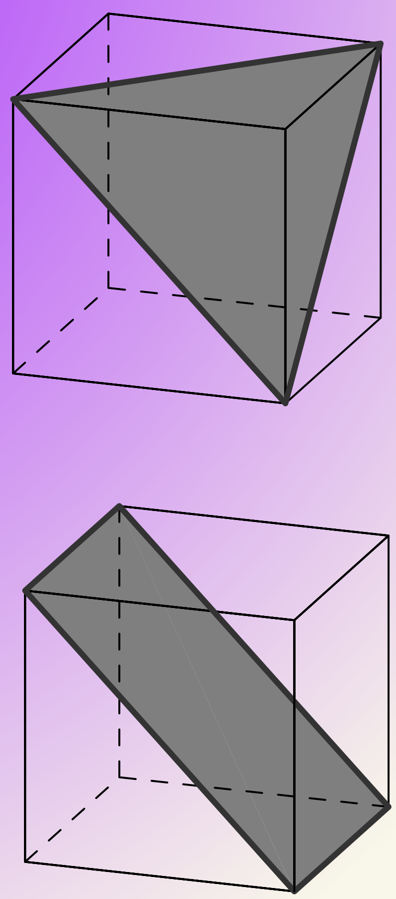
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA Ekspertas



Uždaviniai ir sprendimai

2019

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. Ekspertas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Paulius Drungilas, Ugnė Gudžinskaitė,
Juozas Juvencijus Mačys ir Aivaras Novikas

Turinys

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų“ vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų“ vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

`http://aksf.org/`

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

`http://kengura.lt/`

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online“ režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

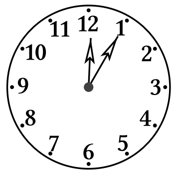
`http://www.ekspertas.kengura.lt/`

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

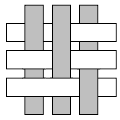
2019 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

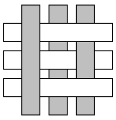
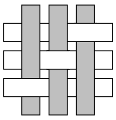
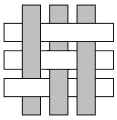
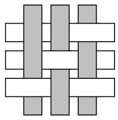
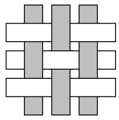
Klausimai po 3 taškus



1. Laikrodis paveikslėlyje rodo, kada Adelė grįžo iš pasivaikščiojimo. Pasivaikščiojimas truko 38 minutes. Kada Adelė išėjo iš namų pasivaikščioti?
A) 11:33 **B)** 12:43 **C)** 11:38 **D)** 11:27 **E)** 12:38

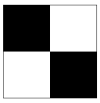
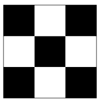
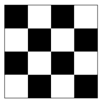
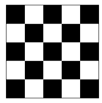
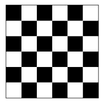
2. Šešios lentelės tvorelėje sunertos kaip pavaizduota. Kaip jos atrodo iš kitos tvorelės pusės?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

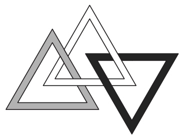
3. Žaidimo kauliuko sienelėse užrašyti nelyginiai skaičiai 1, 3, 5, 7, 9 ir 11. Arvydas ridena kauliuką tris kartus ir sudeda gautus skaičius. Kuris iš šių skaičių negali būti jo išridentų skaičių suma?
A) 21 **B)** 3 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 29

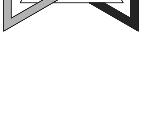
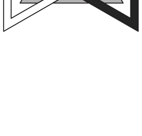
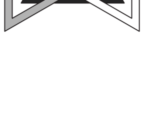
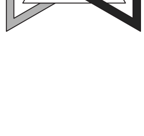
4. Penki lygūs kvadratai yra padalinti į mažesnius kvadratėlius. Kurio kvadrato juodai užspalvintos dalies plotas didžiausias?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

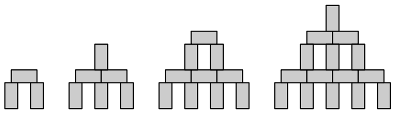
5. Raganos kieme buvo 30 gyvūnų – šunų, kačių ir pelių. Kartą ragana 6 šunis pavertė katėmis, o 5 kates pavertė pelėmis. Po šių burtų raganos kieme šunų, kačių ir pelių skaičius išsilygino. Kiek kačių buvo jos kieme iš pradžių?
A) 4 **B)** 5 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

6. Trys trikampiai sunerti į grandinę (žr. pav. dešinėje). Kuriame paveikslėlyje pavaizduota ši grandinė?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

7. Iš stačiakampių kaladėlių, kurių dydis yra $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$, bokštai statomi taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks bus bokšto, pastatyto iš 28 kaladėlių, aukštis?



A) 9 cm **B)** 11 cm **C)** 12 cm **D)** 14 cm **E)** 17 cm

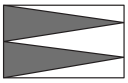
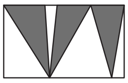
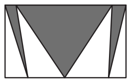
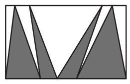
8. Ant žemės po obelimi gulėjo daug obuolių. Julija surinko dalį obuolių ir sudėjo juos į šešis savo krepšelius, po tiek pat obuolių į kiekvieną krepšelį. Raminta surinko tiek pat obuolių kaip ir Julija, bet sudėjo juos į penkis savo krepšelius, po tiek pat obuolių į kiekvieną. Kiekviename Ramintos krepšelyje buvo dviem obuoliais daugiau negu kiekviename Julijos krepšelyje. Kiek obuolių surinko Julija?

A) 60 **B)** 65 **C)** 70 **D)** 75 **E)** 80

9. Adomas treniruojasi krepšinio rungtynėms. Po 20 metimų paaiškėjo, kad lygiai 55% metimų buvo taiklūs. Dar po 5 metimų paaiškėjo, kad iš viso lygiai 56% metimų buvo taiklūs. Keli iš paskutinių penkių Adomo metimų buvo taiklūs?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

10. Aušra skirtingai nuspalvino penkis tokius pat baltus stačiakampius. Kurio stačiakampio pilkosios dalies plotas didžiausias?

A)  B)  C)  D)  E) 

Klausimai po 4 taškus

11. Knygos puslapiai sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, 4, 5 ir t. t. Puslapių numeriuose skaitmuo 5 pasitaikė lygiai 16 kartų. Kiek daugiausiai puslapių gali turėti tokia knyga?

A) 49 **B)** 64 **C)** 66 **D)** 74 **E)** 80

12. Stebuklingame sode auga obelis ir kriaušė. Kiekvieną rytą nuo obels nukrenta vienas obuolys, bet per pietus atauga du, o nuo kriaušės kiekvieną rytą nukrenta dvi kriaušės, bet per pietus atauga trys. Sekmadienį vakare ant tų vaismedžių buvo 3 obuoliai ir 5 kriaušės. Kurią savaitės dieną vakare ant abiejų medžių kartu kabos 100 vaisių?

A) Pirmadienį **B)** Antradienį **C)** Trečiadienį **D)** Ketvirtadienį **E)** Penktadienį

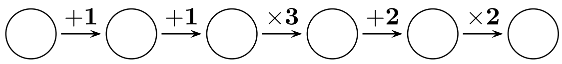
13. Vienas iš 5 vaikų, kurių vardai Alius, Balys, Celestinas, Domas ir Edis, neatsiklausęs suvalgė keksą.

Alius sako: *Aš nevalgiau kekso.*
Balys sako: *Aš suvalgiau keksą.*
Celestinas sako: *Edis nevalgė kekso.*
Domas sako: *Aš nevalgiau kekso.*
Edis sako: *Alius suvalgė keksą.*

Tik vienas iš vaikų sumelavo. Kas suvalgė keksą?

A) Alius **B)** Balys **C)** Celestinas **D)** Domas **E)** Edis

14. Kengūriukas Bičiulis įrašė sveikąjį skaičių į pirmą skrituliuką iš kairės, o tada paeiliui įrašė po skaičių į likusius skrituliukus pagal nurodytas taisykles. Keli iš įrašytųjų skaičių dalijasi iš 3?

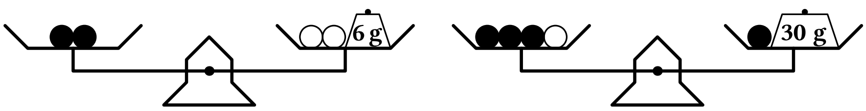


A) Lygiai 1 **B)** Gali dalytis ir 1, ir 2 **C)** Lygiai 2 **D)** Gali dalytis ir 2, ir 3 **E)** Gali dalytis ir 3, ir 4

15. Iš 10 skaičių $1, 2, \ldots, 10$ Rokas pasirinko keturis skirtingus ir pažymėjo juos a, b, c, d. Kokia yra mažiausia galima $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ reikšmė?

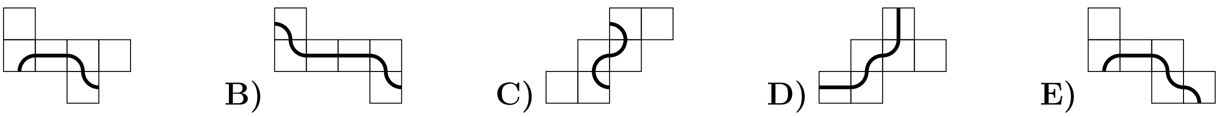
A) $\frac{2}{10}$ **B)** $\frac{3}{19}$ **C)** $\frac{14}{45}$ **D)** $\frac{29}{90}$ **E)** $\frac{25}{72}$

16. Šeši vienodi juodi rutuliukai ir trys vienodi balti rutuliukai yra padėti ant dvejų svirtinių svarstyklių kaip parodyta paveikslėlyje. Koks visų devynių rutuliukų svoris?

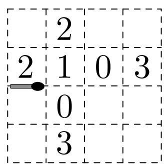


A) 100 g **B)** 99 g **C)** 96 g **D)** 94 g **E)** 90 g

17. Žemiau pavaizduotos kubų išklotinės. Iš jų sulankščius kubus, tik ant vieno iš jų storosios linijos pradžia ir galas susijungs. Kuri tai išklotinė?



18. Austėja turi sukonstruoti taką iš degtukų dėdama juos ant langelių kraštinių (žr. pav.). Pirmasis degtukas jau padėtas, ir takas turi pasibaigti ties to degtuko kairiuoju galu. Kai kuriuose langeliuose įrašytas skaičius nurodo, kiek degtukų turi būti ant to langelio kraštinių. Kiek mažiausiai degtukų turi toks takas?



A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

19. Skaičiaus $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}}$ sveikoji dalis lygi

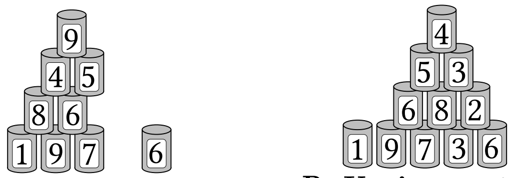
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 20 **E)** 25

20. Ramintos ir Gerdos santaupų santykis buvo lygus 5 : 3. Ramintai nusipirkus planšetę už 160 eurų, tas santykis tapo lygus 3 : 5. Kiek eurų turėjo Raminta prieš pirkdama planšetę?

A) 192 **B)** 200 **C)** 250 **D)** 400 **E)** 420

Klausimai po 5 taškus

21. Audrius ir Ugnius metė po kamuolį į visiškai vienodas piramides iš 15 skardinių, ir kiekvienas gavo tiek taškų, kokia buvo skaičių ant numuštų skardinių suma. Audrius numušė 6 skardines ir gavo 25 taškus, o Ugnius numušė 4 skardines (žr. pav. apačioje). Kiek taškų gavo Ugnius?



Po Audriaus metimo **Po Ugniaus metimo**

A) 22 **B)** 23 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 28

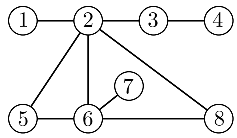
22. Linas iš 32 baltų ir 32 juodų $1 \times 1 \times 1$ kubelių deda $4 \times 4 \times 4$ kubą. Kokia didžiausia kubo viso paviršiaus ploto dalis gali būti balta?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{8}$

23. Vienas Tautės automatas 1 baltą žetoną pakeičia į 3 raudonus, kitas 1 raudoną žetoną – į 2 baltus. Iš pradžių Tautė turėjo 3 baltus žetonus. Po 9 keitimų ji turi lygiai 16 žetonų. Kiek iš jų yra raudonų?

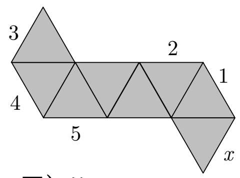
A) 9 **B)** 7 **C)** 4 **D)** 12 **E)** 5

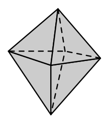
24. Kiekvieną skrituliuką paveikslėlyje Ignas taip nuspalvino viena iš trijų spalvų: raudona, geltona arba mėlyna, kad bet kurių dviejų atkarpa sujungtų skrituliukų spalvos skirtingos. Kurie du skrituliukai būtinai nuspalvinti ta pačia spalva?



A) 1 ir 6 **B)** 2 ir 7 **C)** 3 ir 6 **D)** 4 ir 5 **E)** 5 ir 8

25. Rokas iškirpo iš popieriaus oktaedro išklotinę ir, ją sulankstęs, suklijavo oktaedrą (žr. pav.). Kuriuo skaičiumi pažymėtą išklotinės kraštinę Rokas suklijavo su kraštine x?





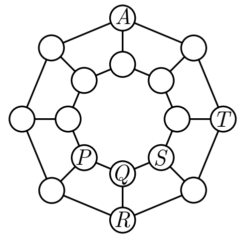
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

26. Visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 99 didėjimo tvarka be tarpų surašyti į vieną eilę. Gautoji skaitmenų seka suskaidyta į skaitmenų trejetus: (123)(456)(789)(101)(112)...(979)(899). Kurio trejeto nėra tame skaidinyje?

A) (222) **B)** (444) **C)** (464) **D)** (646) **E)** (888)

27. Duotas kubas. Kiek yra plokštumų, einančių per lygiai tris jo viršūnes?
A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 12

28. Pradžioje voras tupėjo voratinklio mazge A (žr. pav.). Vienu ėjimu voras jungiančiu siūlu iš užimamo mazgo perlipa į vieną iš gretimų mazgų. Voras atliko 2019 ėjimų. Kuriame iš mazgų P, Q, R, S, T jis gali būti dabar?
A) Tik P, R ir S, bet ne Q ar T **B)** Tik P, R, S ir T, bet ne Q
C) Tik Q **D)** Tik T **E)** Bet kuriame iš šių mazgų



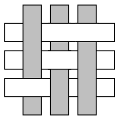
29. Marytė atsitiktinai pasirinko tris skirtingus skaičius iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Kokia yra tikimybė, kad vienas iš tų skaičių lygus kitų dviejų skaičių aritmetiniam vidurkiui?
A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

30. Natūralusis skaičius N yra keturženklis. Kad ir kokį jo skaitmenį išbrauktume, lieka triženklis skaičius, iš kurio dalijasi N. Kiek yra tokių keturženklių skaičių N?
A) 5 **B)** 9 **C)** 14 **D)** 19 **E)** 23

Eksperto užduočių sprendimai

1. (D) 11:27

! Laikrodis rodo, kad Adelė grįžo iš pasivaikščiojimo 12:05. Iš šito laiko reikia atmesti 38 minutes. Patogu iš pradžių atmesti 5 minutes – tada bus 12:00, o tada dar 33 minutes: $12{:}00 = 11{:}60$, $60 - 33 = 27$. Vadinasi, Adelė išėjo pasivaikščioti 11:27.

2. (C) 

? Tvorelėje vidurinę tamsiąją lentelę dengia tik apatinė šviesioji lentelė. Vadinasi, žiūrint iš kitos pusės, tą tamsiąją lentelę dengs viršutinė ir vidurinė baltosios lentelės, apatinė nedengs. Taip vidurinė tamsioji lentelė atrodo tik paveikslėlyje **C**.

! Dar reikėtų pažiūrėti, ar taip atrodys kitos (bent jau tamsiosios) lentelės. Kairiąją tamsiąją lentelę dengia vidurinė ir apatinė baltosios. Kadangi iš kitos pusės žiūrint ji bus dešinioji, tai ją dengs tik viršutinė balta lentelė. Taip ir yra paveikslėlyje **C**.

Pagaliau dešiniąją tamsią lentelę dengia viršutinė ir vidurinė baltosios, todėl vaizde iš kitos pusės kairiąją tamsiąją lentelę dengs tik apatinė. Taip yra paveikslėlyje **C**.

Vadinasi, **C** tikrai yra tvorelės vaizdas iš kitos pusės.

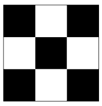
3. (C) 20

? Čia svarbiausia pastebėti, kad trijų nelyginių skaičių suma visada yra nelyginis skaičius. Iš penkių pateiktų atsakymų tik atsakymas **C** yra lyginis – šis skaičius tikrai negali būti Arvydo išridentų skaičių suma. Todėl renkamės atsakymą **C**.

! Įsitikinkime, kad galime gauti kituose atsakymuose nurodytas sumas:

A) $21 = 7 + 7 + 7$
B) $3 = 1 + 1 + 1$
D) $19 = 7 + 7 + 5$
E) $29 = 9 + 9 + 11$

Vadinasi, galime gauti visas sumas išskyrus **C**. Teisingas atsakymas – **C**.

4. (B) 

? Lengva pastebėti, kad atsakymuose **A**, **C** ir **E** nuspalvinta lygiai pusė ploto, o atsakymuose **B** ir **D** – truputį daugiau nei pusė. Abiejuose šiuose atsakymuose juodų kvadratėlių yra vienu daugiau nei baltų, tik **B** atsakyme tas vienas juodas kvadratėlis yra didesnis nei **D**. Todėl renkamės atsakymą **B**.

! Galime palyginti atsakymus **B** ir **D** skaičiais. **B** atsakyme nuspalvinta $\frac{5}{9}$ ploto, o **D** – $\frac{13}{25}$ ploto. Subendravardiklinę šias trupmenas, gauname

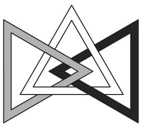
$$\frac{5\cdot 25}{9\cdot 25}=\frac{125}{225} \qquad \text{ir} \qquad \frac{13\cdot 9}{25\cdot 9}=\frac{117}{225}\,.$$

Kadangi $\frac{125}{225} > \frac{117}{225}$, tai atsakymo **B** juodosios dalies plotas didesnis.

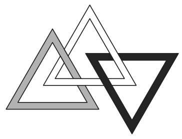
Teisingas atsakymas – **B**.

5. (C) 9

! Spręskime uždavinį nuo galo, tarsi raganos burtai būtų nufilmuoti ir mes juos žiūrėtume „atbulai“ . Pačioje pabaigoje šunų, kačių ir pelių buvo po lygiai, t. y. po $30 : 3 = 10$. Tada 5 pelės atvirsta atgal katėmis, todėl pelių palieka $10 - 5 = 5$, o kačių padaugėja iki $10 + 5 = 15$. Tada 6 katės atvirsta į šunis ir kačių sumažėja iki $15 - 6 = 9$, o šunų padaugėja iki $10 + 6 = 16$. Taigi iš pradžių raganos kieme buvo 9 katės. Renkamės atsakymą **C**.

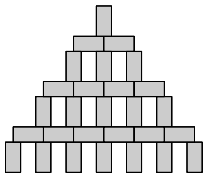
6. (D) 

! Duotojoje grandinėje baltoji grandis sukibusi kiekviena iš kitų dviejų (todėl netinka atsakymai **B** ir **C**, kur baltoji grandis tiesiog guli virš pilkosios). Bet jei perkirsime ir pašalinsime ją, tai likusios dvi grandys liks nesukibusios (todėl netinka atsakymai **A** ir **E**, kur tos dvi grandys kiekviena dengia kitą ir todėl kerta viena kitos vidų). Atsakyme **D** turime kaip tik tokią situaciją.



7. (B) 11 cm

! Galime įsivaizduoti, kad bokštai statomi iš atskirų „aukštų“, kur vienas aukštas kaladėlių statomas gulsčiai (jo aukštis yra 1 cm), kitas – stačiai (jo aukštis – 2 cm), ir t. t. Sąlygoje pavaizduoti dviejų, trijų, keturių ir penkių aukštų bokštai. Nesunku pastebėti, kad viršutinis aukštas visada turi vieną kaladėlę, o kiekvieną žemiau esantį aukštą sudaro viena kaladėle daugiau nei aukščiau esantį.



Kiek aukštų turės bokštas, pastatytas iš 28 kaladėlių? Kaip matome sąlygos brėžinyje, penkių aukštų bokštui reikės $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ kaladėlių, šešių aukštų bokštui reikės šešiomis kaladėlėmis daugiau, t y. $15 + 6 = 21$ kaladėlių, o septynių aukštų $21 + 7 = 28$ kaladėlių. Taigi, statysime septynių aukštų bokštą. Stačiai statysime kaladėles 1-ame, 3-iame, 5-ame ir 7-ame aukštuose, o gulsčiai – 2-ame, 4-ame ir 6-ame (žr. pav. viršuje). Bendras 4 stačių ir 3 gulsčių aukštų aukštis bus $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8 + 3 = 11$ (cm).
Teisingas atsakymas – **B**.

8. (A) 60

! Kadangi kiekviename Ramintos krepšelyje buvo dviem obuoliais daugiau negu kiekviename Julijos krepšelyje, tai Julijos krepšeliuose buvo po $5 \cdot 2 = 10$ obuolių. Vadinasi, Julija surinko $6 \cdot 10 = 60$ obuolių.

Teisingas atsakymas **A**.

9. (C) 3

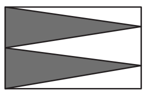
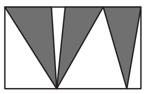
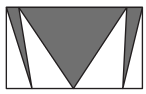
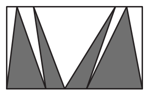
! Adomas pataikė lygiai $20 \cdot \frac{55}{100} = 11$ kartų iš pirmųjų 20 metimų ir lygiai $25 \cdot \frac{56}{100} = 14$ kartų iš visų 25 metimų. Taigi iš penkių paskutinių metimų lygiai $14 - 11 = 3$ metimai buvo taiklūs.

Teisingas atsakymas **C**.

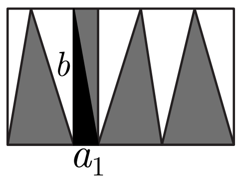
10. (A) 

? Stačiakampių matmenis pažymėkime $a \times b$. Nagrinėkime atsakymą **E**. Pilkąją dalį sudaro trikampiai, kurių kraštinės $a_1, a_2, \ldots$ sudaro stačiakampio kraštinę a, o į jas nuleistos aukštinės lygios b. Todėl pilkosios dalies plotas lygus $a_1b/2 + a_2b/2 + \ldots = (a_1 + a_2 + \ldots)b/2 = ab/2$. Analogiškai tą patį gauname atsakymams **B** ir **D**. Trys plotai lygūs, todėl šie atsakymai negali būti teisingi. O atsakyme **C** plotas dar mažesnis, nes čia $a_1 + a_2 + \ldots < a$.

Renkamės atsakymą **A**.

B)  **C)**  **D)**  **E)** 

! Užbaikime **?** dalies sprendimą. Atsakyme **A** turime panašią, bet kiek kitokią situaciją nei kitur. Jei čia vietoj pilkojo stačiakampio $a_1 \times b$ turėtume perpus mažesnį juodąjį trikampį su kraštine a_1 ir aukštine b (žr. pav.), tai nuspalvintos dalies plotas vėl būtų lygus $ab/2$. Vadinasi, iš tikrųjų pilkosios dalies plotas čia didesnis už $ab/2$ – didesnis nei kituose atsakymuose.



11. (B) 64

! Jeigu knygoje būtų 10 puslapių, tai penketas būtų tik vienas – žymintis 5-tą puslapį. Knygoje iš 20 puslapių penketų būtų 2, knygoje iš 30 puslapių – 3, iš 40 puslapių – 4. Jeigu knyga turėtų 50 puslapių, tai prisidėtų jau 2 penketai – iš puslapių 45 ir 50, ir numeriuose būtų 6 penketai. Numeriuose nuo 51 iki 60 yra $9+1 = 10$ penketų (nes numeryje 55 jų du). Vadinasi, knyga iš 60 puslapių jau turi 16 penketų. Bet jeigu knyga turės dar 2 puslapius 61 ir 62, penketų skaičius nepadidės. Nepadidės jis ir po puslapių 63 ir 64. O štai sekantis puslapis jau turėtų 17-tą penketą. Vadinasi, knyga su 16 penketų daugiausiai gali turėti 64 puslapius.

12. (D) Ketvirtadienį

! Kiekvieną dieną obuolių skaičius padidėja $2 - 1 = 1$ obuoliu, o kriaušių skaičius padidėja $3 - 2 = 1$ kriauše. Vadinasi, per dieną vaisių padaugėja dviem. Sekmadienį vakare vaisių kabojo 8, vadinasi, 100 vaisių kabos po $(100 - 8) : 2 = 46$ parų. Tai pilnos 6 savaitės ir dar 4 dienos. Kai praeis 6 savaitės, vėl bus sekmadienis, o po 4 parų bus ketvirtadienis.

13. (B) Balys

? Tikrinkime atsakymus.

A) Jeigu keksą būtų suvalgęs Alius, tai Alius ir Balys meluotų, o pagal sąlygą melavo vienas vaikas. Vadinasi, atsakymas **A** netinka.

B) Jeigu keksą suvalgė Balys, tai Balys nemelavo. Nemelavo ir Alius, ir Celestinas, ir Domas, o sumelavo Edis.

Renkamės atsakymą **B**.

! Vis dėlto reikėtų patikrinti ir likusius atsakymus (o gal, pavyzdžiui, paaiškėtų, kad tinka net du atsakymai!).

C) Jeigu keksą būtų suvalgęs Celestinas, tai meluotų Balys ir Edis.

D Jeigu keksą būtų suvalgęs Domas, tai meluotų ir jis, ir Balys, ir Alius.

E) Jeigu keksą būtų suvalgęs Edis, tai meluotų Balys, Celestinas ir Edis.

14. (C) Lygiai 2

? Pamėginkime įrašyti į kairįjį skrituliuką pasirinktą skaičių ir žiūrėti, ką gauname. Pvz., įrašę 1, gauname tokią skaičių seką: 1, 2, 3, 9, 11, 22. Joje iš trijų dalijasi du skaičiai (3 ir 9). Pamėginę kitokius skaičius, vis įsitikiname, kad lygiai du skaičiai dalijasi iš 3, todėl spėjame atsakymą **C**.

! Įsitikinkime, kad **?** dalies spėjimas teisingas. Nesunku pastebėti, kad skaičius ketvirtajame skrituliuke visada dalijasi iš trijų, nes jis gaunamas trečiojo skrituliuko skaičių padauginus iš trijų. Prie tokio skaičiaus pridėję du, gausime skaičių, nedalų iš trijų, todėl penktojo skrituliuko skaičius niekada nesidalys iš trijų. Šį iš trijų nedalų skaičių padauginę iš dviejų, taip pat gausime iš trijų nedalų skaičių. Vadinasi, iš trijų paskutinių skrituliukų lygiai vienas skaičius dalysis iš trijų.

Sunkiau surasti, kiek skaičių pirmuose trijuose skrituliukuose dalijasi iš trijų. Atrodytų, viskas priklauso nuo to, kokį skaičių pasirinksime įrašyti į pirmą langelį: juk jis gali ir dalytis iš trijų, ir ne. Tačiau atkreipkime dėmesį, kad kokį skaičių bepasirinktume, pirmuose trijuose langeliuose turėsime įrašyti tris iš eilės einančius sveikuosiu skaičius, o tarp trijų iš eilės einančių skaičių lygiai vienas dalysis iš trijų.

Vadinasi, iš viso iš trijų dalysis du skaičiai. Teisingas atsakymas – **C**.

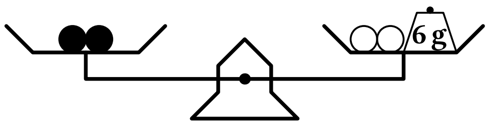
15. (C) $\frac{14}{45}$

! Žinoma, mažiausią reiškinio $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ reikšmę gausime, jei imsime mažiausias galimas skaitiklių a ir c reikšmes 1 ir 2 bei didžiausias galimas vardiklių b ir d reikšmes 9 ir 10. Priklausomai nuo to, kokia tvarka priskirsime tas reikšmes, gausime

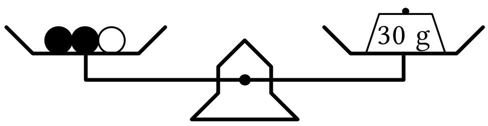
$$\frac{1}{10}+\frac{2}{9}=\frac{9}{90}+\frac{20}{90}=\frac{29}{90} \quad \text{arba} \quad \frac{1}{9}+\frac{2}{10}=\frac{10}{90}+\frac{18}{90}=\frac{28}{90}.$$

Abi reikšmės yra galimos, todėl teisingas atsakymas yra mažesnioji iš jų $\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$.

16. (E) 90 g

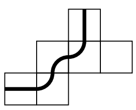


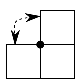
! Abejos svarstyklės yra pusiausvyros. Iš pirmųjų svarstyklių (viršutinis paveikslėlis) matome, kad du juodi rutuliukai yra šešiais gramais sunkesni už du baltus rutuliukus. Vadinasi, vienas juodas rutuliukas yra trimis gramais sunkesnis už baltą rutuliuką.



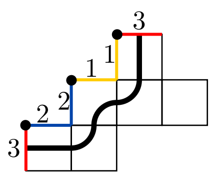
Toliau, nuo antrųjų svarstyklių abiejų lėkštelių nuėmus po vieną juodą rutuliuką, svarstyklės vis tiek liktų pusiausvyros (apatinis paveikslėlis). Tada kairiojoje lėkštelėje būtų vienas baltas ir du juodi rutuliukai, o dešinėje – 30 g svarelis, t. y. du juodi rutuliukai ir vienas baltas kartu sveria 30 g. Šį baltą rutuliuką pakeitus juodu bendras svoris padidėtų 3 g ir būtų $30+3=33$ g. Taigi vienas juodas rutuliukas sveria $33:3=11$ g, o baltas $11-3=8$ g. Vadinasi, visi rutuliukai kartu sveria $6\cdot 11+3\cdot 8=66+24=90$ g. Teisingas atsakymas – **E**.

!! Nebūtina ieškoti atskirų rutuliukų svorių. Grįžkime prie **!** pastabos, kad 1 baltas ir 2 juodi rutuliukai kartu sveria 30 g. Atkreipkime dėmesį, kad iš viso tiek baltų, tiek juodų rutuliukų yra tris kartus daugiau: 3 balti ir 6 juodi rutuliukai. Taigi ir sveria visi rutuliukai tris kartus daugiau – $30\cdot 3=90$ (g). Teisingas atsakymas – **E**.

17. (D) 

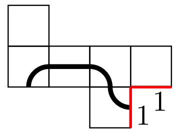


? Paprasčiausia uždavinį išspręsti būtų patiems pasigaminus išklotines. Mintyse lankstyti kubus sunkiau, bet ir tada uždavinys išsprendžiamas. Pastebėkime, kad kiekviena kubo viršūnė priklauso trims kubo sienoms. Jei išklotinėje trys sienos išsidėsto „kampuku“ (žr. pav.), tai išlanksčius kubą jos visos trys taps gretimomis kubo sienomis, o jų bendra viršūnė atsiduria „kampuko“ viduryje (ši viršūnė pažymėta juodu rutuliuku).

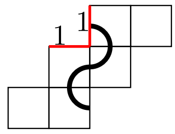


Panagrinėkime išklotinę **D** (žr. pav. dešinėje). Čia pastebime keletą tokių „kampukų“: lankstydami kubą, į vieną briauną suklijuosime kraštines, pažymėtas 1, į kitą briauną suklijuosime kraštines, pažymėtas 2. Taip pat visi trys juodais rutuliukais pažymėti kampai susijungs į vieną viršūnę, todėl turėsime suklijuoti į vieną briauną ir 3 pažymėtas kraštines. Kaip tik čia yra ir linijos pradžia ir galas, taigi jie susijungs. Renkamės atsakymą **D**.

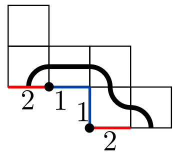
! Patikrinkime, ar netinka kitos išklotinės. Pažvelgę į išklotinę **A** pastebime kaip tik tokį „kampuką“, koks parodytas **?** dalyje. Sulanksčius kubą vieną briauną sudarys vienetu pažymėtos kraštinės, taigi šioje vietoje, linija nutrūks ir nesusijungs su savo pradžia.



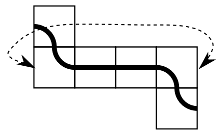
Analogiškus „kampukus“ turi ir išklotinė **C**: ir čia į vieną briauną susijungus vienetu pažymėtoms kraštinėms linija nutrūks ir nesusijungs su savo pradžia.



Išklotinėje **E** „kampuko“ rasti neužtenka, tačiau galime pastebėti kad į briauną suklijavus skaičiumi 1 pažymėtas kraštines į vieną viršūnę, susijungtų dviem rutuliukais pažymėti kampai ir toliau klijuotume prie jų esančias ir skaičiumi 2 pažymėtas kraštines. Vienai iš šių kraštinių priklauso linijos galas, kitai – ne, todėl ir čia linija nesusijungs su savo pradžia.



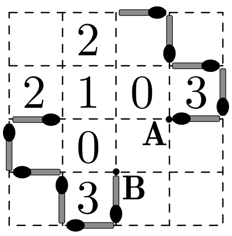
Išklotinė **B** turi keturias sienas vienoje eilėje, todėl lengva įsivaizduoti visą sulankstytą kubą – vienoje eilėje esančios keturios sienos susijungia tarpusavy, sudarydamos savotišką „žiedą“, viena iš likusių dviejų sienų tampa kubo „dugnu“, o kita – „stogu“ (žr. pav.). Linijos pradžia ir galas priklauso kubo „dugnui“ ir „stogui“ – priešingoms sienoms, todėl susijungti negali.



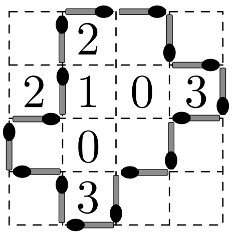
Sulanksčius išklotines **A**, **B**, **C** ir **E** linijos pradžia ir galas nesusijungs, taigi dalies **?** spėjimas yra teisingas.

18. C 16

! Paveikslėlyje viršuje pavaizduota konstruojamo tako dalis, kuri gaunama vienareikšmiškai (ant langelio, kuriame įrašytas skaičius 0, kraštinių negalima dėti degtukų). Matome, kad šiai tako daliai prireiks 10 degtukų (neskaičiuojant pirmojo degtuko, ties kurio kairiuoju galu turi baigtis takas).

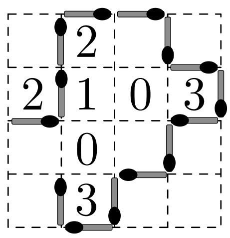


Ant dviejų langelių, kuriuose įrašytas skaičius 2, kraštinių turi būti padėti 4 degtukai. Be to, Austėja, norėdama sujungti taškus A ir B (žr. viršutinį paveikslėlį), turi padėti dar bent 2 degtukus. Vadinasi, Austėjos konstruojamą taką sudarys mažiausiai $10 + 4 + 2 = 16$ degtukų. Viduriniame paveikslėlyje matyti, kad takas gali turėti lygiai 16 degtukų.



Teisingas atsakymas **C**.

Pastaba. Nagrinėkime apatiniame paveikslėlyje sudarytą taką, kuris turi 14 degtukų. Uždavinio sąlygą galima suprasti taip, kad šis takas būtų tinkamas. Tokiu atveju teisingas atsakymas **B**.



19. (A) 4

! Kadangi $4^2 < 20 < 5^2$, tai $4 < \sqrt{20} < 5$ ir $[\sqrt{20}] = 4$. Sąlygoje duotas skaičius a gali atrodyti ženkliai didesnis už $\sqrt{20}$, o atsakymas **A** – neįtikimas. Tačiau šis įspūdis apgaulingas. Pastebėjimą, kad $\sqrt{20+\sqrt{20}} < \sqrt{20+5} = 5$, galima taip apibendrinti:

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}} < \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+5}}}} =$$

$$= \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+5}}} = \sqrt{20+\sqrt{20+5}} = \sqrt{20+5} = 5.$$

Žinoma, $a = \sqrt{20+\ldots} > \sqrt{20} > 4$. Taigi $[a] = 4$.

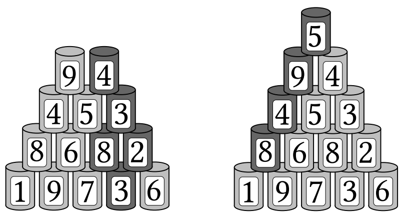
20. (C) 250

! Pradžioje Ramintos santaupos buvo lygios $\frac{5}{3}$ Gerdos santaupų. Ramintai nusipirkus planšetę už 160 eurų, likusios jos santaupos lygios $\frac{3}{5}$ Gerdos santaupų. Todėl Ramintos išleisti 160 eurų lygūs $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15}$ Gerdos santaupų. Taigi Gerdos santaupos lygios $\frac{15}{16} \cdot 160 = 150$ eurų. Vadinasi, Raminta prieš pirkdama planšetę turėjo $\frac{5}{3} \cdot 150 = 250$ eurų.

Teisingas atsakymas **C**.

21. (D) 26

! Sprendimą pradėkime atkurdami pradinę piramidę. Galime tai padaryti papildydami iki pilnos piramidės skardinių statinį, kuris liko po Audriaus metimo, lygindami su tuo, kas liko po Ugniaus metimo. Šitaip galime atstatyti trūkstamas skardines iš keturių apatinių „aukštų“, kaip kairiajame paveikslėlyje (Audriaus numuštos skardinės pažymėtos tamsesne spalva). Šių penkių atstatytų skardinių skaičių suma yra $3+8+2+3+4 = 20$.



Tačiau iš viso Audrius numušė ne penkias, o šešias skardines, ir už jas gavo 25 taškus. Vadinasi, piramidės viršuje stovėjo dar viena skardinė, ant kurios užrašytas skaičius buvo $25 - 20 = 5$ (žr. paveikslėlį viršuje dešinėje).

Žinodami, kokia buvo pradinė piramidė, galime rasti, kokias skardines numušė Ugnius. Tai skardinės su skaičiais 8, 4, 9 ir 5, o jų suma $8+4+9+5 = 26$. Teisingas atsakymas – **D**.

!! Galime išspręsti uždavinį net neatkurdami pradinės piramidės.

Po Audriaus metimo liko nenumuštos 9 skardinės, kurių skaičių suma yra $1+9+7+6+8+(6+4)+5+9 = 10+21+10+14 = 55$. Kadangi Audrius surinko 25 taškus, tai numušus visas piramidės skardines iš viso būtų galima surinkti $55+25 = 80$ taškų.

Po Ugniaus metimo likusių nenumuštų 11 skardinių suma yra $1+9+7+3+6+6+$ $+8+2+5+3+4 = 20+20+14 = 54$, vadinasi, Ugniaus gautų taškų suma buvo $80-54 = 26$. Taigi, teisingas atsakymas – **D**.

22. (D) $\frac{3}{4}$

! Kelios vieno kubelio sienos priklauso didžiojo kubo paviršiui? Jei šis kubelis „tupi" didžiojo kubo viršūnėje, tai 3 jo sienos priklauso didžiojo kubo paviršiui. Jei kubelis priklauso didžiojo kubo briaunai, tokių sienų bus 2, jei kubelis priklauso didžiojo kubo sienai, bet ne briaunai, tai kubo paviršiui priklauso 1 kubelio siena, o jei kubelis vidinis, tai nei viena jo siena nepriklauso kubo paviršiui.

Taigi norėdami, kad kuo didesnė kubo paviršiaus ploto dalis būtų balta, sieksime, kad kiekvienas kubelis turėtų kuo daugiau didžiojo kubo paviršiui priklausančių sienų: 8 baltus kubelius dėsime prie 8 kubo viršūnių, o likusius $32-8=24$ baltus kubelius dėsime prie didžiojo kubo briaunų. Kubas iš viso turi 12 briaunų, o kiekvienai briaunai iš viso priklauso 4 kubeliai, bet du iš jų (pirmasis ir paskutinis) kartu priklauso ir kubo viršūnėms, vadinasi, ties kiekviena briauna dar galima padėti po $4-2=2$ kubo viršūnėms nepriklausančius kubelius. Taigi iš viso prie kubo briaunų padėsime būtent $12 \cdot 2 = 24$ baltus kubelius – visus, kurie buvo likę.

Taip sudėjus kubą, jo paviršiui priklausančių baltų sienelių skaičius bus $8 \cdot 3 + 24 \cdot 2 = 24 + 48 = 72$. Kiekvieną iš 6 didžiojo kubo sienų sudaro $4 \cdot 4 = 16$ kubelių sienelių, taigi iš viso kubo paviršiuje yra $6 \cdot 16 = 96$ sienelių, o balta viso paviršiaus dalis bus $\frac{72}{96} = \frac{3}{4}$.

Teisingas atsakymas – **D**.

23. (B) 7

! Pirmasis automatas žetonų skaičių padidina dviem, o antrasis – vienetu. Tad, nekreipdami dėmesio į žetonų spalvas, iš pradžių įsivaizduokime, kad visus kartus Tautė žetonus keitė antruoju automatu. Tada po 9 keitimų ji turėtų $3+9=12$ žetonų.

Tačiau iš tiesų po 9 keitimų Tautė turėjo ne 12, o 16 žetonų, t.y. 4 žetonais daugiau. Vadinasi, 4 kartus ji turėjo žetonus keisti pirmuoju automatu.

Žinodami, kad Tautė iš viso 4 kartus 1 baltą žetoną keitė į 3 raudonus, o likusius 5 keitimus 1 raudoną žetoną keitė į 2 baltus, galime sudėlioti tokią keitimų seką:

1. – 3. Pirmais trim keitimais Tautė 3 baltus žetonus iškeičia į 9 raudonus.

4. – 8. Kitais penkiais keitimais Tautė 5 raudonus žetonus iškeičia į 10 baltų. Jai dar lieka $9-5=4$ raudoni žetonai.

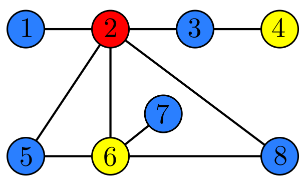
9. Vieną baltą žetoną devintuoju keitimu Tautė iškeičia į 3 raudonus. Tada iš viso ji turi $3+4=7$ raudonus žetonus, ir jai dar lieka $10-1=9$ balti žetonai.

Taigi po 9 keitimų Tautė turi $9+7=16$ žetonų, iš kurių 7 – raudoni. Teisingas atsakymas – **B**.

Pastebėsime, kad sprendime aprašyta keitimų seka nėra vienintelė. Ar galite sugalvoti daugiau?

24. (E) 5 ir 8

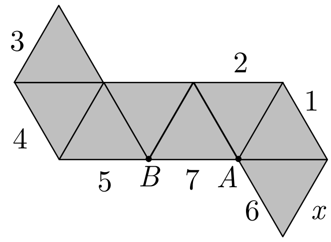
! Skrituliukai 2 ir 6 yra sujungti atkarpa, todėl nuspalvinti dviem skirtingomis spalvomis. Be to, skrituliukai 5 ir 8 abu yra sujungti ir su skrituliuku 2, ir su skrituliuku 6, todėl jie nuspalvinti likusia trečiąja spalva. Paveikslėlyje pavaizduotas galimas nuspalvinimas, leidžiantis atmesti **A**, **B**, **C** ir **D**.



Teisingas atsakymas **E**.

25. (**E**) 5

! Galima pasinaudoti erdvine vaizduote ir įsivaizduoti, kaip išklotinė sulankstoma. Bet galima mąstyti kitaip. Pastebėkime, kad kiekviena oktaedro viršūnė yra lygiai keturių jo sienų, ratu suglaustų kraštinėmis, bendra viršūnė. Išklotinės taškas A (žr. pav.) jau yra keturių trikampių viršūnė, todėl dvi jų laisvos kraštinės 6 ir 7 turi būti suklijuotos. Jas suklijavus, taškas B bus keturių trikampių viršūnė, todėl turi būti suklijuotos dvi jų laisvos likusios kraštinės 5 ir x.



26. (**B**) (444)

? Pirmųjų trijų sekos trejetų atsakymuose nėra, todėl galime atmesti sekos pradžią ir nagrinėti tik dviženklius skaičius: (101)(112)(131)(415) . . . (979)(899). Pastebėkime, kad iš trijų dviženklių skaičių vis sudaromi du skaitmenų trejetai. Tiksliau, gretimų trejetų poras iš eilės apjungus į skaitmenų šešetus

$$(101)(112) \to (10\ 11\ 12), \quad (131)(415) \to (13\ 14\ 15), \quad \ldots,$$

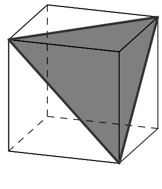
dviženkliai skaičiai suskirstomi į trejetus. Trečiasis dviženklis skaičius juose yra 12, 15, 18, . . ., 99 – tai visi dviženkliai skaičiai, dalūs iš 3. Tarp jų yra skaičiai 24, 48, 66 ir 90. Todėl šešetų sekoje yra šešetai (22 23 24), (46 47 48), (64 65 66) ir (88 89 90), o pradinėje trejetų sekoje – trejetai (222)(324), (464)(748), (646)(566) ir (888)(990).

Taip atmetę kitus atsakymus, renkamės **B**.

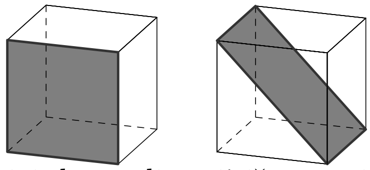
! Užbaikime **?** dalies sprendimą. Jei trejetas (444) yra duotojoje sekoje, tai du iš trijų jo skaitmenų priklauso vienam dviženkliui skaičiui, t. y. skaičiui 44. Skaičius 45 dalijasi iš 3, todėl šešetų sekai priklauso (43 44 45). Tačiau tai reiškia, kad skaičiaus 44 skaitmenys priklauso skirtingiems trejetams (434) ir (445). Vadinasi, trejeto (444) negausime.

27. (**D**) 8

? Įsivaizduokime konkretų kubą. Spėliojant arba protingai perrenkant atvejus, galima atrasti paveikslėlyje parodytą plokštumą: pasirinkus bet kurią kubo viršūnę, imama plokštuma, einanti per tris viršūnes, gretimas pasirinktajai. Tokių tinkamų plokštumų yra 8 – tiek, kiek kubo viršūnių. Nesunku suvokti, kad jei atsirastų dar viena tinkama plokštuma, tai dėl kubo taisyklingumo jų būtų ir daugiau: būtų galima imti kitus taip pat viena kitos atžvilgiu išsidėsčiusių viršūnių trejetus. Vadinasi, tinkamų plokštumų yra arba lygiai **D)** 8, arba daugiau nei **E)** 12.



Renkamės atsakymą **D**.



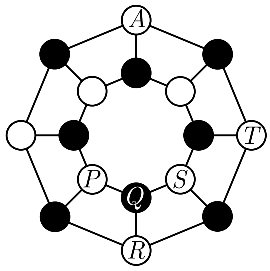
! Įsivaizduodami plokštumas, einančias per įvairius kubo viršūnių trejetus, lengvai gausime plokštumas, einančias per keturias viršūnes: plokštumas, kurioms priklauso kubo siena, ir plokštumas, kurioms priklauso priešingų kubo briaunų pora (žr. pav.). Šiuos atvejus atmetame. Likusį reikiamą atvejį (žr. **?** dalį) galima atspėti, bet galima jį išmąstyti, kartu įsitikinant, kad kitų atvejų nėra.

Jei dvi iš trijų kubo viršūnių priklauso vienai briaunai, tai perrinkdami trečios viršūnės galimybes gauname tik jau atmestus atvejus. Vadinasi, jokios dvi iš trijų viršūnių neturi būti gretimos. Bet kurioms dviem priešingoms sienoms priklauso kubo visos 8 viršūnės. Todėl dvi iš trijų pasirinktų kubo viršūnių visada bus vienoje sienoje. Tada jos turi būti tos sienos – kvadrato – priešingos viršūnės. Perrinkdami trečios viršūnės galimybes, gauname tik čia ir **?** dalyje jau aptartus atvejus. Vadinasi, yra 8 tinkamos plokštumos.

!! Pakanka spėliojant įsivaizduoti **?** ir **!** dalių tris paveikslėlius, o įsitikinti, kad kitų atvejų nėra, galima suskaičiavus kubo viršūnių trejetus.

Kubas turi 6 sienas ir $12 : 2 = 6$ priešingų briaunų poras. Todėl **!** dalies paveikslėliai atitinka $6 + 6 = 12$ plokštumų, einančių per 4 kubo viršūnes. Viršūnių ketverte yra 4 jų trejetai, todėl taip atmetame $12 \cdot 4 = 48$ trejetus. Lieka ištirti $C_8^3 - 48 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} - 48 = 8$ trejetus, o juos atitinka likęs paveikslėlis, nusakantis 8 tinkamus viršūnių trejetus ir tiek pat plokštumų (žr. **?** dalį). Vadinasi, yra 8 tinkamos plokštumos.

28. (C) Tik Q



? Voratinklio mazgus galima nudažyti lyg šachmatų lentos langelius, kad gretimi mazgai visada būtų skirtingų spalvų (žr. pav.). Voro užimamo mazgo spalva po kiekvieno ėjimo keičiasi, o pradinis mazgas baltas. Po 2019-os (nelyginio skaičiaus) ėjimų voras gali būti tik juodame mazge. Vadinasi, tinka tik mazgas Q.

Renkamės atsakymą **C**.

! Užbaigiant **?** sprendimą, lieka pastebėti, kad mazge Q voras galėjo atsidurti per 5 ėjimus, o toliau, vis ropodamas tarp mazgų Q ir R, vėl jame atsidurti po 2019-ojo ėjimo .

29. (B) $\dfrac{1}{6}$

! Marytė gali gauti bet kokį skaičių 1, 2, …, 10 derinį iš 3 skaičių. Taip gauname baigčių aibę, sudarytą iš $C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 10 \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{8}{2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ baigčių. Žinoma, visos baigtys yra vienodai galimos, taigi galime taikyti klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą.

Suskaičiuokime, kelios baigtys yra palankios įvykiui „Vienas iš skaičių lygus kitų dviejų vidurkiui". Tarkime, kad Marytės skaičiai yra a, b, $c = \frac{a+b}{2}$. Koordinačių ašyje šie skaičiai žymėtų vienos atkarpos abu galus ir vidurio tašką. Taigi tokį trejetą vienareikšmiškai apibūdina jo mažiausio ir didžiausio skaičių (nesutvarkyta) pora a, b. Skaičius $a + b$ turi būti lyginis, t. y. skaičiai a ir b turi būti vienodo lyginumo. Kita vertus, pasirinkę bet kokius skirtingus vienodo lyginumo skaičius a ir b nuo 1 iki 10, gauname atitinkamą trejetą a, b, $c = \frac{a+b}{2}$. Čia c yra sveikasis skaičius tarp a ir b neimtinai, todėl $c \in [1; 10]$. Liko suskaičiuoti, kiek yra tokių porų a, b.

Nelyginių skaičių porą iš 5 nelyginių skaičių 1, 3, 5, 7, 9 galima pasirinkti $C_5^2 = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$ būdų. Lyginių skaičių porą iš 5 lyginių skaičių 2, 4, 6, 8, 10 galima pasirinkti tiek pat būdų. Todėl turime $10 + 10 = 20$ palankių baigčių, o ieškoma tikimybė lygi $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

30. Ⓒ 14

! Reikia nustatyti, kiek yra skaitmenų ketvertų (a, b, c, d), kuriems $a, b \neq 0$, o skaičius $N = \overline{abcd}$ dalijasi iš $n_1 = \overline{abc}$, $n_2 = \overline{abd}$, $n_3 = \overline{acd}$ ir $n_4 = \overline{bcd}$.

Kadangi $N = 10n_1 + d$, tai d dalijasi iš $n_1 \geqslant 100$. Todėl $d = 0$. Kadangi $N = \overline{abc0} = \overline{ab0} \cdot 10 + 10c = 10n_2 + 10c$, tai $10c$ dalijasi iš $n_2 \geqslant 100$. Todėl $c = 0$. Gauname $N : n_1 = N : n_2 = 10$, $N : n_3 = \overline{ab} : a$, $N : n_4 = \overline{ab} : b$. Vadinasi, galime performuluoti uždavinį: reikia nustatyti, kiek yra tokių nenulinių skaitmenų porų (a, b), kad $\overline{ab} = 10a + b$ dalijasi iš a ir b, t. y. kad b dalijasi iš a, o $10a$ – iš b.

Liko atlikti kuo trumpesnę atvejų perranką. Skaičiai $k = b : a$ ir $10a : b = 10a : (ak) = 10 : k$ turi būti natūralieji. Vadinasi, $k = 1, 2, 5$ arba 10.

1) Jei $k = 1$, tai $a = b$, o $\overline{ab} = 11a$ dalijasi iš a ir iš b. Taip gauname 9 tinkamas poras $(a, b) = (1, 1), (2, 2), \ldots, (9, 9)$.

2) Jei $k = 2$, tai $b = 2a$ ir gauname 4 galimas poras $(a, b) = (1, 2)$, (2, 4), (3, 6), (4, 8). Jos visos tenkina sąlygą.

3) Jei $k = 5$, tai $b = 5a$ ir gauname vienintelę porą $(a, b) = (1, 5)$. Ji tenkina sąlygą.

4) Jei $k = 10$, tai $b = 10a > 9$ ir jokių porų (a, b) negauname.

Iš viso gavome $9 + 4 + 1 = 14$ porų (a, b). Vadinasi, skaičius N gali įgyti 14 reikšmių. (Jos yra 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800, 1500.)

Ekspertas

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	C
4	B
5	C
6	D
7	B
8	A
9	C
10	A
11	B
12	D
13	B
14	C
15	C
16	E
17	D
18	C
19	A
20	C
21	D
22	D
23	B
24	E
25	E
26	B
27	D
28	C
29	B
30	C