktas $n \cdot 21°$ kampu. Turime nustatyti mažiausią n reikšmę, su kuria $n \cdot 21°$ priklauso sekai $72°$, $2 \cdot 72°$, $3 \cdot 72°$, ... Kitaip tariant, turime rasti mažiausią natūralųjį n, tenkinantį lygtį $21n = 72m$ su kokiu nors natūraliuoju m.

Padalykime lygtį iš 3: $7n = 24m$. Matome, kad m dalijasi iš 7. Tarkime, kad $m = 7k$. Tada $n = 24k$. Mažiausia galima n reikšmė yra 24, gaunama, kai $k = 1$ ir $m = 7$. Vadinasi, penkiakampį turime pasukti $24 \cdot 21°$ kampu, ir tai yra tas pats, kaip pasukti jį $7 \cdot 72°$ kampu.

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Posūkį per $72°$ nagrinėti paprasčiau, todėl bandykime sukti penkiakampį 7 kartus $72°$ kampu. Pasukę penkiakampį $5 \cdot 72° = 360°$ kampu, grįšime į pradinę padėtį, pavaizduotą atsakyme **E**. Iš šios padėties dar turime jį pasukti $2 \cdot 72°$ kampu prieš laikrodžio rodyklę, t. y. per pilnojo kampo du penktadalius. Pasukę per penktadalį, gausime atsakymą **A**, o dar per penktadalį – atsakymą **B**. Tai ir yra ieškoma penkiakampio padėtis.

25. (**C**) $(-p; q)$



? Bandant įsivazduoti funkcijos grafiko – parabolės – ir apskritimo tarpusavio padėtį, galima nujausti, kad apskritimas ir parabolė turi bendrą vertikalią simetrijos ašį, o ieškomas taškas N yra šios ašies atžvilgiu simetriškas parabolės ir Oy sankirtai M (žr. pav.). Funkcijos f grafiko ir Oy sankirtos taškas gaunamas, paėmus $x = 0$, t. y. $M = (0; f(0)) = (0; q)$. Kadangi M ir N yra vienoje horizontalėje, tai $N = (?; q)$. Tokie yra atsakymai **B** ir **C**.

Pateiktas paveikslėlis tėra uždavinio situacijos pavyzdys, bet vis tiek gali padėti pasirinkti atsakymą. Čia $q > 0$ (taškas M yra virš Ox), ir jei $p \geqslant 0$, tai $f(x) > 0$, kai $x > 0$. Tačiau pavyzdyje dalis parabolės yra po Ox ašimi, kai $x > 0$. Todėl $p < 0$, o iš taškų $(p; q)$ ir $(-p; q)$ turime rinktis tą, kurio x koordinatė teigiama (taip yra pavyzdyje). Vadinasi, $N = (-p; q)$.

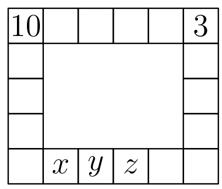
Renkamės atsakymą **C**.

! Funkcijos f grafiko (parabolės) ir Oy sankirtą gausime, paėmę $x = 0$. Tada $y = f(0) = q$, ir turime vienintelį sankirtos tašką $M(0; q)$. Dar du sankirtos taškus turime gauti Ox ašyje, paėmę $f(x) = y = 0$, todėl lygtis $0 = x^2 + px + q$ turi du sprendinius x_1 ir x_2. Parabolės simetrijos ašis yra statmena Ox ašiai ir eina per vidurį tarp atitinkamų sankirtos taškų $P(x_1; 0)$ ir $Q(x_2; 0)$.

Apskritimas yra simetriškas kiekvieno savo skersmens atžvilgiu. Apskritimo stygai PQ statmenas skersmuo dalija ją pusiau, todėl yra parabolės simetrijos ašyje. Vadinasi, parabolė ir apskritimas turi bendrą simetrijos ašį. Tada ir jų sankirtos taškai turi būti simetriški šios ašies atžvilgiu. Kadangi taškai P ir Q jau simetriški, tai turi būti ketvirtasis sankirtos taškas N, simetriškas taškui M. Simetrijos ašis vertikali, todėl M ir N yra vienoje horizontalėje. Gauname $N = (x_0; q)$.

Simetrijos ašis eina per parabolės viršūnę, kur funkcija f įgyja minimumą. Viršūnės x koordinatę galima rasti iš $0 = f'(x) = 2x + p$. Tada $x = -\frac{p}{2}$ yra per vidurį tarp taškų M ir N pirmųjų koordinačių 0 ir x_0. Vadinasi, $x_0 = -p$ ir $N = (-p; q)$.

26. (**A**) 7



! Tarkime, kad langeliuose iš eilės ratu įrašyti skaičiai a, b, c, d. Tada $b = a + c$, $c = b + d$, todėl $c = b - a$, $d = c - b = -a$. T. y. bet kuriuose langeliuose, kuriuos einant ratu skiria du langeliai, skaičiai a ir d turi būti priešingi. Tada kas šeštame langelyje įrašytas tas pats skaičius. Todėl $y = 10$, $z = 3$ (žr. pav.). Kadangi $y = x + z$, tai $x = y - z = 7$.

(Beje, langelius įmanoma užpildyti vieninteliu būdu: 6 skaičiai 3, 10, 7, -3, -10, -7 iš eilės ratu užrašomi tris kartus.)

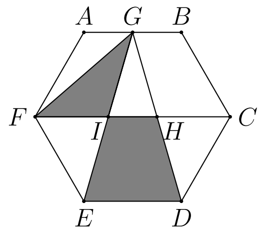
27. (B) 3

! Lygybė $|x| = a$ tenkinama, kai $x = a$ arba $x = -a$. Todėl lygybė $\Big||4^x - 3| - 2\Big| = 1$ reiškia, kad $|4^x - 3| - 2 = 1$ arba $|4^x - 3| - 2 = -1$. Tada $|4^x - 3| = 3$ arba $|4^x - 3| = 1$. Pirmuoju atveju $4^x - 3 = 3$ arba $4^x - 3 = -3$. Antruoju atveju $4^x - 3 = 1$ arba $4^x - 3 = -1$. Vadinasi, $4^x = 6$, 0, 4 arba 2.

Funkcija 4^x didėja ir įgyja tik teigiamas reikšmes, kiekvieną po vieną kartą, kai x didėja nuo $-\infty$ iki $+\infty$. Todėl trys iš gautųjų lygčių turi po vieną sprendinį ($x = \log_4 6, x = 1, x = \frac{1}{2}$), o lygtis $4^x = 0$ sprendinių neturi.

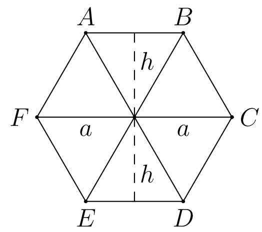
Iš viso gauname 3 sprendinius.

28. (A) $\frac{1}{2}$



? Šešiakampio kraštinės ilgį pažymėkime a.

Brėžinyje lengva pastebėti, kad įstrižainė FC yra lygiagreti su kraštinėmis AB ir ED bei nutolusi nuo kiekvienos iš jų tuo pačiu atstumu h. Todėl trikampio GIF ir trapecijos $IHDE$ aukštinių ilgiai yra h, o jų plotai lygūs atitinkamai $S_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot FI$ ir $S_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (IH + ED)$. Gauname $S_1 : S_2 = FI : (IH + ED)$.



Kadangi atkarpa IH eina per vidurį tarp taško G ir atkarpos ED, tai ji turėtų būti trikampio EGD vidurio linija. Vadinasi, $IH = \frac{a}{2}$. Sunkiau pastebėti, kad taisyklingąjį šešiakampį galima padalyti į 6 lygius lygiakraščius trikampius, kurių kraštinių ilgis yra a, ir kad todėl $FC = 2a$ (žr. pav.). Kadangi atkarpos FI ir HC lygios (dėl regimos brėžinio simetrijos), tai $2a = FC = FI + IH + HC = FI + \frac{a}{2} + FI$ ir $FI = (2a - \frac{a}{2}) : 2 = \frac{3a}{4}$.

Vadinasi, $S_1 : S_2 = FI : (IH + ED) = \frac{3a}{4} : (\frac{a}{2} + a) = \frac{3a}{4} : \frac{3a}{2} = \frac{1}{2}$.

! Šešiakampio kraštinės ilgį pažymėkime a.

Kiekvienas taisyklingasis daugiakampis turi centrą. Tiksliau, apibrėžtinio apskritimo centrą, kurį sujungus su daugiakampio viršūnėmis daugiakampis padalijamas į lygius lygiašonius trikampius. Taisyklingojo šešiakampio atveju tie lygiašoniai trikampiai turi po $360° : 6 = 60°$ kampą, jų kampai prie pagrindo lygūs $(180° - 60°) : 2 = 60°$. Todėl tie trikampiai lygiakraščiai, jų kraštinių ilgis yra a. Kiekvieno iš jų aukštinės ilgį pažymėkime h.

Tai pastebėjus, lengva įsitikinti, kad: 1) šešiakampis turi šešias simetijos ašis ir kad dėl vienos iš simetrijų trikampiai GIF ir GHC lygūs; 2) įstrižainę FC sudaro dvi lygiakraščių trikampių kraštinės ir kad todėl $FC = 2a$; 3) atstumai nuo taško G iki atkarpų FC ir ED atitinkamai lygūs h ir $2h$.

Nagrinėkime trikampius FGC ir EGD. Jų pagrindų ilgiai atitinkamai lygūs $FC = 2a$ ir $ED = a$, o aukštinių, nuleistų į tuos pagrindus, ilgiai atitinkamai lygūs h ir $2h$. Todėl šių trikampių plotai lygūs: $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2h$. Plotai lygūs ir be bendros šių trikampių dalies (trikampio IGH): lygių trikampių GIF ir GHC plotų suma lygi trapecijos $IHDE$ plotui. Vadinasi, trikampio GIF plotas lygus pusei trapecijos $IHDE$ ploto. Ieškomas plotų santykis lygus $\frac{1}{2}$.

29. Ⓒ 36

? Berniukų, mergaičių ir bendrą vaikų skaičių klasėje pažymėkime atitinkamai b, m ir s. Tada $m = b + \frac{40\%}{100\%}b = 1{,}4b$ ir $s = m + b = 2{,}4b = \frac{24b}{10} = \frac{12b}{5}$. Kadangi $5s = 12b$, tai s dalijasi iš 12. Tada teisingas gali būti tik atsakymas **B**, **C** arba **E**.

Jei $s = 36$, tai $b = 5s : 12 = 15$ ir $m = 36 - 15 = 21$. Mokinių porą galima parinkti iš viso $C_{36}^2 = \frac{36\cdot 35}{2} = 18 \cdot 35$ būdų, o berniuko ir mergaitės porą – $15 \cdot 21$ būdų. Tikimybė, kad klasės mokinių atsitiktinėje poroje yra berniukas ir mergaitė, lygi $\frac{15\cdot 21}{18\cdot 35} = \frac{3\cdot 5\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{2}$. Be to, mergaičių yra $6 = 15 \cdot 0{,}4$ daugiau, t. y. 40% daugiau, nei berniukų. Vadinasi, uždavinio situacija galima, kai $s = 36$.

Renkamės atsakymą **C**.

! Berniukų, mergaičių ir bendrą vaikų skaičių klasėje pažymėkime atitinkamai b, m ir s. Tada $m = b + \frac{40\%}{100\%}b = 1{,}4b$ ir $s = m + b = 2{,}4b = \frac{24b}{10} = \frac{12b}{5}$. Gauname, kad $b = \frac{5b}{12}$ ir $m = s - b = \frac{7s}{12}$.

Mokinių porą galima parinkti iš viso $C_s^2 = \frac{s(s-1)}{2}$ būdų, o berniuko ir mergaitės porą – $b \cdot m$ būdų. Tikimybė, kad klasės mokinių atsitiktinėje poroje yra berniukas ir mergaitė, lygi $\frac{1}{2} = bm : \frac{s(s-1)}{2}$. Todėl $s(s-1) = 4mb = 4 \cdot \frac{5s}{12} \cdot \frac{7s}{12} = \frac{4\cdot(5\cdot 7)\cdot s^2}{12\cdot 12} = \frac{35s^2}{3\cdot 12} = \frac{35s^2}{36}$ ir $s - 1 = \frac{35s}{36}$. Vadinasi, $1 = s - \frac{35s}{36} = \frac{s}{36}$ ir $s = 36$. Kad ši reikšmė yra galima, jau patikrinome **?** dalyje.

30. Ⓔ 3 ir 8

? Sandaugoje $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15$ yra 3 dauginamieji, dalūs iš 5, ir nė vienas nesidalija iš 5^2, todėl sandauga dalijasi iš 5^3, bet ne iš 5^4. Tuo labiau ji nesidalija iš 10^4 ir negali baigtis keturiais nuliais. Dėl to netinka atsakymas **A**.

Skaičius 15! dalijasi iš 9, todėl jo skaitmenų suma taip pat dalijasi iš 9. Dėl to netinka atsakymas **B**.

Skaičius

$$15! = 1\blacksquare 0767436\blacksquare 000 = 1\blacksquare 0767436\blacksquare \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

dalijasi iš $4 \cdot 8 = 2^5$, todėl $1\blacksquare 0767436\blacksquare = 1\blacksquare 076743 \cdot 100 + 6\blacksquare$ dalijasi iš $2^2 = 4$. Tada iš 4 dalijasi ir $6\blacksquare$. Dėl to netinka atsakymai **C** ir **D**.

Renkamės atsakymą **E**.

! Pažymėkime ieškomus skaitmenis x ir y. Pažymėkime

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 12 \cdot 10, \qquad b = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 42 \cdot 72 \cdot 10,$$

$$c = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 11 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 5 = 66 \cdot 13 \cdot 42 \cdot 10.$$

Tada $15! = abc = 10^3 \cdot 12 \cdot 42 \cdot 72 \cdot 66 \cdot 13 \cdot 42$ ir

$$1\blacksquare 0767436\blacksquare = 12 \cdot 42 \cdot 72 \cdot 66 \cdot 13 \cdot 42.$$

Paskutinis sandaugos skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutiniųjų skaitmenų, todėl skaičiaus $1\blacksquare 0767436\blacksquare$ paskutinis skaitmuo y sutampa su skaičiaus $2\cdot 2\cdot 2\cdot 6\cdot 3\cdot 2 = 48\cdot 6$ paskutiniuoju skaitmeniu, o šis – su skaičiaus $8 \cdot 6$ paskutiniuoju skaitmeniu 8. Skaičius 15! dalijasi iš 9, todėl jo skaitmenų suma $1+x+0+7+6+7+4+3+6+y+0+0+0 = 34+x+y = 42+x$ taip pat dalijasi iš 9. Tinka tik $x = 3$.

Gavome, kad $x = 3$ ir $y = 8$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	A
2	D
3	B
4	D
5	C
6	E
7	B
8	B
9	B
10	A
11	B
12	D
13	A
14	D
15	E
16	C
17	D
18	C
19	B
20	A
21	A
22	D
23	B
24	B
25	C
26	A
27	B
28	A
29	C
30	E