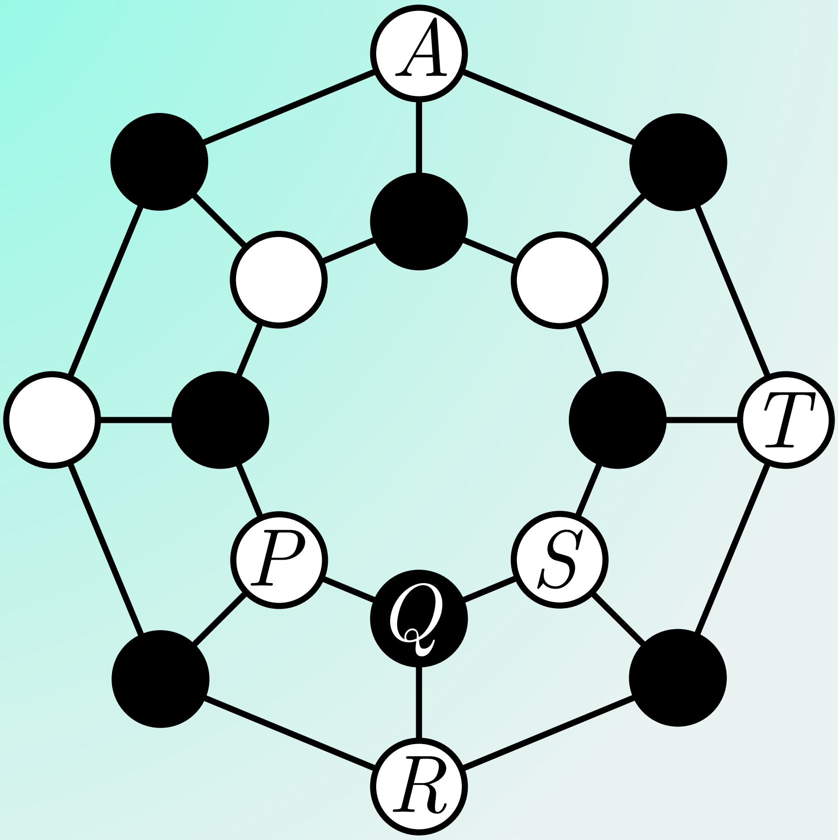
Tarptautinis matematikos konkursas

# KENGŪRA Junioras




Uždoutys ir sprendimai

2019

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

# KENGŪRA 2019. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Šiurienė

# Turinys

# Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 43000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

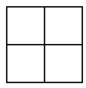
# 2019 m. *Junioro* užduočių sąlygos

**Klausimai po 3 taškus**

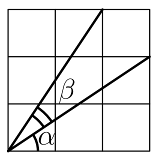
**1.** $20 \cdot 19 + 20 + 19 =$
**A)** 389 **B)** 399 **C)** 409 **D)** 419 **E)** 429

**2.** Žaislinio traukinio kelionės vienas ratas trunka 1 minutę 11 sekundžių. Per kiek laiko traukinys nuvažiuoja šešis tokius ratus?
**A)** 6 minutes 56 sekundes **B)** 7 minutes 6 sekundes **C)** 7 minutes 16 sekundžių **D)** 7 minutes 26 sekundes **E)** 7 minutes 36 sekundes

**3.** Kirpėja ant sienos prieš veidrodį pakabino tokį užrašą, kad jo atspindys veidrodyje būtų žodis **DAILU**. Kokį užrašą pakabino kirpėja?
A) **DAILU** B)  C)  D)  E) 

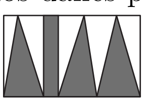
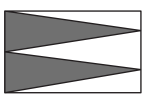
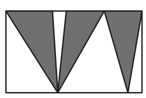
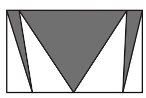
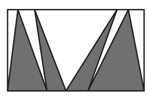
**4.** Skaičiai 1, 2, 3 ir 4 įrašyti į $2 \times 2$ lentelės skirtingus langelius. Suskaičiuotos kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sumos. Dvi iš keturių sumų lygios 4 ir 5. Kokios yra kitos dvi sumos?

**A)** 6 ir 6 **B)** 3 ir 5 **C)** 4 ir 5 **D)** 4 ir 6 **E)** 5 ir 6

**5.** Parką juosia tvora su penkeriais vartais. Monika nori įeiti į parką per vienus vartus ir išeiti per kitus. Keliais būdais ji gali tai padaryti?
**A)** 10 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 25

**6.** Kvadratas padalytas į 9 vienetinius langelius. Kurią lygybę tenkina pažymėtieji kampai?


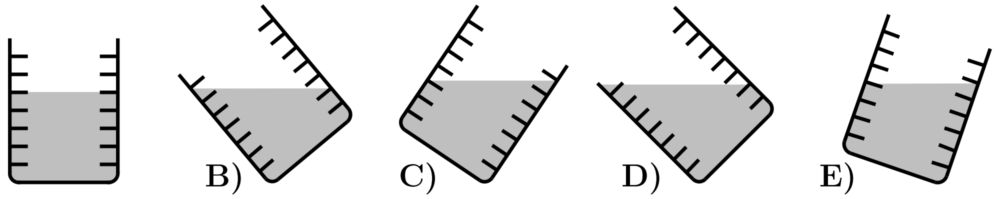
**A)** $\alpha = \beta$ **B)** $2\alpha + \beta = 90°$ **C)** $\alpha + \beta = 60°$ **D)** $2\beta + \alpha = 90°$
**E)** $\alpha + \beta = 45°$

**7.** Piratas parideno tris standartinius lošimo kauliukus ir suskaičiavo iškritusių akučių sumą. Kiek skirtingų sumų taip galima gauti?
**A)** 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

**8.** Aušra skirtingai nuspalvino penkis tokius pat baltus stačiakampius. Kurio stačiakampio pilkosios dalies plotas didžiausias?
**A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

**9.** Kengūros Kengas, Kingas ir Kongas sveria po sveikąjį skaičių kilogramų. Visi trys sveria skirtingai, o jų bendra masė lygi 97 kg. Kiek daugiausiai gali sverti Kengas, jei jis yra lengviausias iš trijų kengūrų?
**A)** 1 kg **B)** 30 kg **C)** 31 kg **D)** 32 kg **E)** 33 kg

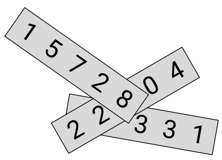
**10.** Į penkias vienodas stiklines įpilta vandens. Keturiose iš jų vandens yra tiek pat. Kurioje stiklinėje vandens ne tiek pat?



**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

### Klausimai po 4 taškus

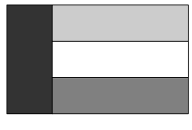
**11.** Trijose juostelėse parašyta po penkiaženklį natūralųjį skaičių. Visų trijų skaičių suma lygi 57263. Paveikslėlyje trys skaitmenys uždengti. Kokie tai skaitmenys?
**A)** 0, 2, 2 **B)** 1, 2, 9 **C)** 2, 4, 9 **D)** 2, 7, 8 **E)** 5, 7, 8




**12.** Kvadrato $ABCD$ viršūnė $B$ yra lygiakraščio trikampio $AEC$ viduje. Raskite $\angle CBE$.
**A)** 30° **B)** 45° **C)** 135° **D)** 145° **E)** 150°

**13.** Iš 10 skaičių $1, 2, \ldots, 10$ Rokas pasirinko keturis skirtingus ir pažymėjo juos $a$, $b$, $c$, $d$. Kokia yra mažiausia galima $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ reikšmė?
**A)** $\frac{2}{10}$ **B)** $\frac{3}{19}$ **C)** $\frac{14}{45}$ **D)** $\frac{29}{90}$ **E)** $\frac{25}{72}$

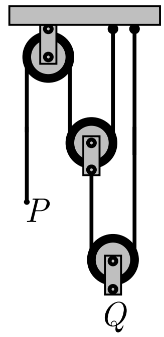
**14.** Stačiakampę Kengūrijos vėliavą sudaro keturi lygiapločiai stačiakampiai (žr. pav.). Vėliavos ilgio ir pločio santykis yra 5 : 3. Koks yra baltojo stačiakampio ilgio ir pločio santykis?
**A)** 3 : 1 **B)** 4 : 1 **C)** 7 : 2 **D)** 18 : 5 **E)** 15 : 4



**15.** Triatloną sudaro trys rungtys: plaukimas, bėgimas ir dviračių lenktynės. Vienų triatlono varžybų dalyviai tris ketvirtadalius visos distancijos važiavo dviračiais, penktadalį visos distancijos – bėgo, o nuplaukti turėjo 2 km. Kiek iš viso kilometrų turėjo įveikti sportininkai?
**A)** 10 **B)** 20 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 60

**16.** Trys skriemuliai dviem virvėmis sujungti į sistemą, kaip parodyta paveikslėlyje. Matomos virvių dalys kabo vertikaliai. Beždžionė patraukė virvės galą $P$ žemyn per 24 centimetrus. Kiek centimetrų pakilo taškas $Q$?

**A)** 24 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 6 **E)** $\frac{24}{5}$



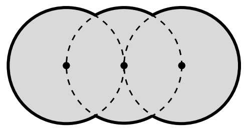

**17.** Uršulė turėjo pusę litrinio stiklainio uogienės. Ji pagamino 2 litrus gėrimo, praskiedusi uogienę vandeniu santykiu 1 : 7. Kurią uogienės dalį panaudojo Uršulė?

**A)** $\dfrac{1}{2}$ **B)** $\dfrac{1}{4}$ **C)** $\dfrac{2}{7}$ **D)** $\dfrac{4}{7}$ **E)** Visą uogienę

**18.** Uršulė pametė savo sūnaus Stasio telefono numerį, bet prisiminė, kad tai septynženklis skaičius $\overline{aaabbbb}$, kurio skaitmenų suma yra dviženklis skaičius $\overline{ab}$. Kam lygi suma $a+b$?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**19.** Nuspalvintą figūrą sudaro trys to paties spindulio $R$ skrituliai (žr. pav.). Vieno iš jų centras yra kitų dviejų lietimosi taškas. Raskite figūros perimetrą.



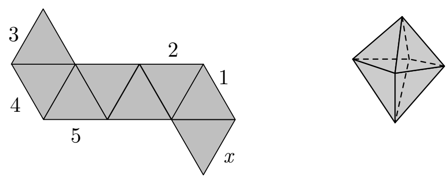
**A)** $\dfrac{10\pi R}{3}$ **B)** $\dfrac{5\pi R}{3}$ **C)** $\dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ **D)** $2\pi R\sqrt{3}$ **E)** $4\pi R$

**20.** Uršulė atsinešė 60 obuolių ir 60 kriaušių bei išdalijo juos vaikams. Visi vaikai gavo po tiek pat obuolių, bet jokie du vaikai negavo po lygiai kriaušių. Kiek daugiausiai vaikų galėjo apdovanoti Uršulė?

**A)** 20 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 6

**Klausimai po 5 taškus**

**21.** Rokas iškirpo iš popieriaus oktaedro išklotinę ir, ją sulankstęs, suklijavo oktaedrą (žr. pav.). Kuriuo skaičiumi pažymėtą išklotinės kraštinę Rokas suklijavo su kraštine $x$?




**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

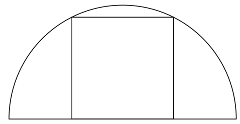
**22.** Skaičiaus 1024 visų teigiamų daliklių suma lygi $a$, o skaičiaus 1024 visų teigiamų daliklių sandauga lygi $b$. Tada

**A)** $(a-1)^5=b$ **B)** $(a+1)^5=b$ **C)** $a^5=b$ **D)** $a^5-1=b$ **E)** $a^5+1=b$

**23.** Visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 99 didėjimo tvarka be tarpų surašyti į vieną eilę. Gautoji skaitmenų seka suskaidyta į skaitmenų trejetus: (123)(456)(789)(101)(112) . . . (979)(899). Kurio trejeto nėra tame skaidinyje?

**A)** (222) **B)** (444) **C)** (464) **D)** (646) **E)** (888)

**24.** Dvi kvadrato viršūnės priklauso pusapskritimiui, o kitos dvi – to pusapskritimio skersmeniui (žr. pav.). Skersmens ilgis lygus 2. Koks yra kvadrato plotas?

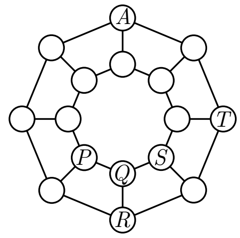


**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{\pi}{4}$ **C)** 1 **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

**25.** Skridinys pastoviu greičiu sukasi aplink savo centrą. Skridinyje pažymėti du taškai. Vienas iš jų yra 3 cm toliau nuo skridinio centro nei kitas, todėl juda 2,5 karto greičiau nei kitas. Koks yra atstumas nuo skridinio centro iki tolimesniojo taško?
**A)** 10 cm **B)** 9 cm **C)** 8 cm **D)** 6 cm **E)** Kitas atsakymas

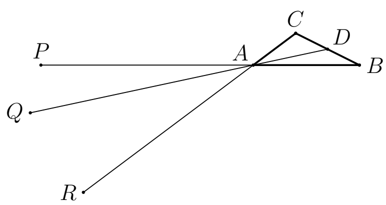
**26.** Duotas kubas. Kiek yra plokštumų, einančių per lygiai tris jo viršūnes?
**A)** 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 12

**27.** Pradžioje voras tupėjo voratinklio mazge $A$ (žr. pav.). Vienu ėjimu voras jungiančiu siūlu iš užimamo mazgo perlipa į vieną iš gretimų mazgų. Voras atliko 2019 ėjimų. Kuriame iš mazgų $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ jis gali būti dabar?
**A)** Tik $P$, $R$ ir $S$, bet ne $Q$ ar $T$ **B)** Tik $P$, $R$, $S$ ir $T$, bet ne $Q$
**C)** Tik $Q$ **D)** Tik $T$ **E)** Bet kuriame iš šių mazgų




**28.** Aušra nori išmesti iš aibės $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ kelis skaičius taip, kad likusių skaičių sandauga būtų sveikojo skaičiaus kvadratas. Kiek mažiausiai skaičių ji gali išmesti?
**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**29.** Paveikslėlyje atkarpos $BP$, $CR$ ir $DQ$ kertasi taške $A$. Be to, $BD = CD$, $AP = 2 \cdot AB$, $AQ = 3 \cdot AD$ ir $AR = 4 \cdot AC$. Trikampio $ABC$ plotas lygus $S$. Koks yra trikampio $PQR$ plotas?




**A)** $S$ **B)** $2S$ **C)** $3S$ **D)** $\frac{1}{2}S$ **E)** 0 (t. y. $P$, $Q$, $R$ yra vienoje tiesėje)

**30.** Natūralusis skaičius $N$ yra keturženklis. Kad ir kokį jo skaitmenį išbrauktume, lieka triženklis skaičius, iš kurio dalijasi $N$. Kiek yra tokių keturženklių skaičių $N$?
**A)** 5 **B)** 9 **C)** 14 **D)** 19 **E)** 23

# *Junioro* užduočių sprendimai

**1.** (D) 419

**!** Patogu skaičiuoti taip:

$$20 \cdot 19 + 20 + 19 = 20 \cdot (19 + 1) + 19 = 20^2 + 19 = 400 + 19 = 419.$$

**2.** (B) 7 minutes 6 sekundes

**!** Minutę ir 11 sekundžių reikia padauginti iš 6. Žinoma, gauname 6 minutes ir 66 sekundes. Belieka prisiminti, kad 60 sekundžių yra 1 minutė ir todėl

$$6 \text{ min} + 66 \text{ s} = 6 \text{ min} + 60 \text{ s} + 6 \text{ s} = (6 + 1) \text{ min} + 6 \text{ s} = 7 \text{ min} + 6 \text{ s}.$$

**3.** (E) **U⅃IAᗡ**

**?** Kas yra stebėjęs daiktų atspindžius veidrodyje, kaipmat prisimins, kad atspindys nesutampa su tiesioginiu daikto vaizdu, ir atmes **A)** **DAILU**. Atsakymai **C)** **U⅃IAD** ir D) **ULIAᗡ** netinka, nes, atsispindint užrašui, su visomis raidėmis turi nutikti tas pats: raidės **L** ir **D** arba abi apsigręžia, arba abi neapsigręžia. Atsakymas **B)** **ᗡAI⅃U** netinka, nes atspindyje negali pasikeisti raidžių padėtis viena kitos atžvilgiu: jei atspindyje raidės **D** „pilvukas" atgręžtas į raidę **A**, tai ir užraše ant sienos taip turi būti.

Renkamės atsakymą **E**. Beje, jei dar pastebėsime, kad veidrodyje vaizdas neapsiverčia aukštyn kojomis, tai galutinai įrodysime, kad atsakymas **E** teisingas.

**!** Žiūrint į kito žmogaus veidą, jo dešinė ausis yra matomo vaizdo kairėje. Žiūrint į veidrodį, žmogaus, esančio už nugaros, dešinė ausis bus jo veido atspindžio dešinėje (kaip ir paties žiūrinčiojo dešinė ausis). Vadinasi, veidrodyje už nugaros esančio vaizdo kairė ir dešinė apsikeičia vietomis. Tiksliau pasakius, vaizdas ir atspindys, jei įsivaizduotume juos vienoje plokštumoje, būtų simetriški vienas kitam vertikalios tiesės atžvilgiu: **DAILU** $\Longleftrightarrow$ **U⅃IAᗡ**. Gauname atsakymą **E**.

**4.** (E) 5 ir 6

**?** Dviejų sumų, gaunamų eilutėse, suma lygi $1+2+3+4 = 10$. Tokia pati yra ir kitų dviejų sumų (gaunamų stulpeliuose) suma. Todėl dviejų ieškomų skaičių suma lygi $10 + 10 - 4 - 5 = 11$. Šią sąlygą tenkina tik atsakymas **E**.

**!** Sumą 4 galima gauti tik tuo atveju, jei skaičiai 1 ir 3 yra vienoje eilutėje arba viename stulpelyje. Toliau likusius du skaičius galima įrašyti tik dviem būdais (žr. pav.) ir gauti likusias sumas, lygias arba $2 + 4 = 6$, $1 + 2 = 3$, $3 + 4 = 7$, arba $2 + 4 = 6$, $1 + 4 = 5$, $3 + 2 = 5$. Antrasis atvejis, kai turime sumas 4 ir 5 bei 5 ir 6, tinka.

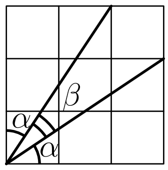
| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 4 | 2 |

**5.** (D) 20

**!** Vartus, per kuriuos įeis, Monika gali pasirinkti bet kaip, t. y. 5 būdais. Kiekvienu iš 5 atvejų Monika vartus, per kuriuos išeis, jau gali pasirinkti tik iš likusių 4 vartų. Vadinasi, iš viso yra $5 \cdot 4 = 20$ būdų.

**6.** (B) $2\alpha + \beta = 90°$




**!** Kvadratas su jame išvestomis linijomis yra simetriškas savo įstrižainės atžvilgiu. Todėl iš kvadrato viršūnės išvestos dvi atkarpos dalija statųjį kampą į kampus $\alpha$, $\beta$ ir vėl $\alpha$ (žr. pav.). Vadinasi, $90° = \alpha + \beta + \alpha = 2\alpha + \beta$.

Kad sprendimas būtų pilnas, pastebėkime: jei kartu būtų teisingas ir vienas iš kitų pateiktų atsakymų, tai gautume arba $\beta = 0°$, arba $\alpha = 30°$. Pastaroji lygybė prieštarauja teisingai lygybei $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

**7.** (C) 16

**!** Mažiausia galima akučių suma yra $1+1+1 = 3$, o didžiausia galima – $6+6+6 = 18$. Nesunku patikėti, kad įmanoma gauti visas sumas nuo 3 iki 18. Nesunku ir tuo įsitikinti:

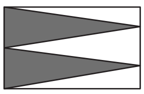
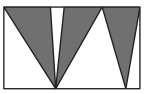
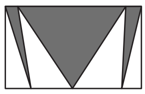
$$\begin{array}{lllll} 1+1+1, & 1+1+2, & 1+1+3, & \ldots, & 1+1+6, \\ 1+1+6, & 1+2+6, & 1+3+6, & \ldots, & 1+6+6, \\ 1+6+6, & 2+6+6, & 3+6+6, & \ldots, & 6+6+6. \end{array}$$

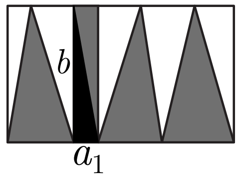
Nuo 3 iki 18 yra $18 - 2 = 16$ natūraliųjų skaičių.

**8.** (A) 

**?** Stačiakampių matmenis pažymėkime $a \times b$. Nagrinėkime atsakymą **E**. Pilkąją dalį sudaro trikampiai, kurių kraštinės $a_1, a_2, \ldots$ sudaro stačiakampio kraštinę $a$, o į jas nuleistos aukštinės lygios $b$. Todėl pilkosios dalies plotas lygus $a_1b/2 + a_2b/2 + \ldots = (a_1 + a_2 + \ldots)b/2 = ab/2$. Analogiškai tą patį gauname atsakymams **B** ir **D**. Trys plotai lygūs, todėl šie atsakymai negali būti teisingi. O atsakyme **C** plotas dar mažesnis, nes čia $a_1 + a_2 + \ldots < a$.

Renkamės atsakymą **A**.

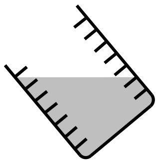
**B)**  **C)**  **D)**  **E)** 



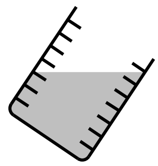

**!** Užbaikime **?** dalies sprendimą. Atsakyme **A** turime panašią, bet kiek kitokią situaciją nei kitur. Jei čia vietoj pilkojo stačiakampio $a_1 \times b$ turėtume perpus mažesnį juodąjį trikampį su kraštine $a_1$ ir aukštine $b$ (žr. pav.), tai nuspalvintos dalies plotas vėl būtų lygus $ab/2$. Vadinasi, iš tikrųjų pilkosios dalies plotas čia didesnis už $ab/2$ – didesnis nei kituose atsakymuose.

**9.** (C) 31 kg

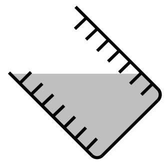
**!** Jei Kengas svertų bent 32 kg, tai bendra trijų kengūrų masė būtų bent $32+33+34=99$ (kg). Tikrinkime didžiausią iš likusių galimų Kengo masės reikšmių 31 kg. Kad gautume situaciją, tenkinančią sąlygą, pakanka imti Kingo masės mažiausią galimą reikšmę 32 kg, o tada – Kongo masę, lygią $97-31-32=34$ (kg). Taigi, Kengo didžiausia galima masė yra 31 kg.

**10.** (B) 

**?** Palyginkime stiklines **B** ir **C**. Abiem atvejais vandens aukštis vienoje stiklinės pusėje yra toks pats (7 padalos), o kitoje – skirtingas (atitinkamai 2 ir 3 padalos). Todėl šiose stiklinėse vandens kiekis skirtingas, ir vienas iš atsakymų **B** ir **C** turi būti teisingas.

**C)** 

Analogiškai galima samprotauti apie stiklines **B** ir **D**: vienoje kiekvienos iš jų pusėje vanduo siekia antrąją padalą, o kitoje – atitinkamai septintąją bei aštuntąją. Todėl vienas iš atsakymų **B** ir **D** teisingas.

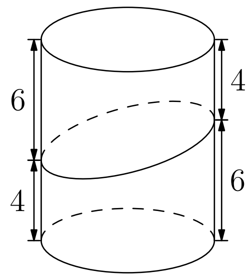
**D)** 

Renkamės atsakymą **B**, nes jis vienintelis gali būti teisingas.

**??** Nors uždavinyje kalbama apie įpilto vandens tūrį, panagrinėkime paveikslėliuose matomus vandens skerspjūvius ir jų plotus. Tie skerspjūviai yra trapecijos formos. Visos 5 trapecijos turi tokią pačią aukštinę, o pagrindų ilgius $a$ ir $b$ rodo pažymėtos padalos. Laikykime, kad padalos aukštis yra 1. Kadangi atsakymuose **A**, **C**, **D**, **E** turime $a+b=10$, o atsakyme **B** – $a+b=9$, tai keturių trapecijų plotai lygūs, o vienos – kitoks.

Natūralu spėti, kad teisingas atsakymas yra **B**.

**!** Laikykime, kad vienos padalos, pažymėtos ant stiklinių, aukštis yra 1, o stiklinių dugno plotą pažymėkime $S$. Vertikalioje stiklinėje vanduo užpildo ritinio formą. Pasviroje stiklinėje vanduo užima formą, į kokias ritinį padalija plokštuma (ta forma vadinama nupjautiniu ritiniu). Iš dviejų tokių vienodų formų vėl galima sudėti ritinį, kurio tūris dvigubai didesnis už formos tūrį. Pavyzdžiui, atsakyme **E** taip gausime ritinį, kurio aukštinė lygi $4+6=10$ (žr. pav.) ir todėl tūris lygus $10S$. Vadinasi, vandens tūris atsakyme **E** lygus $5S$. Analogiškai gauname tūrius **A)** $(5+5)S/2=5S$, **B)** $(7+2)S/2=4{,}5S$, **C)** $(3+7)S/2=5S$, **D)** $(8+2)S/2=5S$. Kitoks vandens tūris yra stiklinėje **B**. Beje, patvirtinome **??** dalies spėjimą, kad, norint palygint vandens tūrius, čia pakanka tikrinti tik $a+b$ reikšmes.




**11.** (B) 1, 2, 9

**?** Matematikoje gerai žinomas toks dalumo iš 9 požymio apibendrinimas: kiekvienas natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip jo skaitmenų suma. Lygybėje $57263=15728+$ $+22*04+**331$ galime pereiti prie skaitmenų sumų: skaičius $5+7+2+6+3=23$ dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip skaičius $23+(8+*)+(*+*+7)$. Todėl $*+*+*+8+7$ dalijasi iš 9. Šią sąlygą tenkina tik atsakymas **B**.

**!** Sąlygą galima greitai suprastinti:

$$57263 = 15728 + 22*04 + **331 = 15700 + 22*00 + **300 + 63,$$

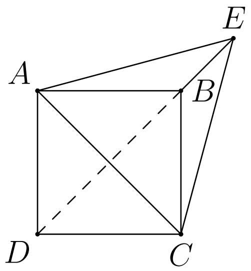
$$57200 = 15700 + 22*00 + **300, \qquad 572 = 157 + 22* + **3 =$$

$$= 157 + (220 + *) + (**0 + 3) = (157 + 3 + 220) + (**0 + *) = 380 + ***,$$

$$*** = 572 - 380 = (500 - 300) + (72 - 80) = 200 - 8 = 192.$$

Vadinasi, nežinomi skaitmenys yra 1, 2, 9.

**12.** (C) 135°




**!** Svarbu įsivaizduoti situaciją. Yra du lygiakraščiai trikampiai, kurių viena kraštinė yra duoto kvadrato $ABCD$ įstrižainė $AC$. Taškas $B$ yra tik vieno iš tų trikampių viduje (žr. pav.). Dabar nesunku pastebėti, kad kvadratas ir trikampis simetriški tiesės $BD$, kuri yra kvadrato įstrižainės $AC$ vidurio statmuo, atžvilgiu. Todėl

$$\angle CBE = \angle ABE, \quad 360° = \angle CBE + \angle ABE + \angle ABC = 2\angle CBE + 90°,$$

ir $\angle CBE = (360° - 90°) : 2 = 135°$.

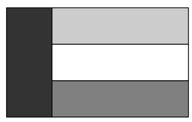
**13.** (C) $\frac{14}{45}$

**!** Žinoma, mažiausią reiškinio $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ reikšmę gausime, jei imsime mažiausias galimas skaitiklių $a$ ir $c$ reikšmes 1 ir 2 bei didžiausias galimas vardiklių $b$ ir $d$ reikšmes 9 ir 10. Priklausomai nuo to, kokia tvarka priskirsime tas reikšmes, gausime

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{9} = \frac{9}{90} + \frac{20}{90} = \frac{29}{90} \quad \text{arba} \quad \frac{1}{9} + \frac{2}{10} = \frac{10}{90} + \frac{18}{90} = \frac{28}{90}.$$

Abi reikšmės yra galimos, todėl teisingas atsakymas yra mažesnioji iš jų $\frac{28}{90} = \frac{14}{45}$.

**14.** (E) 15 : 4



**!** Trijų nejuodų stačiakampių ilgiai ir plotai vienodi, todėl vienodi yra ir pločiai. Kiekvieno iš šių stačiakampių matmenis pažymėkime $x \times y$. Reikia rasti $x : y$. Juodojo stačiakampio plotis lygus $y + y + y = 3y$, o jo ilgį pažymėkime $z$. Keturių stačiakampių plotai lygūs $x \cdot y = z \cdot 3y$, o vėliavos ilgis ir plotis lygūs $z + x$ ir $3y$. Tada $x = 3z$,

$$5 : 3 = (z + x) : (3y) = 4z : (3y), \quad z = \frac{5y}{4}, \quad x = \frac{15y}{4}, \quad x : y = 15 : 4.$$

**!!** Čia svarbios tik proporcijos, o ne tikslūs matmenys. Todėl galime laikyti, kad vėliavos matmenys yra $5 \times 3$. Tada vėliavos plotas lygus 15. Baltojo stačiakampio plotas lygus ketvirtadaliui vėliavos ploto $\frac{15}{4}$. Trijų nejuodų stačiakampių ilgiai ir plotai vienodi, todėl vienodi yra ir pločiai. Tų pločių suma lygi vėliavos pločiui 3, tad baltojo stačiakampio plotis lygus $3 : 3 = 1$. Tada baltojo stačiakampio ilgis lygus $\frac{15}{4} : 1 = \frac{15}{4}$, o ilgio ir pločio santykis yra $\frac{15}{4} : 1 = 15 : 4$.

**!!!** Trijų nejuodų stačiakampių ilgiai ir plotai vienodi, todėl vienodi yra ir pločiai. Tų pločių suma lygi vėliavos pločiui, tad baltojo stačiakampio plotis lygus $\frac{1}{3}$ vėliavos pločio. Baltojo stačiakampio plotas lygus $\frac{1}{4}$ vėliavos ploto, todėl ilgis turi būti lygus $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ vėliavos ilgio. Vadinasi, baltojo stačiakampio matmenys yra $(5 \cdot \frac{3}{4}) : (3 \cdot \frac{1}{3}) = 15 : 4$.

**15.** (**D**) 40

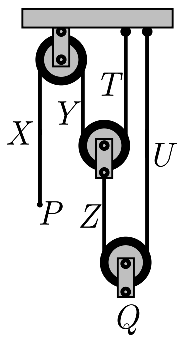
**!** Galima ieškomą skaičių pažymėti $x$ (km) ir sudaryti bei išspręsti lygtį $\frac{3}{4}x + \frac{x}{5} + 2 = x$. Vietoj to nustatykime, kurią visos distancijos dalį sudaro 2 kilometrai plaukimo:

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

Kadangi 2 km yra dvidešimtadalis visos distancijos, tai jos ilgis yra $2 \cdot 20 = 40$ (km).

**16.** (**D**) 6

**!** Penkias vertikalias virvių dalis iš kairės į dešinę pažymėkime $X$, $Y$, $Z$, $T$, $U$ (žr. pav.). Nustatykime, kaip pakito jų ilgiai, beždžionei patraukus virvę.




Dalys $X$, $Y$ ir $T$ sudaro virvę, todėl $Y$ ir $T$ bendras ilgis sumažėjo 24 cm – tiek, kiek pailgėjo $X$. Be to, $Y$ ir $T$ sutrumpėjo po tiek, kiek pakilo vidurinysis skriemulys, taigi po lygiai, po $24 : 2 = 12$ (cm).

Analogiškai dalių $T$ ir $Z$ bendras ilgis bei dalies $U$ ilgis sumažėjo po tiek, kiek pakilo dešinysis skriemulys, po lygiai. Bendras $Z$ ir $U$ ilgis nekinta (sudaro virvę). Tada $T$, $Z$ ir $U$ bendras ilgis sumažėjo 12 cm (tiek, kiek $T$ ilgis), o $T$ ir $Z$ bendras ilgis bei $U$ ilgis sumažėjo po $12 : 2 = 6$ (cm). Vadinasi, tiek pakilo taškas $Q$.

**17.** (**A**) $\frac{1}{2}$

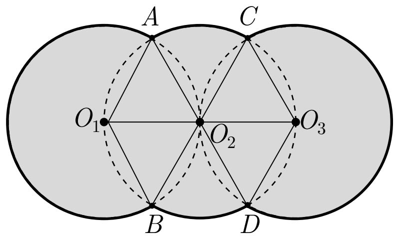
**!** Stiklainyje buvo pusė litro uogienės. Uršulės gėrime uogienė sudaro vieną iš $1 + 7 = 8$ lygių dalių. Vadinasi, Uršulė panaudojo $\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ litro uogienės, taigi pusę puslitrio, $\frac{1}{2}$ visos turėtos uogienės.

**18.** (**C**) 10

**?** Skaičiaus $\overline{aaabbbb}$ skaitmenų suma lygi $3a+3b+b = 3(a+b)+b$. Kita vertus, ji lygi $\overline{ab} = 10a+b$. Tada $3(a + b) = 10a$ dalijasi iš 10. Tinka tik **C)** $a + b = 10$.

**!** Skaičiaus $\overline{aaabbbb}$ skaitmenų suma lygi $3a + 4b = \overline{ab} = 10a + b$ ir tada $7a = 3b$. Vienženklis skaičius $b$ dalijasi iš 7, o tokių nėra daug. Jei $b = 0$, tai $a = 0$ ir $\overline{aaabbbb}$ nėra septynženklis skaičius. Lieka atvejis $b = 7$, $a = 3b : 7 = 3$, tenkinantis sąlygą. Vadinasi, $a+b = 3+7 = 10$.

**19.** (**A**) $\dfrac{10\pi R}{3}$




**!** Kadangi vidurinio apskritimo centras priklauso to paties spindulio šoniniams apskritimams, tai jų centrai priklauso viduriniam apskritimui. Apskritimų sankirtos taškus bei centrus pažymėkime ir sujunkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Visos atkarpos yra lygių apskritimų spinduliai, todėl jos visos lygios, visi 4 jų sudaromi trikampiai lygiakraščiai, o visi tų trikampių kampai lygūs 60°.

Apskritimų centriniai kampai $AO_1B$, $AO_2B$, $CO_2D$, $CO_3D$ visi lygūs $60° + 60° = 120°$ – trečdaliui pilnojo kampo. Todėl apskritimų lankų, į kuriuos šie kampai remiasi, ilgiai lygūs $\frac{1}{3}$ apskritimo ilgio $2\pi R$. Šie keturi lankai yra tiksliai tos apskritimų dalys, kurios nepriklauso duotosios figūros kraštui. Jų bendras ilgis lygus $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi R$, o trijų apskritimų bendras ilgis lygus $3 \cdot 2\pi R$. Vadinasi, figūros perimetras (jos krašto ilgis) lygus

$$3 \cdot 2\pi R - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi R = \left(3 - \frac{4}{3}\right) \cdot 2\pi R = \frac{5}{3} \cdot 2\pi R = \frac{10\pi R}{3}.$$

**20.** (**D**) 10

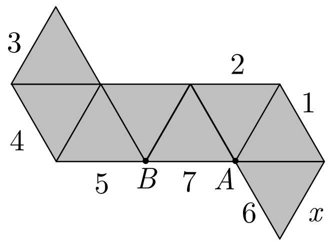
**!** Pažvelkime į pateiktus atsakymus. Jei vaikų būtų 12 ar daugiau, tai kriaušių būtų mažiausiai

$$0 + 1 + \ldots + 11 = (0 + 11) + (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 11 \cdot 6 = 66.$$

Kitas atsakymas **D)** 10 jau tenkina sąlygą: 10-iai vaikų Uršulė galėjo išdalyti po $60 : 10 =$ $= 6$ obuolius ir atitinkamai po 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir $60 - (0 + 1 + \ldots + 8) = 24$ kriaušes.

Kad sprendimas būtų pilnas, belieka pastebėti, kad atsakymas 11 netinka, nes 60 obuolių neišeitų padalyti 11-ai vaikų po lygiai.

**21.** (**E**) 5




**!** Galima pasinaudoti erdvine vaizduote ir įsivaizduoti, kaip išklotinė sulankstoma. Bet galima mąstyti kitaip. Pastebėkime, kad kiekviena oktaedro viršūnė yra lygiai keturių jo sienų, ratu suglaustų kraštinėmis, bendra viršūnė. Išklotinės taškas $A$ (žr. pav.) jau yra keturių trikampių viršūnė, todėl dvi jų laisvos kraštinės 6 ir 7 turi būti suklijuotos. Jas suklijavus, taškas $B$ bus keturių trikampių viršūnė, todėl turi būti suklijuotos dvi jų laisvos likusios kraštinės 5 ir $x$.

**22.** (**B**) $(a+1)^5 = b$

**?** Teigiami $1024 = 2^{10}$ dalikliai yra $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$. Todėl $b = 2^n$, kur

$$n = 0 + 1 + \ldots + 10 = (1+10) + (2+9) + \ldots + (5+6) = 5 \cdot 11 = 55.$$

Tada $b = c^5$, kur $c = 2^{11}$. Skirtumas tarp didelių skaičių penktųjų laipsnių $c^5$ ir $a^5$ negali būti lygus 1, todėl atsakymai **D** ir **E** netinka. Lieka galimybės **A)** $\sqrt[5]{b} = a - 1$, **B)** $\sqrt[5]{b} = a + 1$ ir **C)** $\sqrt[5]{b} = a$. Kadangi

$$a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 3 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2^8),$$

tai $a$ ir $a - 1$ nesidalija iš 4. Kadangi $\sqrt[5]{b} = 2^{11}$ dalijasi iš 4, tai tinka tik atsakymas **B**.

**!** Teigiami $1024 = 2^{10}$ dalikliai yra dvejeto laipsniai $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$. Todėl

$$b = 2^{0+1+2+\ldots+10} = 2^{55}.$$

Kad $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1$ galima įrodyti, panaudojus geometrinės progresijos sumos formulę arba pastebėjus, kad

$$a + 1 = (1+1) + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = (2+2) + 2^2 + \ldots + 2^{10} =$$
$$= (2^2 + 2^2) + 2^3 + \ldots + 2^{10} = (2^3 + 2^3) + 2^4 + \ldots + 2^{10} = \ldots =$$
$$= (2^9 + 2^9) + 2^{10} = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11}.$$

Vadinasi, $(a+1)^5 = (2^{11})^5 = 2^{55} = b$.

**23.** (**B**) (444)

**?** Pirmųjų trijų sekos trejetų atsakymuose nėra, todėl galime atmesti sekos pradžią ir nagrinėti tik dviženklius skaičius: (101)(112)(131)(415)...(979)(899). Pastebėkime, kad iš trijų dviženklių skaičių vis sudaromi du skaitmenų trejetai. Tiksliau, gretimų trejetų poras iš eilės apjungus į skaitmenų šešetus

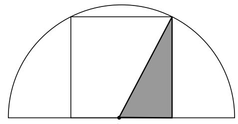
$$(101)(112) \to (10\ 11\ 12), \quad (131)(415) \to (13\ 14\ 15), \quad \ldots,$$

dviženkliai skaičiai suskirstomi į trejetus. Trečiasis dviženklis skaičius juose yra 12, 15, 18, ..., 99 – tai visi dviženkliai skaičiai, dalūs iš 3. Tarp jų yra skaičiai 24, 48, 66 ir 90. Todėl šešetų sekoje yra šešetai (22 23 24), (46 47 48), (64 65 66) ir (88 89 90), o pradinėje trejetų sekoje – trejetai (222)(324), (464)(748), (646)(566) ir (888)(990).

Taip atmetę kitus atsakymus, renkamės **B**.

**!** Užbaikime **?** dalies sprendimą. Jei trejetas (444) yra duotojoje sekoje, tai du iš trijų jo skaitmenų priklauso vienam dviženkliui skaičiui, t. y. skaičiui 44. Skaičius 45 dalijasi iš 3, todėl šešetų sekai priklauso (43 44 45). Tačiau tai reiškia, kad skaičiaus 44 skaitmenys priklauso skirtingiems trejetams (434) ir (445). Vadinasi, trejeto (444) negausime.

**24.** (**A**) $\frac{4}{5}$




**?** Kvadrato kraštinę pažymėkime $a$. Turime pusę apskritimo, kurio centras $O$ yra skersmens vidurio taškas, o spindulys yra $2 : 2 = 1$. Nesunku įžiūrėti, kad paveikslėlis turi vertikalią simetrijos ašį: taškas $O$ dalija kvadrato apatinę kraštinę pusiau. Sujunkime tašką $O$ su viena iš tolimųjų kvadrato viršūnių (žr. pav.). Pilkasis trikampis yra statusis. Jo įžambinė yra apskritimo spindulys, o statiniai yra kvadrato kraštinė ir pusė kitos kvadrato kraštinės. Pagal Pitagoro teoremą, $a^2 + (\frac{a}{2})^2 = 1^2$ ir $\frac{5a^2}{4} = 1$. Kvadrato plotas lygus $a^2 = 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}$.

**!** Kad **?** dalies sprendimas būtų pilnas, pagrįskime teiginį, jog apskritimo centras dalija kvadrato kraštinę pusiau, t. y. kad atstumai nuo dviejų apatinių kvadrato viršūnių iki $O$ būtinai yra lygūs. Tuos atstumus pažymėkime $x$ ir $y$. Sujungę $O$ su viršutinėmis dviem kvadrato viršūnėmis, gauname du apskritimo spindulius, kurių ilgiai yra 1. Pagal Pitagoro teoremą, $x^2 + a^2 = 1^2$ ir $y^2 + a^2 = 1^2$, todėl $x^2 = 1 - a^2 = y^2$ ir $x = y$.

**25.** (**E**) Kitas atsakymas

**?** Tikrinkime atsakymus. Atstumai nuo skridinio centro iki pažymėtųjų taškų gali būti lygūs **A)** 10 ir 7 cm; **B)** 9 ir 6 cm; **C)** 8 ir 5 cm; **D)** 6 ir 3 cm. Taškai aplink centrą juda apskritimais, kurių spinduliai yra tie atstumai. Todėl kol skridinys pilnai apsisuka vieną kartą, taškai nueina tokį kelią: **A)** $20\pi$ ir $14\pi$ cm; **B)** $18\pi$ ir $12\pi$ cm; **C)** $16\pi$ ir $10\pi$ cm; **D)** $12\pi$ ir $6\pi$ cm. Kadangi laikas tas pats, tai taškų greičių santykis lygus nueitų kelių santykiui: **A)** 10:7; **B)** 3:2; **C)** 8:5; **D)** 2:1. Tačiau tas santykis lygus 5:2, nė vienas atsakymas netinka.

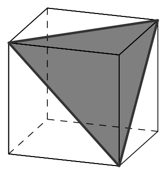
Renkamės atsakymą **E**.

**!** Ieškomą skaičių pažymėkime $x$ (cm). Tada atstumai nuo skridinio centro iki pažymėtųjų taškų yra $x$ cm ir $(x - 3)$ cm. Taškai aplink centrą juda apskritimais, kurių spinduliai yra tie atstumai. Todėl kol skridinys pilnai apsisuka vieną kartą, taškai nueina po $2\pi x$ cm ir $2\pi(x-3)$ cm. Kadangi laikas tas pats, tai taškų greičių santykis lygus nueitų kelių santykiui:

$$2{,}5 = x : (x - 3), \quad x = 2{,}5(x - 3) = 2{,}5x - 7{,}5,$$

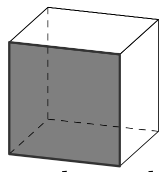
$$7{,}5 = 2{,}5x - x = 1{,}5x, \quad x = 75 : 15 = 5 \text{ (cm)}.$$

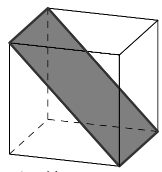
**26.** D 8



**?** Įsivaizduokime konkretų kubą. Spėliojant arba protingai perrenkant atvejus, galima atrasti paveikslėlyje parodytą plokštumą: pasirinkus bet kurią kubo viršūnę, imama plokštuma, einanti per tris viršūnes, gretimas pasirinktajai. Tokių tinkamų plokštumų yra 8 – tiek, kiek kubo viršūnių. Nesunku suvokti, kad jei atsirastų dar viena tinkama plokštuma, tai dėl kubo taisyklingumo jų būtų ir daugiau: būtų galima imti kitus taip pat viena kitos atžvilgiu išsidėsčiusių viršūnių trejetus. Vadinasi, tinkamų plokštumų yra arba lygiai **D)** 8, arba daugiau nei **E)** 12.

Renkamės atsakymą **D**.





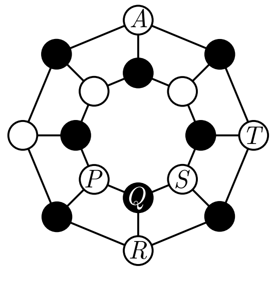
**!** Įsivaizduodami plokštumas, einančias per įvairius kubo viršūnių trejetus, lengvai gausime plokštumas, einančias per keturias viršūnes: plokštumas, kurioms priklauso kubo siena, ir plokštumas, kurioms priklauso priešingų kubo briaunų pora (žr. pav.). Šiuos atvejus atmetame. Likusį reikiamą atvejį (žr. **?** dalį) galima atspėti, bet galima jį išmąstyti, kartu įsitikinant, kad kitų atvejų nėra.

Jei dvi iš trijų kubo viršūnių priklauso vienai briaunai, tai perrinkdami trečios viršūnės galimybes gauname tik jau atmestus atvejus. Vadinasi, jokios dvi iš trijų viršūnių neturi būti gretimos. Bet kurioms dviem priešingoms sienoms priklauso kubo visos 8 viršūnės. Todėl dvi iš trijų pasirinktų kubo viršūnių visada bus vienoje sienoje. Tada jos turi būti tos sienos – kvadrato – priešingos viršūnės. Perrinkdami trečios viršūnės galimybes, gauname tik čia ir **?** dalyje jau aptartus atvejus. Vadinasi, yra 8 tinkamos plokštumos.

**!!** Pakanka spėliojant įsivaizduoti **?** ir **!** dalių tris paveikslėlius, o įsitikinti, kad kitų atvejų nėra, galima suskaičiavus kubo viršūnių trejetus.

Kubas turi 6 sienas ir $12 : 2 = 6$ priešingų briaunų poras. Todėl **!** dalies paveikslėliai atitinka $6 + 6 = 12$ plokštumų, einančių per 4 kubo viršūnes. Viršūnių ketverte yra 4 jų trejetai, todėl taip atmetame $12 \cdot 4 = 48$ trejetus. Lieka ištirti $C_8^3 - 48 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 48 = 8$ trejetus, o juos atitinka likęs paveikslėlis, nusakantis 8 tinkamus viršūnių trejetus ir tiek pat plokštumų (žr. **?** dalį). Vadinasi, yra 8 tinkamos plokštumos.

**27.** C Tik $Q$




**?** Voratinklio mazgus galima nudažyti lyg šachmatų lentos langelius, kad gretimi mazgai visada būtų skirtingų spalvų (žr. pav.). Voro užimamo mazgo spalva po kiekvieno ėjimo keičiasi, o pradinis mazgas baltas. Po 2019-os (nelyginio skaičiaus) ėjimų voras gali būti tik juodame mazge. Vadinasi, tinka tik mazgas $Q$.

Renkamės atsakymą **C**.

**!** Užbaigiant **?** sprendimą, lieka pastebėti, kad mazge $Q$ voras galėjo atsidurti per 5 ėjimus, o toliau, vis ropodamas tarp mazgų $Q$ ir $R$, vėl jame atsidurti po 2019-ojo ėjimo .

**28.** (B) 2

! Atkreipkime dėmesį į skaičių 70. Jis dalijasi iš 7, bet ne iš $7^2$, o likę 8 duotieji skaičiai nei vienas nesidalija iš 7. Vadinasi, jei iš aibės neišmesime skaičiaus 70, tai joje likusių skaičių sandauga dalysis iš 7, bet ne iš $7^2$. Jei tokia sandauga būtų tikslusis kvadratas $n^2$, tai $n^2$ dalytųsi iš 7. Kadangi skaičius 7 pirminis, tai tada $n$ dalytųsi iš 7, o $n^2$ dalytųsi iš $7^2$. Vadinasi, skaičių 70 būtina išmesti.

Likusius 8 skaičius grupuokime, jų sandaugose išskirdami kvadratus:

$$20 \cdot 80 = 10^2 \cdot 16 = 40^2, \quad 40 \cdot 90 = 10^2 \cdot 36 = 60^2, \quad 10 \cdot 50 = 5 \cdot 10^2, \quad 30 \cdot 60 = 2 \cdot 30^2.$$

Visų 8 skaičių sandauga lygi

$$P = 40^2 \cdot 60^2 \cdot (5 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 30^2) = (Q)^2 \cdot 5 \cdot 2 = 10Q^2,$$

kur $Q = 40 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 30$. Skaičius $\sqrt{P} = \sqrt{10} \cdot Q$ nėra natūralusis. Kita vertus, $P : 10 = Q^2$. Vadinasi, vien skaičių 70 išmesti iš aibės nepakanka, bet norimą rezultatą gausime išmetę dar ir skaičių 10. Iš aibės būtina ir pakanka išmesti 2 skaičius.

!! Raskime aibės visų 9 skaičių sandaugos $N_0$ skaidinį pirminiais daugikliais:

$$N_0 = 10^9 \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9) = 2^9 \cdot 5^9 \cdot (2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \cdot 7^1.$$

Kad gautume tikslųjį kvadratą, skaidinyje visų laipsnių rodikliai turi būti lyginiai. Matome, kad $N_0$ turime padalyti iš 7, todėl – iš to vienintelio skaičiaus 70, iš kurio tas septynetas skaidinyje atsirado. Taip gauname skaičių $N_1 = N_0 : 70 = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^9$. Matome, kad $N_1$ būtinai turime padalyti iš 2 ir iš 5, t. y. iš $2 \cdot 5 = 10$. Bet to ir pakanka: gauname

$$N_2 = N_1 : 10 = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^8 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4)^2.$$

Vadinasi, iš aibės pakanka išmesti 2 skaičius 70 ir 10.

**29.** (A) $S$

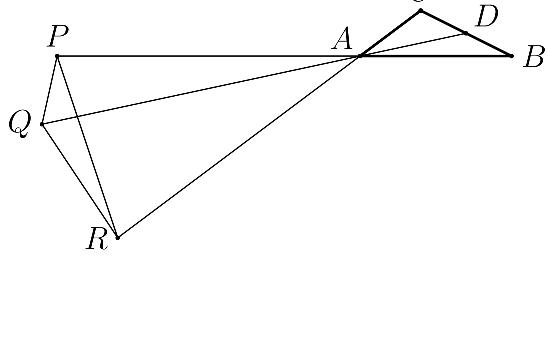
! Bet kokio trikampio $XYZ$ plotą žymėsime $S_{\triangle XYZ}$.

Trikampiai $ABD$ ir $ACD$ turi bendrą aukštinę, nuleistą į jų lygias kraštines $BD$ ir $CD$. Todėl jų plotai lygūs: $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} : 2 = S/2$. Nagrinėkime trikampius $ABD$ ir $APQ$. Jų kampai $BAD$ ir $PAQ$ lygūs kaip kryžminiai, todėl

$$S_{\triangle APQ} = AP \cdot AQ \cdot \frac{\sin \angle PAQ}{2} = 2AB \cdot 3AD \cdot \frac{\sin \angle BAD}{2} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot S_{\triangle ABD} = 3S.$$

Analogiškai, $S_{\triangle AQR} = 3 \cdot 4 \cdot S_{\triangle ADC} = 6S$ ir $S_{\triangle APR} = 2 \cdot 4 \cdot S_{\triangle ABC} = 8S$. Vadinasi, $S_{\triangle PQR} = S_{\triangle APQ} + S_{\triangle AQR} - S_{\triangle APR} = 3S + 6S - 8S = S$.



**30.** Ⓒ 14

! Reikia nustatyti, kiek yra skaitmenų ketvertų $(a, b, c, d)$, kuriems $a, b \neq 0$, o skaičius $N = \overline{abcd}$ dalijasi iš $n_1 = \overline{abc}$, $n_2 = \overline{abd}$, $n_3 = \overline{acd}$ ir $n_4 = \overline{bcd}$.

Kadangi $N = 10n_1 + d$, tai $d$ dalijasi iš $n_1 \geqslant 100$. Todėl $d = 0$. Kadangi $N = \overline{abc0} = \overline{ab0} \cdot 10 + 10c = 10n_2 + 10c$, tai $10c$ dalijasi iš $n_2 \geqslant 100$. Todėl $c = 0$. Gauname $N : n_1 = N : n_2 = 10$, $N : n_3 = \overline{ab} : a$, $N : n_4 = \overline{ab} : b$. Vadinasi, galime performuluoti uždavinį: reikia nustatyti, kiek yra tokių nenulinių skaitmenų porų $(a, b)$, kad $\overline{ab} = 10a + b$ dalijasi iš $a$ ir $b$, t. y. kad $b$ dalijasi iš $a$, o $10a$ – iš $b$.

Liko atlikti kuo trumpesnę atvejų perranką. Skaičiai $k = b : a$ ir $10a : b = 10a : (ak) = 10 : k$ turi būti natūralieji. Vadinasi, $k = 1, 2, 5$ arba 10.

1) Jei $k = 1$, tai $a = b$, o $\overline{ab} = 11a$ dalijasi iš $a$ ir iš $b$. Taip gauname 9 tinkamas poras $(a, b) = (1, 1), (2, 2), \ldots, (9, 9)$.
2) Jei $k = 2$, tai $b = 2a$ ir gauname 4 galimas poras $(a, b) = (1, 2)$, (2, 4), (3, 6), (4, 8). Jos visos tenkina sąlygą.
3) Jei $k = 5$, tai $b = 5a$ ir gauname vienintelę porą $(a, b) = (1, 5)$. Ji tenkina sąlygą.
4) Jei $k = 10$, tai $b = 10a > 9$ ir jokių porų $(a, b)$ negauname.

Iš viso gavome $9 + 4 + 1 = 14$ porų $(a, b)$. Vadinasi, skaičius $N$ gali įgyti 14 reikšmių. (Jos yra 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800, 1500.)

# Atsakymai

| Uždavinio nr. | Atsakymas |
|---|---|
| 1 | D |
| 2 | B |
| 3 | E |
| 4 | E |
| 5 | D |
| 6 | B |
| 7 | C |
| 8 | A |
| 9 | C |
| 10 | B |
| 11 | B |
| 12 | C |
| 13 | C |
| 14 | E |
| 15 | D |
| 16 | D |
| 17 | A |
| 18 | C |
| 19 | A |
| 20 | D |
| 21 | E |
| 22 | B |
| 23 | B |
| 24 | A |
| 25 | E |
| 26 | D |
| 27 | C |
| 28 | B |
| 29 | A |
| 30 | C |