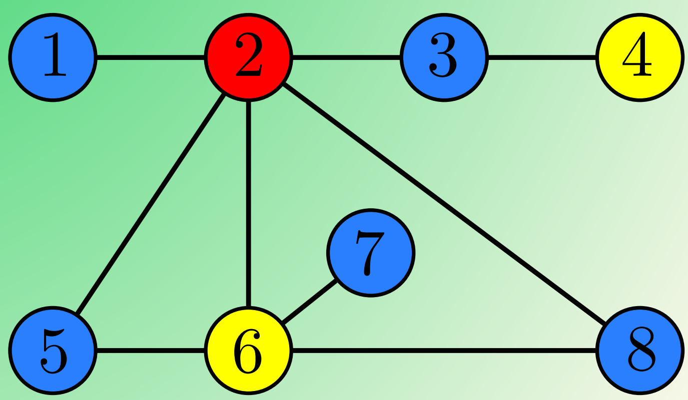
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Kadetas



Užduotys ir sprendimai

2019

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. Kadetas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Drungilas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus". Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 43000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

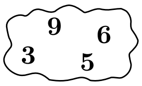
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

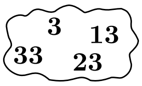
Organizatoriai

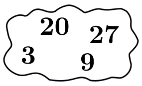
2019 m. *Kadeto* užduočių sąlygos

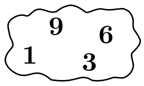
Klausimai po 3 taškus

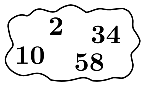
1. Kuriame debesėlyje parašyti vien tik lyginiai skaičiai?

A) 

B) 

C) 

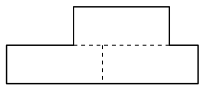
D) 

E) 

2. Dešimt ketvirčių valandos yra
A) 5 val. **B)** 5 su puse val. **C)** 4 val. **D)** 3 val. **E)** 2 su puse val.

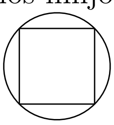
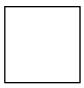
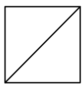
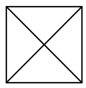
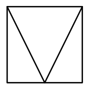
3. Kuri iš trupmenų nelygi jokiai iš likusiųjų?
A) $\frac{30 \cdot 50}{40 \cdot 70}$ **B)** $\frac{60 \cdot 50}{40 \cdot 140}$ **C)** $\frac{3 \cdot 500}{400 \cdot 7}$ **D)** $\frac{6 \cdot 50}{8 \cdot 70}$ **E)** $\frac{60 \cdot 50}{8 \cdot 70}$

4. Paveikslėlyje pavaizduota figūra sudaryta iš trijų vienodų stačiakampių. Kiekvieno stačiakampio perimetras lygus 14, o plotas lygus 10. Kam lygus paveikslėlyje pavaizduotos figūros perimetras?



A) 28 **B)** 32 **C)** 35 **D)** 42 **E)** Neįmanoma nustatyti

5. Kurios figūros neįmanoma nubrėžti neatkeliant pieštuko nuo popieriaus lapo ir nebrėžiant tos pačios linijos dukart?

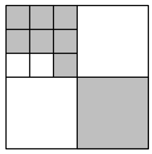
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

6. Susitiko penkios draugės. Kiekviena iš jų davė po saldainį kiekvienai kitai. Tada kiekviena suvalgė visus iš draugių gautus saldainius, ir bendras visų penkių draugių iš pradžių turėtų saldainių skaičius sumažėjo perpus. Kiek saldainių draugės turėjo kartu iš pradžių?
A) 20 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 60

7. Penki draugai dalyvavo bėgimo varžybose. Ignas finišavo anksčiau už Simoną, Adomas – vėliau už Romą, Simonas – anksčiau už Romą, o Jonas – anksčiau už Adomą. Kuris iš draugų finišavo paskutinis?
A) Adomas **B)** Simonas **C)** Ignas **D)** Romas **E)** Jonas

8. Elena skaito knygą, kurios visi puslapiai sunumeruoti. Skaitmuo 0 puslapių numeriuose pasitaiko lygiai penkis kartus, o skaitmuo 8 – lygiai šešis kartus. Koks yra paskutiniojo knygos puslapio numeris?
A) 60 **B)** 48 **C)** 58 **D)** 68 **E)** 88

9. Didysis kvadratas padalintas į mažesnius kvadratus, ir kai kurie iš jų užtušuoti (žr. pav.). Kokia didžiojo kvadrato dalis yra užtušuota?



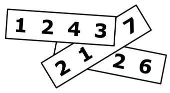
A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{5}{12}$

10. Ant žemės po obelimi gulėjo daug obuolių. Julija surinko dalį obuolių ir sudėjo juos į šešis savo krepšelius, po tiek pat obuolių į kiekvieną krepšelį. Raminta surinko tiek pat obuolių kaip ir Julija, bet sudėjo juos į penkis savo krepšelius, po tiek pat obuolių į kiekvieną. Kiekviename Ramintos krepšelyje buvo dviem obuoliais daugiau negu kiekviename Julijos krepšelyje. Kiek obuolių surinko Julija?

A) 60 **B)** 65 **C)** 70 **D)** 75 **E)** 80

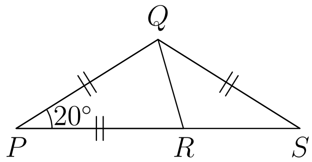
Klausimai po 4 taškus

11. Trijose juostelėse parašyta po keturženklį skaičių. Visų trijų skaičių suma lygi 10126. Paveikslėlyje trys skaitmenys uždengti. Kokie tai skaitmenys?



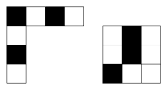
A) 3, 5 ir 6 **B)** 4, 5 ir 6 **C)** 4, 5 ir 7 **D)** 4, 6 ir 7 **E)** 5, 6 ir 7

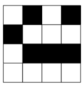
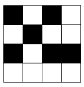
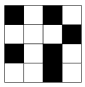
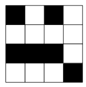
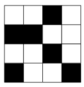
12. Trikampio PQS kraštinėje PS pažymėtas taškas R. Žinoma, kad $PQ = PR = QS$ ir $\angle QPS = 20°$ (žr. pav.). Kam lygus kampas RQS?



A) 50° **B)** 75° **C)** 45° **D)** 60° **E)** 70°

13. Kurio kvadrato neįmanoma gauti suglaudus dvi figūras, pavaizduotas paveikslėlyje?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

14. Susitiko Jonas, Simonas, Jokūbas, Adomas ir Ignas. Kiekvienas jų paspaudė ranką kiekvienam, kurį pažįsta. Jonas paspaudė ranką vieną kartą, Simonas – du kartus, Jokūbas – tris, o Adomas – keturis kartus. Kiek kartų ranką paspaudė Ignas?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

15. Adomas treniruojasi krepšinio rungtynėms. Po 20 metimų paaiškėjo, kad lygiai 55% metimų buvo taiklūs. Dar po 5 metimų paaiškėjo, kad iš viso lygiai 56% metimų buvo taiklūs. Keli iš paskutinių penkių Adomo metimų buvo taiklūs?

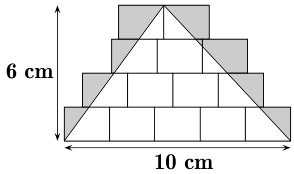
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

16. Operacija $*$ apibrėžta lygybe $a * b = b - a$. Kurios išraiškos reikšmė didžiausia?

A) $(1 * 2) * (3 * 4)$ **B)** $1 * ((2 * 3) * 4)$ **C)** $1 * (2 * (3 * 4))$ **D)** $((1 * 2) * 3) * 4$
E) $(1 * (2 * 3)) * 4$

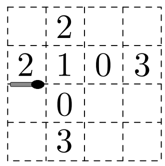
17. Pranas augina gyvūnus: šunis, kates, karves ir kengūras. Iš viso Pranas augina 24 gyvūnus. Lygiai $\frac{1}{8}$ visų gyvūnų yra šunys, lygiai $\frac{3}{4}$ visų gyvūnų yra ne karvės ir lygiai $\frac{2}{3}$ visų gyvūnų yra ne katės. Kiek iš viso kengūrų augina Pranas?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

18. Paveikslėlyje pavaizduota figūra sudėta iš vienodų stačiakampių. Ant šios figūros nubrėžtas trikampis, kurio pagrindas lygus 10 cm, o aukštinė lygi 6 cm. Kam lygus užtušuotos figūros dalies plotas?
A) 10 cm^2 **B)** 12 cm^2 **C)** 14 cm^2 **D)** 15 cm^2 **E)** 21 cm^2



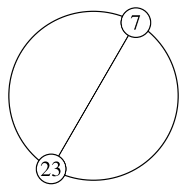
19. Agota turi dvi skirtingas ritinio formos žvakes, kurių aukščiai ir skersmenys nevienodi. Pirmoji žvakė sudega per 6 valandas, o antroji – per 8 valandas. Agota uždegė abi žvakes vienu metu ir pastebėjo, kad po 3 valandų jų aukštis buvo vienodas. Kam buvo lygus šių žvakių aukščių santykis iš pradžių?
A) $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{8}{5}$ **E)** $\frac{7}{3}$

20. Austėja turi sukonstruoti taką iš degtukų dėdama juos ant langelių kraštinių (žr. pav.). Pirmasis degtukas jau padėtas, ir takas turi pasibaigti ties to degtuko kairiuoju galu. Kai kuriuose langeliuose įrašytas skaičius nurodo, kiek degtukų turi būti ant to langelio kraštinių. Kiek mažiausiai degtukų turi toks takas?
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20



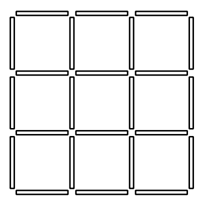
Klausimai po 5 taškus

21. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki n imtinai paeiliui vienodais atstumais surašyti ratu apie apskritimą. Apskritimo skersmuo, einantis per tą vietą, kurioje parašytas skaičius 7, eina ir per tą vietą, kurioje parašytas skaičius 23 (žr. pav.). Kam lygus skaičius n?
A) 30 **B)** 32 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 38

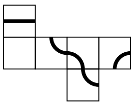
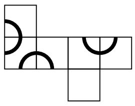
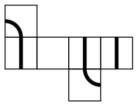
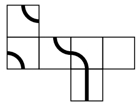
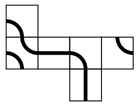


22. Gerda išleido visus savo pinigus pirkdama 50 buteliukų vandens po 1 eurą. Ji pardavinėja tuos buteliukus vienoda, bet didesne kaina. Pardavusi 40 buteliukų Gerda turi 10 eurų daugiau nei turėjo iš pradžių. Kiek pinigų Gerda turės, pardavusi visus 50 buteliukų vandens?
A) 70 eurų **B)** 75 eurai **C)** 80 eurų **D)** 90 eurų **E)** 100 eurų

23. Evelina turi daug degtukų, kurių kiekvieno ilgis lygus 1. Kiekvienas degtukas nudažytas viena iš keturių spalvų: mėlyna, raudona, geltona arba žalia. Evelina nori iš šių degtukų sudėti paveikslėlyje pavaizduotą figūrą, kurioje kiekvieno 1×1 kvadratėlio visos kraštinės būtų sudėtos iš skirtingų spalvų degtukų. Kam lygus mažiausias skaičius žalių degtukų, kurių Evelinai prireiks?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



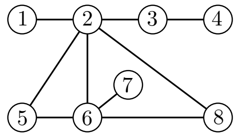
24. Skruzdėlė ropoja uždara linija, nubrėžta ant kubo sienų. Kuriame paveikslėlyje pavaizduota tokio kubo išklotinė?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

25. Ema gimtadienio proga vaišino draugus saldainiais. Iš pradžių Emos krepšelyje buvo lygiai 60 saldainių. Pirmasis draugas paėmė $\frac{1}{10}$ visų krepšelyje buvusių saldainių, antrasis – $\frac{1}{9}$ krepšelyje likusių saldainių, trečiasis – $\frac{1}{8}$ likusių saldainių, ir taip toliau iki to momento, kai vienas iš draugų paėmė lygiai pusę visų tuo metu krepšelyje buvusių saldainių. Kiek saldainių liko Emos krepšelyje?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

26. Kiekvieną skrituliuką paveikslėlyje Ignas taip nuspalvino viena iš trijų spalvų: raudona, geltona arba mėlyna, kad bet kurių dviejų atkarpa sujungtų skrituliukų spalvos skirtingos. Kurie du skrituliukai būtinai nuspalvinti ta pačia spalva?



A) 1 ir 6 **B)** 2 ir 7 **C)** 3 ir 6 **D)** 4 ir 5 **E)** 5 ir 8

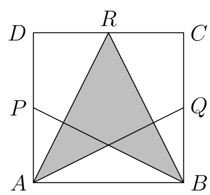
27. Ramintos ir Gerdos santaupų santykis buvo lygus 5 : 3. Ramintai nusipirkus planšetę už 160 eurų, tas santykis tapo lygus 3 : 5. Kiek eurų turėjo Raminta prieš pirkdama planšetę?

A) 192 **B)** 200 **C)** 250 **D)** 400 **E)** 420

28. Šachmatų turnyre dalyvavo keletas komandų. Kiekvieną komandą sudarė 3 žaidėjai. Kiekvienas žaidėjas sužaidė lygiai vieną partiją su kiekvienu kitos komandos nariu. Iš viso buvo sužaista ne daugiau negu 250 partijų. Kiek daugiausiai komandų galėjo dalyvauti tokiame turnyre?

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

29. Paveikslėlyje pavaizduotas kvadratas $ABCD$. Taškai P, Q ir R yra atitinkamai kraštinių DA, BC ir CD vidurio taškai. Kokią dalį viso kvadrato $ABCD$ ploto sudaro užtušuotos figūros plotas?

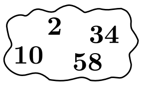


A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{7}{16}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{3}{4}$

30. Automatas vienu keitimu gali 1 baltą žetoną pakeisti į 4 raudonus arba 1 raudoną žetoną – į 3 baltus. Iš pradžių Tautė turėjo 4 baltus žetonus. Po 11 keitimų ji turi lygiai 31 žetoną. Kiek iš jų yra raudonos spalvos?

A) 21 **B)** 17 **C)** 14 **D)** 27 **E)** 11

Kadeto užduočių sprendimai

1. **E** 

! Nesunku pastebėti, kad atsakymų **A**, **B**, **C** ir **D** debesėliuose parašytas nelyginis skaičius 3. Lieka atsakymas **E**. Visi šiame debesėlyje parašyti skaičiai yra lyginiai.

Teisingas atsakymas **E**.

2. **E** 2 su puse val.

! Keturi ketvirčiai valandos yra lygiai viena valanda, o aštuoni ketvirčiai valandos yra lygiai dvi valandos. Panašiai, du ketvirčiai valandos yra lygiai pusė valandos. Vadinasi, dešimt ketvirčių valandos yra dvi su puse valandos.

Teisingas atsakymas **E**.

3. **E** $\dfrac{60 \cdot 50}{8 \cdot 70}$

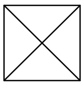
! Suprastinę trupmenas, gauname, jog atsakymuose **A**, **B**, **C** ir **D** parašytos trupmenos lygios trupmenai $\frac{15}{28}$, kuri yra mažesnė už 1. Kita vertus, atsakyme **E** parašyta trupmena lygi $\frac{75}{14}$, kuri yra didesnė už 1.

Teisingas atsakymas **E**.

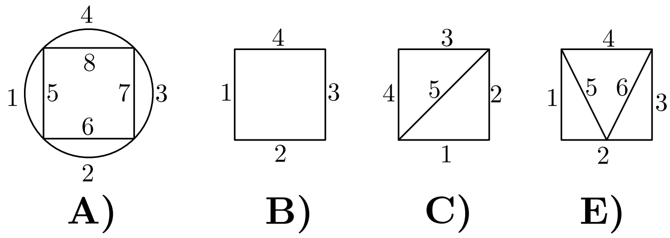
4. **A** 28

! Stačiakampio kraštinių ilgius pažymėkime a ir b. Stačiakampio perimetras lygus 14, todėl $2a + 2b = 14$. Paveikslėlyje pavaizduotos figūros perimetrą gausime iš trijų stačiakampių perimetrų sumos atėmę skaičių $2a + 2b$ (po du kartus atimame brūkšnine linija pavaizduotų kraštinių ilgius). Vadinasi, figūros perimetras lygus $3 \cdot 14 - (2a + 2b) = 3 \cdot 14 - 14 = 28$.

Teisingas atsakymas **A**.

5. (D) 

! Nesunku įsitikinti, kad atsakymuose **A**, **B**, **C** ir **E** pavaizduotas figūras įmanoma nubrėžti neatkeliant pieštuko nuo popieriaus lapo (žr. pav.).



Tarkime, kad kokią nors figūrą įmanoma nubrėžti neatkeliant pieštuko nuo popieriaus lapo. Jei brėžti pradedama ir baigiama tame pačiame figūros taške, tuomet iš kiekvieno jos taško išeina lyginis linijų (atkarpų, apskritimo lankų,...) skaičius. Jei figūra brėžti pradedama ir baigiama skirtinguose jos taškuose, tuomet iš dviejų jos taškų išeina nelyginis linijų skaičius, o iš visų likusių – lyginis. Kadangi atsakyme **D** iš keturių kvadrato viršūnių išeina po tris linijas (atkarpas), tai šios figūros neįmanoma nubrėžti neatkeliant pieštuko nuo popieriaus lapo.

Teisingas atsakymas **D**.

6. (D) 40

! Visos draugės kartu suvalgė $5 \times 4 = 20$ saldainių. Vadinasi, pradžioje draugės kartu turėjo $2 \times 20 = 40$ saldainių.

Teisingas atsakymas **D**.

7. (A) Adomas

! Pagal uždavinio sąlygą Ignas finišavo anksčiau už Simoną, Simonas anksčiau už Romą, Romas anksčiau už Adomą. Be to, žinome, kad Jonas finišavo anksčiau už Adomą. Vadinasi, Adomas finišavo paskutinis.

Teisingas atsakymas **A**.

8. (C) 58

! Puslapių numeriuose nuo 1 iki 50 (imtinai) skaitmenys 0 ir 8 pasitaiko lygiai po penkis kartus. Puslapių numeriuose nuo 51 iki 58 (imtinai) skaitmuo 0 iš viso nepasitaiko, o skaitmuo 8 pasitaiko lygiai vieną kartą. Jei knygoje būtų puslapis, kurio numeris 60, tai skaitmuo 0 puslapių numeriuose pasitaikytų bent šešis kartus. Vadinasi, knygos paskutiniojo puslapio galimas numeris yra 58 arba 59.

Teisingas atsakymas **C**.

9. (D) $\frac{4}{9}$

! Didžiojo kvadrato užtušuotoji dalis sudaryta iš kvadrato ketvirčio ir 7 mažųjų kvadratėlių, kurių kiekvienas yra $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$ didžiojo kvadrato dalis. Taigi lygiai $\frac{1}{4} + \frac{7}{36} = \frac{4}{9}$ kvadrato yra užtušuota.

Teisingas atsakymas **D**.

10. (A) 60

! Kadangi kiekviename Ramintos krepšelyje buvo dviem obuoliais daugiau negu kiekviename Julijos krepšelyje, tai Julijos krepšeliuose buvo po $5 \cdot 2 = 10$ obuolių. Vadinasi, Julija surinko $6 \cdot 10 = 60$ obuolių.

Teisingas atsakymas **A**.

11. (E) 5, 6 ir 7

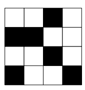
! Uždengtus keturženklius skaičius pažymėkime $\overline{21a7}$ ir $\overline{bc26}$. Pagal uždavinio sąlygą, $1243 + \overline{21a7} + \overline{bc26} = 10126$. Pastebėkime, kad $\overline{21a7} + \overline{bc26} = 2127 + \overline{bca6}$. Todėl $1243 + 2127 + \overline{bca6} = 10126$. Iš čia gauname $\overline{bca0} = 6750$. Vadinasi, $b = 6$, $c = 7$ ir $a = 5$.

Teisingas atsakymas **E**.

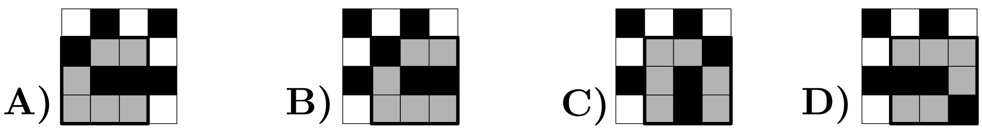
12. (D) $60°$

! Kadangi trikampis PQS yra lygiašonis, tai $\angle QSP = \angle QPS = 20°$. Todėl $\angle PQS = 180° - \angle QSP - \angle QPS = 180° - 20° - 20° = 140°$. Kita vertus, trikampis RPQ taip pat yra lygiašonis, todėl $\angle PQR = \frac{1}{2}(180° - \angle QPR) = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$. Vadinasi, $\angle RQS = \angle PQS - \angle PQR = 140° - 80° = 60°$.

Teisingas atsakymas **D**.

13. (E) 

! Nesunku įsitikinti, kad atsakymus **A**, **B**, **C** ir **D** galima gauti suglaudus dvi duotąsias figūras:



Iš dviejų duotųjų figūrų sudarytame 4×4 kvadrate du priešingi kampiniai langeliai visada bus balti. Lieka pastebėti, kad atsakyme **E** taip nėra.

Teisingas atsakymas **E**.

14. (B) 2

! Kadangi Adomas paspaudė ranką keturis kartus, tai jis pažįsta visus. Jonas paspaudė ranką tik Adomui, nes pagal sąlygą Jonas ranką paspaudė tik vieną kartą.

Jokūbas ranką paspaudė tris kartus. Kadangi Jonas nepažįsta Jokūbo, tai Jokūbas ranką paspaudė Adomui, Ignui ir Simonui.

Simonas ranką paspaudė lygiai du kartus. Jau žinome, kad Simonui ranką paspaudė Adomas ir Jokūbas, todėl niekas kitas Simonui rankos nepaspaudė.

Taigi Ignui ranką paspaudė Adomas ir Jokūbas, bet ne Jonas ir ne Simonas. Vadinasi, Ignas ranką paspaudė lygiai du kartus.

Teisingas atsakymas **B**.

15. (C) 3

! Adomas pataikė lygiai $20 \cdot \frac{55}{100} = 11$ kartų iš pirmųjų 20 metimų ir lygiai $25 \cdot \frac{56}{100} = 14$ kartų iš visų 25 metimų. Taigi iš penkių paskutinių metimų lygiai $14 - 11 = 3$ metimai buvo taiklūs.

Teisingas atsakymas **C**.

16. (E) $(1 * (2 * 3)) * 4$

! Randame išraiškų reikšmes:

A) $(1 * 2) * (3 * 4) = (2 - 1) * (4 - 3) = 1 - 1 = 0;$
B) $1 * ((2 * 3) * 4) = 1 * (4 - (3 - 2)) = 1 * 3 = 3 - 1 = 2;$
C) $1 * (2 * (3 * 4)) = 1 * ((4 - 3) - 2) = 1 * (-1) = -1 - 1 = -2;$
D) $((1 * 2) * 3) * 4 = (3 - (2 - 1)) * 4 = 2 * 4 = 4 - 2 = 2;$
E) $(1 * (2 * 3)) * 4 = ((3 - 2) - 1) * 4 = 0 * 4 = 4 - 0 = 4.$

Vadinasi, atsakymo **E** reikšmė yra didžiausia.

Teisingas atsakymas **E**.

17. (D) 7

! Iš viso Pranas augina $\frac{1}{8} \cdot 24 = 3$ šunis. Lygiai $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ visų gyvūnų yra ne karvės, todėl Pranas augina lygiai $24 - 18 = 6$ karves. Be to, lygiai $\frac{2}{3}$ visų gyvūnų yra ne katės. Todėl Pranas augina lygiai $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ kates. Taigi Pranas augina iš viso $24 - 3 - 6 - 8 = 7$ kengūras.

Teisingas atsakymas **D**.

18. (B) 12 cm^2

! Kiekvieno stačiakampio kraštinių ilgiai yra $\frac{10}{5} = 2$ cm ir $\frac{6}{4} = 1,5$ cm. Figūra sudėta iš 14 stačiakampių, todėl jos plotas lygus $14 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 42$ cm^2. Kita vertus, ant šios figūros nubrėžto trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$ cm^2. Taigi užtušuotos figūros dalies plotas lygus $42 - 30 = 12$ cm^2.

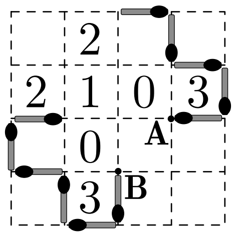
Teisingas atsakymas **B**.

19. (A) $\frac{5}{4}$

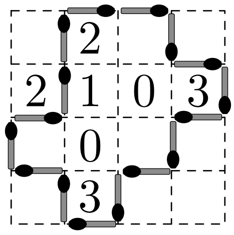
! Pirmosios ir antrosios žvakių aukščius pažymėkime atitinkamai a ir b. Agotai uždegus abi žvakes, po 3 valandų pirmosios žvakės aukštis buvo $\frac{a}{2}$, o antrosios – $\frac{5}{8} \cdot b$. Todėl $\frac{a}{2} = \frac{5}{8} \cdot b$. Iš čia gauname, kad $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$.

Teisingas atsakymas **A**.

20. (C) 16

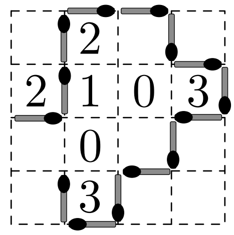


! Paveikslėlyje viršuje pavaizduota konstruojamo tako dalis, kuri gaunama vienareikšmiškai (ant langelio, kuriame įrašytas skaičius 0, kraštinių negalima dėti degtukų). Matome, kad šiai tako daliai prireiks 10 degtukų (neskaičiuojant pirmojo degtuko, ties kurio kairiuoju galu turi baigtis takas).



Ant dviejų langelių, kuriuose įrašytas skaičius 2, kraštinių turi būti padėti 4 degtukai. Be to, Austėja, norėdama sujungti taškus A ir B (žr. viršutinį paveikslėlį), turi padėti dar bent 2 degtukus. Vadinasi, Austėjos konstruojamą taką sudarys mažiausiai $10 + 4 + 2 = 16$ degtukų. Viduriniame paveikslėlyje matyti, kad takas gali turėti lygiai 16 degtukų.

Teisingas atsakymas **C**.



Pastaba. Nagrinėkime apatiniame paveikslėlyje sudarytą taką, kuris turi 14 degtukų. Uždavinio sąlygą galima suprasti taip, kad šis takas būtų tinkamas. Tokiu atveju teisingas atsakymas **B**.

21. (B) 32

! Skersmuo, einantis per apskritimo taškus, kuriuose parašyti skaičiai 7 ir 23, apie apskritimą surašytus skaičius (neskaičiuojant 7 ir 23) atskiria į dvi dalis, turinčias po tiek pat skaičių. Vienoje dalyje parašyti skaičiai nuo 8 iki 22, kurių iš viso yra $22 - 8 + 1 = 15$. Taigi apie apskritimą parašyti iš viso $2 \cdot 15 + 2 = 32$ skaičiai. Todėl $n = 32$.

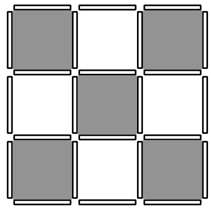
Teisingas atsakymas **B**.

22. (B) 75 eurai

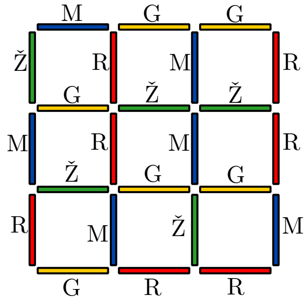
! Pardavusi 40 buteliukų vandens, Gerda gavo $50 + 10 = 60$ eurų. Taigi Gerda buteliukus pardavinėja po $\frac{60}{40} = 1{,}5$ euro. Todėl, pardavusi 50 buteliukų vandens, Gerda turės $50 \cdot 1{,}5 = 75$ eurus.

Teisingas atsakymas **B**.

23. (C) 5

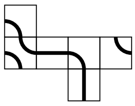


! Viršutiniame paveikslėlyje jokie du užtušuoti langeliai neturi bendros kraštinės. Evelinai prireiks po vieną žalią degtuką kiekvienam užtušuotam langeliui. Vadinasi, iš viso Evelinai prireiks bent penkių žalių degtukų.



Kita vertus, apatiniame paveikslėlyje matyti, kad Evelinai užteks penkių žalių degtukų.

Teisingas atsakymas **C**.

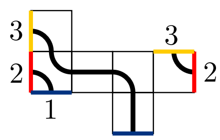
24. (E) 

? Paveikslėlyje pavaizduotos atsakymų **A**, **B**, **C** ir **D** kubo išklotinės.

A) **B)** **C)** **D)**

Kiekvienoje išklotinėje raudona spalva nudažytos dvi kraštinės, atitinkančios tą pačią kubo briauną. Matome, kad nei viena iš šių išklotinių neatitinka kubo, ant kurio sienų skruzdėlė ropoja uždara linija (linija nutrūksta ties raudonąja briauna). Kadangi Kengūros konkurse visada lygiai vienas uždavinio atsakymas yra teisingas, tai renkamės atsakymą **E**.

! Liko patikrinti, kad atsakymas **E** tinka. Paveikslėlyje dešinėje pavaizduota šio atsakymo kubo išklotinė, kur ta pačia spalva ir skaičiumi pažymėtos kraštinės, atitinkančios tą pačią briauną. Matome, kad sulanksčius kubą, visos pariebintos linijos susijungs, todėl atsakymas **E** yra teisingas.



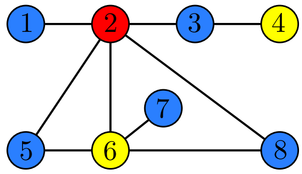
E)

25. (E) 6

! Iš pradžių Emos krepšelyje buvo lygiai $10 \cdot 6$ saldainių. Pirmasis draugas paėmė $\frac{1}{10} \cdot 10 \cdot 6 = 6$ saldainius, ir krepšelyje liko $9 \cdot 6$ saldainiai. Antrasis draugas paėmė $\frac{1}{9} \cdot 9 \cdot 6 = 6$ saldainius, ir krepšelyje liko $8 \cdot 6$ saldainiai. Dabar jau aišku, kad kiekvienas draugas paėmė po 6 saldainius. Vadinasi, draugas, paėmęs lygiai pusę tuo metu krepšelyje buvusių saldainių, Emos krepšelyje paliko lygiai 6 saldainius.

Teisingas atsakymas **E**.

26. (E) 5 ir 8



! Skrituliukai 2 ir 6 yra sujungti atkarpa, todėl nuspalvinti dviem skirtingomis spalvomis. Be to, skrituliukai 5 ir 8 abu yra sujungti ir su skrituliuku 2, ir su skrituliuku 6, todėl jie nuspalvinti likusia trečiąja spalva. Paveikslėlyje pavaizduotas galimas nuspalvinimas, leidžiantis atmesti **A**, **B**, **C** ir **D**.

Teisingas atsakymas **E**.

27. (C) 250

! Pradžioje Ramintos santaupos buvo lygios $\frac{5}{3}$ Gerdos santaupų. Ramintai nusipirkus planšetę už 160 eurų, likusios jos santaupos lygios $\frac{3}{5}$ Gerdos santaupų. Todėl Ramintos išleisti 160 eurų lygūs $\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{16}{15}$ Gerdos santaupų. Taigi Gerdos santaupos lygios $\frac{15}{16}\cdot 160 = 150$ eurų. Vadinasi, Raminta prieš pirkdama planšetę turėjo $\frac{5}{3}\cdot 150 = 250$ eurų.

Teisingas atsakymas **C**.

28. (A) 7

! Šachmatų turnyre dalyvavusių komandų skaičių pažymėkime n. Kiekvienas žaidėjas sužaidė po vieną partiją su kiekvienu kitos komandos nariu, todėl kiekvienas žaidėjas sužaidė lygiai $3(n-1)$ partijų. Taigi iš viso buvo sužaista $\frac{1}{2}\cdot 3n\cdot 3(n-1)=\frac{9}{2}\cdot n(n-1)$ partijų (dalijame iš 2, nes kiekviena partija įskaičiuota du kartus). Kadangi iš viso buvo sužaista ne daugiau negu 250 partijų, tai $\frac{9}{2}\cdot n(n-1)\leqslant 250$. Šią nelygybę pertvarkome:

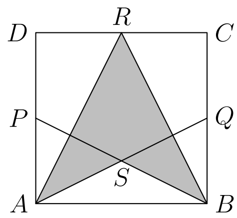
$$\begin{aligned} n(n-1) &\leqslant \frac{2}{9}\cdot 250, \\ 4n^2-4n+1 &\leqslant \frac{8}{9}\cdot 250+1=\frac{2009}{9}, \\ (2n-1)^2 &\leqslant \frac{2009}{9}<\frac{2025}{9}=225=15^2. \end{aligned}$$

Vadinasi, $2n-1<15$. Iš čia gauname, kad $n<8$. Taigi turnyre galėjo dalyvauti ne daugiau nei 7 komandos.

Nesunku įsitikinti, kad turnyre galėjo dalyvauti 7 komandos. Iš tikrųjų, jei turnyre dalyvavo lygiai 7 komandos ir jokie du vienos komandos nariai nežaidė tarpusavyje, tai jame sužaistos $\frac{9}{2}\cdot 7\cdot 6=189$ partijos.

Teisingas atsakymas **A**.

29. (A) $\dfrac{3}{8}$



! Trikampio ABS plotas (žr. pav.) lygus $\frac{1}{4}$ stačiakampio $ABQP$ ploto (stačiakampio įstrižainės susikirsdamos jį padalija į keturis vienodo ploto trikampius), o šis lygus $\frac{1}{2}$ kvadrato $ABCD$ ploto. Todėl trikampio ABS plotas lygus $\frac{1}{8}$ kvadrato $ABCD$ ploto.

Kadangi taškas R yra kraštinės DC vidurio taškas, tai trikampių ARD ir BCR plotai lygūs $\frac{1}{4}$ kvadrato $ABCD$ ploto.

Taigi neužtušuotos kvadrato $ABCD$ dalies plotas lygus $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ šio kvadrato ploto. Todėl užtušuotos figūros plotas lygus $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ kvadrato $ABCD$ ploto.

Teisingas atsakymas **A**.

30. (C) 14

! Kaskart baltą žetoną pakeitus raudonais, visų Tautės žetonų skaičius padidėja $4-1=3$. Panašiai gauname, kad po kiekvieno raudono žetono keitimo baltais, visų Tautės žetonų skaičius padidėja $3-1=2$. Balto žetono keitimų į raudonus skaičių pažymėkime n. Tada Tautė lygiai $11-n$ kartų keitė raudoną žetoną į baltus. Taigi $4+3n+2(11-n)=31$. Iš čia gauname, kad $n=5$.

Vadinasi, Tautė lygiai 5 kartus baltą žetoną keitė į raudonus. Dėl šių keitimų Tautės raudonų žetonų skaičius padidėjo $5\cdot 4=20$. Be to, Tautė lygiai $11-5=6$ kartus raudoną žetoną keitė į baltus. Dėl šių keitimų Tautės raudonų žetonų skaičius sumažėjo 6. Kadangi pradžioje Tautė neturėjo raudonų žetonų, tai po 11 keitimų lygiai $20-6=14$ Tautės žetonų yra raudoni.

Teisingas atsakymas **C**.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	E
2	E
3	E
4	A
5	D
6	D
7	A
8	C
9	D
10	A
11	E
12	D
13	E
14	B
15	C
16	E
17	D
18	B
19	A
20	C
21	B
22	B
23	C
24	E
25	E
26	E
27	C
28	A
29	A
30	C