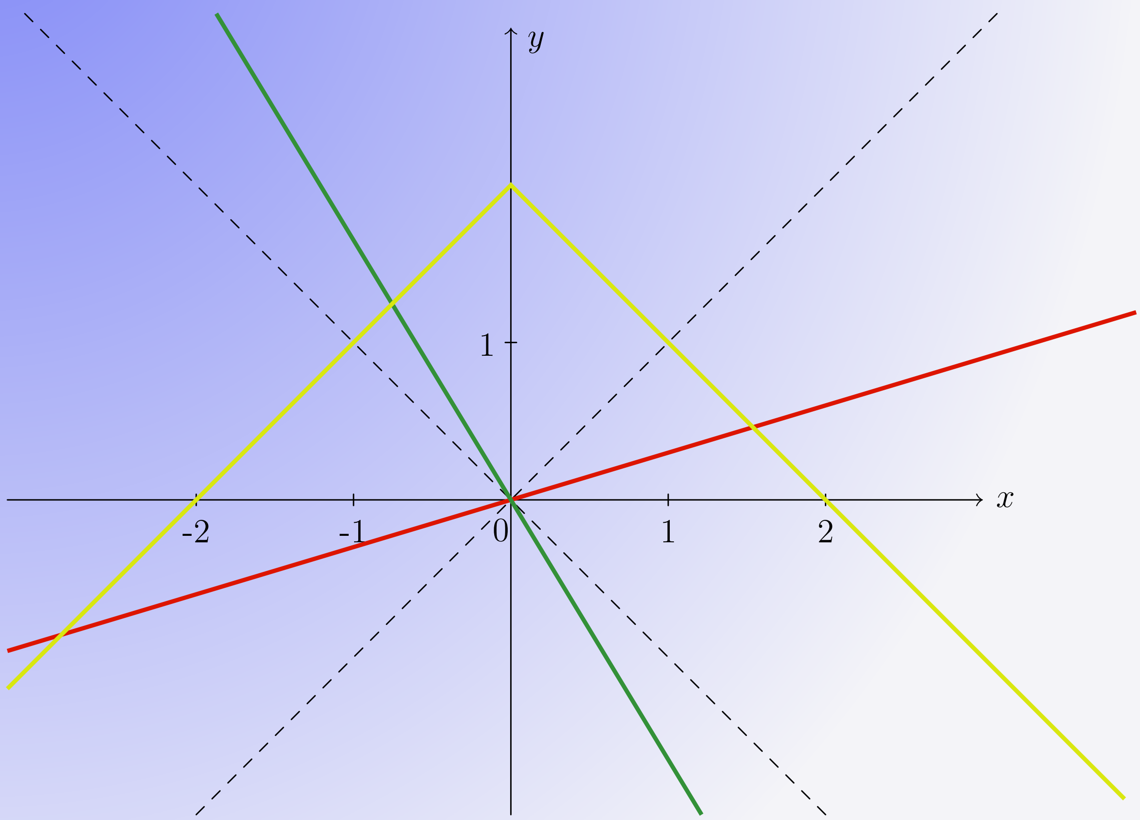
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA
Senjoras



Užduotys ir sprendimai

2019

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2019. Senjoras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Šiurienė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 43000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2019 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2019 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

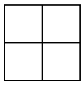
2019 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kengūrijos vėliavą sudaro trys lygūs stačiakampiai (žr. pav.). Koks yra vėliavos ilgio ir pločio santykis?

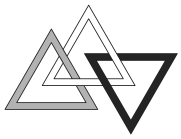
A) 2 : 1 **B)** 3 : 2 **C)** 5 : 3 **D)** 8 : 5 **E)** 9 : 4

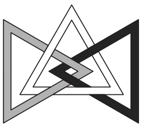
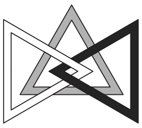
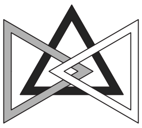
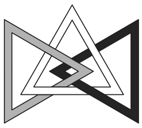
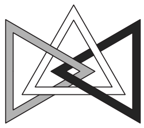
2. Skaičiai 1, 2, 3 ir 4 įrašyti į 2×2 lentelės skirtingus langelius. Suskaičiuotos kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sumos. Dvi iš keturių sumų lygios 4 ir 5. Kokios yra kitos dvi sumos?



A) 6 ir 6 **B)** 3 ir 5 **C)** 4 ir 5 **D)** 4 ir 6 **E)** 5 ir 6

3. Trys trikampiai sunerti į grandinę (žr. pav. dešinėje). Kuriame paveikslėlyje pavaizduota ši grandinė?

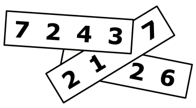


A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

4. Koks yra mažiausio natūraliojo skaičiaus, kurio skaitmenų suma lygi 25, pirmasis skaitmuo?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

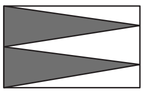
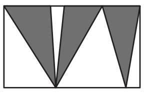
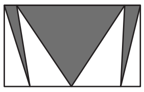
5. Piramidė turi 23 trikampes sienas. Kiek ši piramidė turi briaunų?
A) 23 **B)** 24 **C)** 46 **D)** 48 **E)** 69

6. Trijose juostelėse parašyta po keturženklį natūralųjį skaičių. Visų trijų skaičių suma lygi 11126. Paveikslėlyje trys skaitmenys uždengti. Kokie tai skaitmenys?

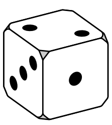
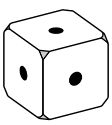
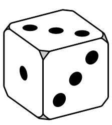
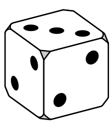
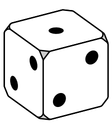


A) 1, 4, 7 **B)** 1, 5, 7 **C)** 3, 3, 3 **D)** 4, 5, 6 **E)** 4, 5, 7

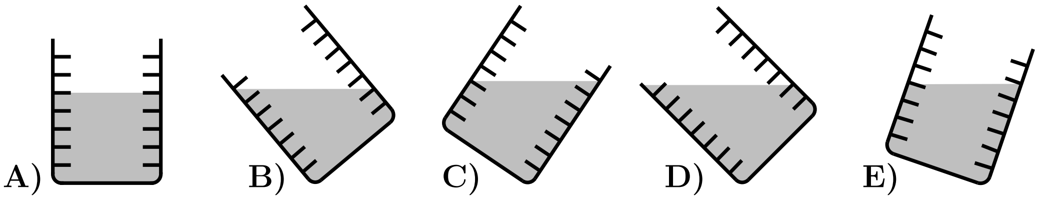
7. Aušra skirtingai nuspalvino penkis tokius pat baltus stačiakampius. Kurio stačiakampio pilkosios dalies plotas didžiausias?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

8. Lošimo kauliuko kiekvienoje sienelėje yra arba 1, arba 2, arba 3 akutės. Tikimybė, kad vieną kartą metus kauliuką iškris 1, 2 arba 3 atitinkamai lygi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ir $\frac{1}{6}$. Kuriame paveikslėlyje garantuotai pavaizduotas kitas kauliukas?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. Į penkias vienodas stiklines įpilta vandens. Keturiose iš jų vandens yra tiek pat. Kurioje stiklinėje vandens ne tiek pat?



10. Kiek natūraliųjų skaičių nuo 2^{10} iki 2^{13} (įskaitant ir šiuos du skaičius) dalijasi iš 2^{10}?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 16

Klausimai po 4 taškus

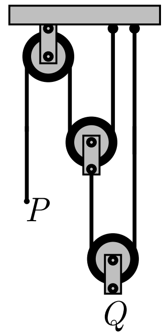
11. Mykolas taip apibrėžė naują operaciją su realiasiais skaičiais: $x \diamondsuit y = y - x$. Realieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybę $(a \diamondsuit b) \diamondsuit c = a \diamondsuit (b \diamondsuit c)$. Kuri iš žemiau pateiktų lygybių garantuotai teisinga?
A) $a = b$ **B)** $b = c$ **C)** $a = c$ **D)** $a = 0$ **E)** $c = 0$

12. Iš 10 skaičių $1, 2, \ldots, 10$ Rokas pasirinko keturis skirtingus ir pažymėjo juos a, b, c, d. Kokia yra mažiausia galima $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ reikšmė?
A) $\dfrac{2}{10}$ **B)** $\dfrac{3}{19}$ **C)** $\dfrac{14}{45}$ **D)** $\dfrac{29}{90}$ **E)** $\dfrac{25}{72}$

13. Trys draugai – Kengas, Kingas ir Kongas – kasdien eina kartu pasivaikščioti. Jei kelionėje Kengas neturi skėčio, tai skėtį turi Kingas. O jei Kingas neturi skėčio, tai skėtį turi Kongas. Šiandien Kongas skėčio nepasiėmė. Kas šiandien garantuotai turi pasiėmęs skėtį?
A) Tik Kengas ir Kingas **B)** Tik Kengas **C)** Kengas, Kingas ir Kongas
D) Nei Kengas, nei Kingas **E)** Tik Kingas

14. Koks yra didžiausias skaičiaus 3 laipsnis (su natūraliuoju rodikliu), iš kurio dalijasi skaičius $7! + 8! + 9!$?
A) 3^2 **B)** 3^4 **C)** 3^5 **D)** 3^6 **E)** 3^7

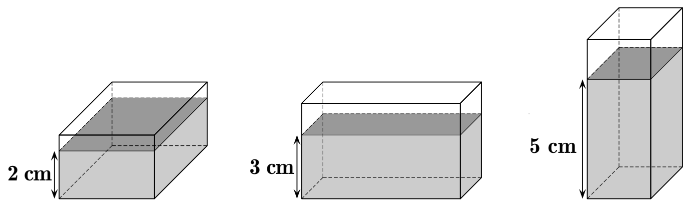
15. Trys skriemuliai dviem virvėmis sujungti į sistemą, kaip parodyta paveikslėlyje. Matomos virvių dalys kabo vertikaliai. Beždžionė patraukė virvės galą P žemyn per 24 centimetrus. Kiek centimetrų pakilo taškas Q?
A) 24 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 6 **E)** $\frac{24}{5}$



16. Šiemet Jaunučio klasėje vaikinų skaičius padidėjo 20%, o merginų skaičius sumažėjo 20%. Todėl klasėje yra vienu mokiniu daugiau nei prieš metus. Kiek mokinių dabar gali būti klasėje?
A) 22 **B)** 26 **C)** 29 **D)** 31 **E)** 34

17. Skaičiaus $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}}$ sveikoji dalis lygi
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 20 **E)** 25

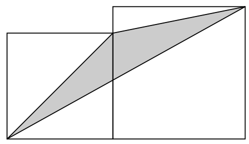
18. Stačiakampio gretasienio formos uždaroje dėžutėje yra 120 cm^3 vandens. Vandens aukštis dėžutėje priklauso nuo to, ant kurios savo sienos ji padėta, ir lygus 2 cm, 3 cm arba 5 cm. Koks yra dėžutės tūris?



A) 160 cm^3 **B)** 180 cm^3 **C)** 200 cm^3 **D)** 220 cm^3 **E)** 240 cm^3

19. Natūraliojo skaičiaus n didžiausias daliklis, mažesnis už n, lygus $n-6$. Kiek yra tokių skaičių n?
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** Kitas atsakymas

20. Paveikslėlyje pavaizduoti du suglausti kvadratai, kurių kraštinės lygios a ir b $(a<b)$. Koks yra nuspalvinto trikampio plotas?



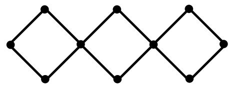
A) $\frac{1}{2}a^2$ **B)** $\sqrt{ab}$ **C)** $\frac{1}{2}b^2$ **D)** $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ **E)** $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Klausimai po 5 taškus

21. Skaičiaus 1024 visų teigiamų daliklių suma lygi a, o skaičiaus 1024 visų teigiamų daliklių sandauga lygi b. Tada
A) $(a-1)^5=b$ **B)** $(a+1)^5=b$ **C)** $a^5=b$ **D)** $a^5-1=b$ **E)** $a^5+1=b$

22. Kokia yra parametro a visų reikšmių, kurioms lygtis $2-|x|=ax$ turi lygiai du sprendinius x, aibė?
A) $(-\infty;-1]$ **B)** $[1;+\infty)$ **C)** $(-1;1)$ **D)** $\{0\}$ **E)** $\{-1,1\}$

23. Visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 99 didėjimo tvarka be tarpų surašyti į vieną eilę. Gautoji skaitmenų seka suskaidyta į skaitmenų trejetus: (123)(456)(789)(101)(112)...(979)(899). Kurio trejeto nėra tame skaidinyje?
A) (222) **B)** (444) **C)** (464) **D)** (646) **E)** (888)



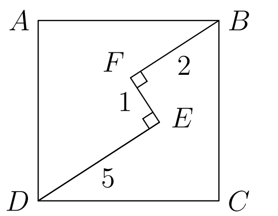
24. Pažymėtieji pynės taškai (žr. pav.) sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 10. Kiekvienam iš trijų kvadratų jo keturių viršūnių skaičių suma lygi tam pačiam skaičiui S. Kokia yra mažiausia galima S reikšmė?
A) 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 22

25. Kiek yra tokių sveikųjų skaičių n, kad skaičius $|n^2 - 2n - 3|$ yra pirminis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Be galo daug

26. Stačiakampėje koordinačių sistemoje per koordinačių pradžią nubrėžtos keturios tiesės, kertančios parabolę $y = x^2 - 2$ aštuoniuose skirtinguose taškuose. Kokia gali būti visų aštuonių taškų abscisių (t. y. x koordinačių) sandauga?
A) Tik 16 **B)** Tik -16 **C)** Tik 8 **D)** Tik -8
E) Sandauga gali įgyti kelias reikšmes

27. Seka a_1, a_2, a_3, ... sudaroma taip: 1) $a_1 = 16$; 2) sekos narys a_{n+1}, kai $n = 1, 2, \ldots$, gaunamas, prie a_n skaitmenų sumos pridėjus 1 ir rezultatą pakėlus kvadratu. Pavyzdžiui, $a_2 = (1 + 6 + +1)^2 = 64$. Raskite a_{2019}.
A) 16 **B)** 25 **C)** 64 **D)** 100 **E)** 121

28. Duotas kubas. Kiek yra plokštumų, einančių per mažiausiai tris jo viršūnes?
A) 6 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

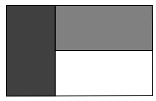


29. Žaibo formos laužtė $DEFB$ jungia dvi kvadrato $ABCD$ viršūnes. Duota, kad $DE \perp EF$, $EF \perp FB$, $DE = 5$, $EF = 1$ ir $FB = 2$. Koks yra kvadrato kraštinės ilgis?
A) 5 **B)** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\frac{11}{2}$ **D)** $5\sqrt{2}$ **E)** $3\sqrt{2}$

30. Marytė atsitiktinai pasirinko tris skirtingus skaičius iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Kokia yra tikimybė, kad vienas iš tų skaičių lygus kitų dviejų skaičių aritmetiniam vidurkiui?
A) $\dfrac{1}{10}$ **B)** $\dfrac{1}{6}$ **C)** $\dfrac{1}{4}$ **D)** $\dfrac{1}{3}$ **E)** $\dfrac{1}{2}$

Senjoro uždavinių sprendimai

1. B $3:2$



! Trijų stačiakampių matmenis pažymėkime $a \times b$, $a > b$. Tada vėliavos plotis yra a ir tuo pat metu $2b$, o jos ilgis yra $a+b$. Vėliavos ilgio ir pločio santykis yra $(a+b):(2b) = 3b:(2b) = 3:2$.

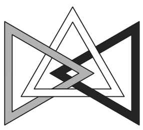
2. E 5 ir 6

? Dviejų sumų, gaunamų eilutėse, suma lygi $1+2+3+4 = 10$. Tokia pati yra ir kitų dviejų sumų (gaunamų stulpeliuose) suma. Todėl dviejų ieškomų skaičių suma lygi $10+10-4-5 = 11$. Šią sąlygą tenkina tik atsakymas **E**.

! Sumą 4 galima gauti tik tuo atveju, jei skaičiai 1 ir 3 yra vienoje eilutėje arba viename stulpelyje. Toliau likusius du skaičius galima įrašyti tik dviem būdais (žr. pav.) ir gauti likusias sumas, lygias arba $2+4 = 6$, $1+2 = 3$, $3+4 = 7$, arba $2+4 = 6$, $1+4 = 5$, $3+2 = 5$. Antrasis atvejis, kai turime sumas 4 ir 5 bei 5 ir 6, tinka.

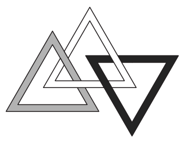
1	3
2	4

1	3
4	2



3. D

! Duotojoje grandinėje baltoji grandis sukibusi kiekviena iš kitų dviejų (todėl netinka atsakymai **B** ir **C**, kur baltoji grandis tiesiog guli virš pilkosios). Bet jei perkirsime ir pašalinsime ją, tai likusios dvi grandys liks nesukibusios (todėl netinka atsakymai **A** ir **E**, kur tos dvi grandys kiekviena dengia kitą ir todėl kerta viena kitos vidų). Atsakyme **D** turime kaip tik tokią situaciją.



4. D 7

! Vienženklio ar dviženklio skaičiaus skaitmenų suma ne didesnė nei $9+9 = 18$. Triženklis skaičius tuo mažesnis, kuo mažesnis jo pirmasis skaitmuo. Jei triženklis skaičius tenkina uždavinio sąlygą, tai tas skaitmuo negali būti mažesnis nei $25-9-9 = 7$. Tai pastebėję, kartu gauname skaičių 799, tenkinantį uždavinio sąlygą. Vadinasi, mažiausias skaičius, tenkinantis sąlygą, yra triženklis, kurio pirmasis skaitmuo yra 7. (Iš tikrųjų, tai ir yra skaičius 799.)

5. C 46

! Kiekviena piramidė turi tokias sienas: n-kampį pagrindą ir n šoninių trikampių sienų. Vadinasi, jei piramidė turi 23 trikampes sienas, tai jos visos šoninės ir $n = 23$. Tada piramidės briaunos yra jos pagrindo 23 kraštinės ir dar 23 atkarpos, jungiančios pagrindo viršūnes su piramidės viršūne. Gauname iš viso $23+23 = 46$ briaunas.

6. (B) 1, 5, 7

? Jei pridengto skaičiaus $**26$ pirmasis skaitmuo didesnis už 2, tai trijų keturženklių skaičių suma didesnė už $7000+2000+3000 = 12000$. Todėl vienas iš uždengtųjų skaitmenų yra 1 arba 2, ir turime rinktis atsakymą **A** arba **B**. Kadangi turime lygybę $11126 = \ldots 43 + \ldots * 7 + \ldots 26$, tai $\ldots 43 + \ldots * 7 = \ldots 00$ ir čia $* = 5$.

Renkamės atsakymą **B**.

?? Matematikoje gerai žinomas toks dalumo iš 9 požymio apibendrinimas: kiekvienas natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip jo skaitmenų suma. Lygybėje $11126 = 7243 + 21*7 + **26$ galime pereiti prie skaitmenų sumų: skaičius $1+1+1+2+6 = 11$ dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip skaičius $16 + (10 + *) + (* + * + 8)$. Todėl $* + * + * + 34$ dalijasi iš 9 su liekana 2, o $* + * + * + 5 = * + * + * + 34 - 2 - 9 \cdot 3$ dalijasi iš 9. Šią sąlygą tenkina tik atsakymas **B**.

! Sąlygą galima greitai suprastinti:

$$11126 = 7243 + 21*7 + **26 = (7243 + 7) + 21*0 + **00 + 26,$$

$$11100 = 7250 + 21*0 + **00, \qquad 1110 = 725 + 21* + **0 =$$

$$= (725 + 210) + (**0 + *) = 935 + ***,$$

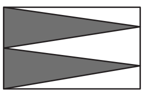
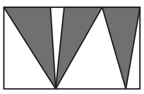
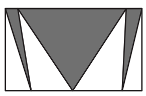
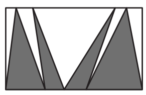
$$*** = 1110 - 935 = (1000 - 900) + (110 - 30 - 5) = 100 + (80 - 5) = 175.$$

Vadinasi, nežinomi skaitmenys yra 1, 5, 7.

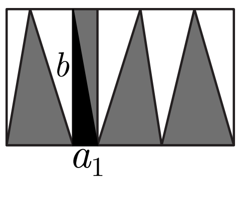
7. (A) 

? Stačiakampių matmenis pažymėkime $a \times b$. Nagrinėkime atsakymą **E**. Pilkąją dalį sudaro trikampiai, kurių kraštinės $a_1, a_2, \ldots$ sudaro stačiakampio kraštinę a, o į jas nuleistos aukštinės lygios b. Todėl pilkosios dalies plotas lygus $a_1 b/2 + a_2 b/2 + \ldots = (a_1 + a_2 + \ldots)b/2 = ab/2$. Analogiškai tą patį gauname atsakymams **B** ir **D**. Trys plotai lygūs, todėl šie atsakymai negali būti teisingi. O atsakyme **C** plotas dar mažesnis, nes čia $a_1 + a_2 + \ldots < a$.

Renkamės atsakymą **A**.

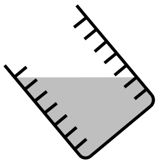
B)  **C)**  **D)**  **E)** 

! Užbaikime **?** dalies sprendimą. Atsakyme **A** turime panašią, bet kiek kitokią situaciją nei kitur. Jei čia vietoj pilkojo stačiakampio $a_1 \times b$ turėtume perpus mažesnį juodąjį trikampį su kraštine a_1 ir aukštine b (žr. pav.), tai nuspalvintos dalies plotas vėl būtų lygus $ab/2$. Vadinasi, iš tikrųjų pilkosios dalies plotas čia didesnis už $ab/2$ – didesnis nei kituose atsakymuose.

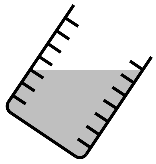


8. (C)

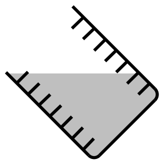
! Tikimybė, kad metus kubinį kauliuką atvirs viena iš 6 jo sienelių, yra $\frac{1}{6}$ (visos sienelės lygiavertės). Todėl duotos tikimybės $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ ir $\frac{1}{6}$ reiškia, kad kauliukas turi 3 sieneles su 1 akute, 2 sieneles su 2 akutėmis ir 1 sienelę su 3 akutėmis. Tuos akučių skaičius kauliuko sienelėms galima priskirti bet kaip. Todėl atsakymai **A**, **B**, **D**, **E** gali vaizduoti tokį kauliuką. Tuo tarpu atsakymo **C** kauliukas turi mažiausiai 2 sieneles su 3 akutėmis – tai prieštarauja sąlygai.

9. (B) 

? Palyginkime stiklines **B** ir **C**. Abiem atvejais vandens aukštis vienoje stiklinės pusėje yra toks pats (7 padalos), o kitoje – skirtingas (atitinkamai 2 ir 3 padalos). Todėl šiose stiklinėse vandens kiekis skirtingas, ir vienas iš atsakymų **B** ir **C** turi būti teisingas.

C) 

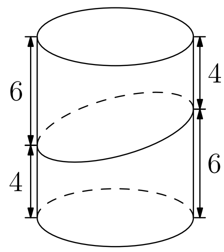
Analogiškai galima samprotauti apie stiklines **B** ir **D**: vienoje kiekvienos iš jų pusėje vanduo siekia antrąją padalą, o kitoje – atitinkamai septintąją bei aštuntąją. Todėl vienas iš atsakymų **B** ir **D** teisingas.

D) 

Renkamės atsakymą **B**, nes jis vienintelis gali būti teisingas.

?? Nors uždavinyje kalbama apie įpilto vandens tūrį, panagrinėkime paveikslėliuose matomus vandens skerspjūvius ir jų plotus. Tie skerspjūviai yra trapecijos formos. Visos 5 trapecijos turi tokią pačią aukštinę, o pagrindų ilgius a ir b rodo pažymėtos padalos. Laikykime, kad padalos aukštis yra 1. Kadangi atsakymuose **A**, **C**, **D**, **E** turime $a + b = 10$, o atsakyme **B** – $a + b = 9$, tai keturių trapecijų plotai lygūs, o vienos – kitoks.

Natūralu spėti, kad teisingas atsakymas yra **B**.



! Laikykime, kad vienos padalos, pažymėtos ant stiklinių, aukštis yra 1, o stiklinių dugno plotą pažymėkime S. Vertikalioje stiklinėje vanduo užpildo ritinio formą. Pasviroje stiklinėje vanduo užima formą, į kokias ritinį padalija plokštuma (ta forma vadinama nupjautiniu ritiniu). Iš dviejų tokių vienodų formų vėl galima sudėti ritinį, kurio tūris dvigubai didesnis už formos tūrį. Pavyzdžiui, atsakyme **E** taip gausime ritinį, kurio aukštinė lygi $4 + 6 = 10$ (žr. pav.) ir todėl tūris lygus $10S$. Vadinasi, vandens tūris atsakyme **E** lygus $5S$. Analogiškai gauname tūrius **A)** $(5 + 5)S/2 = 5S$, **B)** $(7 + 2)S/2 = 4{,}5S$, **C)** $(3 + 7)S/2 = 5S$, **D)** $(8 + 2)S/2 = 5S$. Kitoks vandens tūris yra stiklinėje **B**. Beje, patvirtinome **??** dalies spėjimą, kad, norint palygint vandens tūrius, čia pakanka tikrinti tik $a + b$ reikšmes.

10. (D) 8

! Tarp skaičių $2^{10} = 1 \cdot 2^{10}$ ir $2^{13} = 2^3 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 2^{10}$ yra 8 skaičiai $1 \cdot 2^{10}$, $2 \cdot 2^{10}$, …, $7 \cdot 2^{10}, 8 \cdot 2^{10}$. Visi kiti 2^{10} teigiami kartotiniai $9 \cdot 2^{10}, 10 \cdot 2^{10}, \ldots$ didesni už $2^{13} = 8 \cdot 2^{10}$ ir į intervalą $[2^{10}, 2^{13}]$ nepatenka.

11. (D) $a = 0$

! Remdamiesi operacijos apibrėžimu, pertvarkykime reiškinius ir lygybę:

$$(a\diamondsuit b)\diamondsuit c = (b-a)\diamondsuit c = c-(b-a) = a-b+c,$$

$$a\diamondsuit (b\diamondsuit c) = a\diamondsuit (c-b) = (c-b)-a = -a-b+c,$$

$$(a\diamondsuit b)\diamondsuit c = a\diamondsuit (b\diamondsuit c) \iff a-b+c = -a-b+c \iff a=-a \iff a=0.$$

Taigi lygybė $a = 0$ garantuotai teisinga. Kartu matome, kad kitos lygybės atsakymuose nebūtinai teisingos.

12. (C) $\dfrac{14}{45}$

! Žinoma, mažiausią reiškinio $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ reikšmę gausime, jei imsime mažiausias galimas skaitiklių a ir c reikšmes 1 ir 2 bei didžiausias galimas vardiklių b ir d reikšmes 9 ir 10. Priklausomai nuo to, kokia tvarka priskirsime tas reikšmes, gausime

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{9}=\frac{9}{90}+\frac{20}{90}=\frac{29}{90} \quad \text{arba} \quad \frac{1}{9}+\frac{2}{10}=\frac{10}{90}+\frac{18}{90}=\frac{28}{90}.$$

Abi reikšmės yra galimos, todėl teisingas atsakymas yra mažesnioji iš jų $\frac{28}{90} = \frac{14}{45}$.

13. (E) Tik Kingas

! Jei Kingas neturėtų skėčio, tai Kongas jį turėtų. Kongas neturi skėčio, todėl Kingas jį turi. Nė viena iš situacijų „Skėtį turi Kengas ir Kingas, bet ne Kongas” ir „Skėtį turi Kingas, bet ne Kengas ir Kongas” uždavinio sąlygai neprieštarauja. Todėl Kengas skėtį gali turėti, o gali ir neturėti. Vadinasi, tik Kingas skėtį turi garantuotai.

!! Uždavinį spręskime formaliau. Kiekvienam kengūrai priskirkime raidę T, jei jis turi skėtį, ir raidę N – jei neturi. Tada kiekvieną kengūrų pasivaikščiojimą apibūdina trijų raidžių kombinacija ABC, kur A apibūdina Kengą, B – Kingą, C – Kongą. Yra $2^3 = 8$ galimos kombinacijos: TTT, TTN, TNT, TNN, NTT, NTN, NNT, NNN.

Uždavinio teiginys apie Kengą ir Kingą reiškia, kad kombinacijos NN? negalimos. Teiginys apie Kingą ir Kongą reiškia, kad kombinacijos ?NN negalimos. Teiginys, jog Kongas neturi skėčio, reiškia, kad kombinacijos ??T negalimos. Vadinasi, įmanomos lygiai 2 kombinacijos TTN ir NTN. Kadangi jos abi baigiasi TN, tai Kingas garantuotai turi skėtį, o Kongas garantuotai neturi. Kombinacija gali prasidėti tiek raide T, tiek N, todėl Kengas gali turėti skėtį, bet ne garantuotai.

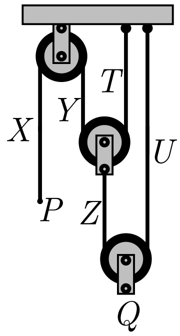
14. (D) 3^6

! Kad paaiškėtų, iš ko dalijasi suma $a = 7! + 8! + 9!$, pravartu ją užrašyti kaip sandaugą:

$$7!+8!+9! = 7!+7!\cdot 8+7!\cdot 8\cdot 9 = 7!\cdot(1+8+72) = 7!\cdot 81 = 7!\cdot 3^4.$$

Sandaugoje $7! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 7$ yra du dauginamieji 3 ir 6, kurie dalijasi iš 3, ir nė vienas iš jų nesidalija iš 3^2. Todėl $7! = 3^2 \cdot b$, kur b nesidalija iš 3, o $a = 3^2\cdot b\cdot 3^4 = 3^6\cdot b$ dalijasi iš 3^6, bet ne iš 3^7.

15. (**D**) 6



! Penkias vertikalias virvių dalis iš kairės į dešinę pažymėkime X, Y, Z, T, U (žr. pav.). Nustatykime, kaip pakito jų ilgiai, beždžionei patraukus virvę.

Dalys X, Y ir T sudaro virvę, todėl Y ir T bendras ilgis sumažėjo 24 cm – tiek, kiek pailgėjo X. Be to, Y ir T sutrumpėjo po tiek, kiek pakilo vidurinysis skriemulys, taigi po lygiai, po $24 : 2 = 12$ (cm).

Analogiškai dalių T ir Z bendras ilgis bei dalies U ilgis sumažėjo po tiek, kiek pakilo dešinysis skriemulys, po lygiai. Bendras Z ir U ilgis nekinta (sudaro virvę). Tada T, Z ir U bendras ilgis sumažėjo 12 cm (tiek, kiek T ilgis), o T ir Z bendras ilgis bei U ilgis sumažėjo po $12 : 2 = 6$ (cm). Vadinasi, tiek pakilo taškas Q.

16. (**B**) 26

? Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka arba įsitikinti, kad jis galimas, arba atmesti likusius. Bet kuriuo atveju verta pastebėti, kad vaikinų ir merginų skaičiai kiekvienas pakito lygiai penktadaliu. Todėl vaikinų, merginų ir visų mokinių pradinis skaičius klasėje dalijasi iš 5. Pradinis mokinių skaičius gali būti **A)** 21, **B)** 25, **C)** 28, **D)** 30, **E)** 33. Tinka tik atsakymai **B** ir **D**. Tikrinant **B**, kai vaikinų ir merginų pradiniai skaičiai dalijasi iš 5, nesunku pastebėti, kad prieš metus klasėje galėjo būti 15 vaikinų ir 10 merginų.

Renkamės atsakymą **B**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, liko atmesti atsakymą **D**. Pradinį merginų skaičių pažymėkime $5m$. Tada klasėje neliko m merginų ir vietoj jų atsirado $m+1$ vaikinas. Pradinis vaikinų skaičius lygus $5(m+1)$, o bendras mokinių skaičius šiemet lygus $5m+5(m+1)+1 = 10m+6$. Jis turi būti lyginis, todėl atsakymas **D** netinka.

Gautoji mokinių skaičiaus formulė leidžia atmesti ir kitus klaidingus atsakymus bei patikrinti teisingą atsakymą **B**.

17. (**A**) 4

! Kadangi $4^2 < 20 < 5^2$, tai $4 < \sqrt{20} < 5$ ir $[\sqrt{20}] = 4$. Sąlygoje duotas skaičius a gali atrodyti ženkliai didesnis už $\sqrt{20}$, o atsakymas **A** – neįtikimas. Tačiau šis įspūdis apgaulingas. Pastebėjimą, kad $\sqrt{20+\sqrt{20}} < \sqrt{20+5} = 5$, galima taip apibendrinti:

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}} < \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+5}}}} =$$

$$= \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+5}}} = \sqrt{20+\sqrt{20+5}} = \sqrt{20+5} = 5.$$

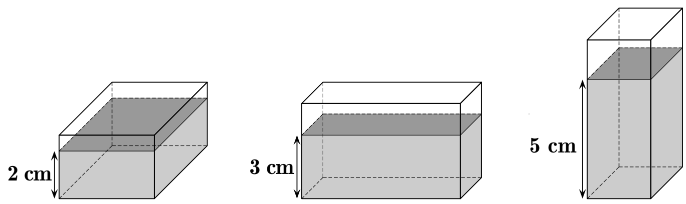
Žinoma, $a = \sqrt{20+\ldots} > \sqrt{20} > 4$. Taigi $[a] = 4$.

18. (**E**) 240 cm^3

! Kiekvienu iš trijų atvejų vandens forma dėžutėje yra stačiakampis gretasienis, kurio tūris ir aukštis duoti, o pagrindo plotas sutampa su vienos iš dėžutės sienų plotu. Todėl dėžutės sienų plotai (cm^2) lygūs $120 : 2 = 60$, $120 : 3 = 40$, $120 : 5 = 24$. Jei dėžutės matmenys (centimetrais) yra a, b, c, tai sienų plotai (cm^2) yra ab, bc, ac. Dėžutės tūris lygus

$$abc = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt{60 \cdot 40 \cdot 24} =$$

$$= \sqrt{2400 \cdot 24} = \sqrt{24^2 \cdot 100} = 24 \cdot 10 = 240 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



!! Dėžutės ir vandens joje tūrių santykį pažymėkime k, o dėžutės matmenis centimetrais – a, b, c. Kiekvienu iš trijų atvejų vandens forma dėžutėje yra stačiakampis gretasienis, kuris skiriasi nuo dėžutės formos tik viena kraštine. Todėl dėžutės ir vandens tūrių santykis lygus tų nelygių kraštinių santykiui. Vadinasi, galime imti $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 5k$. Tada dėžutės tūris (cm^3) lygus $120k = abc = 30k^3$. Taip randame $k^2 = 120k : (30k) = 4$, $k = 2$ ir dėžutės tūrį $120k = 240$ (cm^3).

19. (**E**) Kitas atsakymas

! Patogiau pažymėti ir nagrinėti $m = n - 6$, $n = m + 6$. Kadangi $m + 6$ dalijasi iš m, tai $m + 6 - m = 6$ dalijasi iš m. Liko patikrinti visus skaičiaus 6 teigiamus daliklius: $m = 1$, 2, 3, 6. Skaičių $n = 7$, 8, 9, 12 didžiausias daliklis, mažesnis už n, atitinkamai lygus $1 = 7 - 6$, $4 \neq 8 - 6$, $3 = 9 - 6$, $6 = 12 - 6$. Taigi, tinka tik $n = 7$, 9 ir 12. Tinkamų skaičių n yra 3.

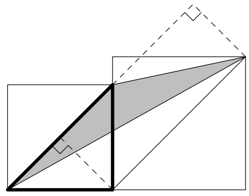
20. (**A**) $\frac{1}{2}a^2$

? Pasinaudokime tuo, kad teisingas atsakymas turėtų tikti bet kokiems teigiamiems $a < b$. Kai b nekinta, o a nykstamai mažėja, nuspalvintas trikampis vis panašėja į didžiojo kvadrato įstrižainę, t. y. jo plotas taip pat nyksta. Tardami, kad $a \approx 0$, gauname, jog atsakymai **C)** $\frac{1}{2}b^2 > 0$, **D)** $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) \approx \frac{1}{4}b^2 > 0$, **E)** $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \approx \frac{1}{2}b^2 > 0$ netinka.

Atsakymas **B)** $\sqrt{ab}$ netinka, nes padvigubinus a ir b visi brėžinio tiesiniai matmenys padvigubėja, o plotai paketurgubėja, tačiau $\sqrt{2a \cdot 2b} = 2\sqrt{ab}$. Todėl renkamės atsakymą **A**.

! Nuspalvinto trikampio kraštinės dalija iš dviejų kvadratų sudarytą figūrą į 4 trikampius: nuspalvintąjį ir tris stačiuosius. Figūros plotas lygus $a^2 + b^2$. Trijų stačiųjų trikampių statiniai lygūs: a ir a; b ir $b - a$; b ir $a + b$. Todėl nuspalvinto trikampio plotas lygus

$$a^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{b(b-a)}{2} - \frac{b(b+a)}{2} = a^2 - \frac{a^2}{2} + b \cdot \left(b - \frac{(b-a) + (b+a)}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2.$$



!! Apatinės kvadratų kraštinės yra vienoje tiesėje, todėl paveikslėlyje nubrėžtos jų įstrižainės lygiagrečios (atitinkamieji kampai lygūs 45°). Atstumas tarp šių įstrižainių yra tiek nuspalvinto trikampio, tiek pariebinto trikampio aukštinių, išvestų į jų bendrą kraštinę, ilgis. Todėl nuspalvinto trikampio plotas lygus pariebinto trikampio plotui. Šis lygus pusei mažojo kvadrato ploto, t. y. $\frac{1}{2}a^2$.

21. (B) $(a+1)^5 = b$

? Teigiami $1024 = 2^{10}$ dalikliai yra $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$. Todėl $b = 2^n$, kur

$$n = 0 + 1 + \ldots + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + \ldots + (5 + 6) = 5 \cdot 11 = 55.$$

Tada $b = c^5$, kur $c = 2^{11}$. Skirtumas tarp didelių skaičių penktųjų laipsnių c^5 ir a^5 negali būti lygus 1, todėl atsakymai **D** ir **E** netinka. Lieka galimybės **A)** $\sqrt[5]{b} = a - 1$, **B)** $\sqrt[5]{b} = a + 1$ ir **C)** $\sqrt[5]{b} = a$. Kadangi

$$a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 3 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2^8),$$

tai a ir $a - 1$ nesidalija iš 4. Kadangi $\sqrt[5]{b} = 2^{11}$ dalijasi iš 4, tai tinka tik atsakymas **B**.

! Teigiami $1024 = 2^{10}$ dalikliai yra dvejeto laipsniai $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$. Todėl

$$b = 2^{0+1+2+\ldots+10} = 2^{55}.$$

Kad $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1$ galima įrodyti, panaudojus geometrinės progresijos sumos formulę arba pastebėjus, kad

$$a + 1 = (1 + 1) + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = (2 + 2) + 2^2 + \ldots + 2^{10} =$$
$$= (2^2 + 2^2) + 2^3 + \ldots + 2^{10} = (2^3 + 2^3) + 2^4 + \ldots + 2^{10} = \ldots =$$
$$= (2^9 + 2^9) + 2^{10} = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11}.$$

Vadinasi, $(a + 1)^5 = (2^{11})^5 = 2^{55} = b$.

22. (C) $(-1; 1)$

? Kai $a = 0$, gauname lygtį $2 - |x| = 0$, turinčią du sprendinius $x = \pm 2$. Vadinasi, ieškomai aibei priklauso nulis, ir teisingas turi būti vienas iš atsakymų **C** ir **D**. Kad galėtume pasirinkti, pakanka patikrinti $a = \frac{1}{2}$. Kadangi visada $|x| = \pm x$, tai iš lygties $2 - |x| = \frac{x}{2}$ gauname $2 = \frac{x}{2} \pm x = \left(\frac{1}{2} \pm 1\right) x$ ir $x = 2 : \left(\frac{1}{2} \pm 1\right) = -4$ arba $\frac{4}{3}$. Abi gautos reikšmės tenkina pradinę lygtį, todėl ieškomai aibei priklauso skaičius $\frac{1}{2}$ ir turime rinktis atsakymą **C**.

! Jei $x \geqslant 0$, tai $|x| = x$, o jei $x < 0$, tai $|x| = -x$. Todėl duotoji lygtis sprendžiama taip. Skaičius x tenkina duotąją lygtį, kai arba 1) $x \geqslant 0$ ir $2 - x = ax$, arba 2) $x < 0$ ir $2 + x = ax$. Pirmuoju atveju turime:

$$(a+1)x = 2, x \geqslant 0 \iff a \neq -1, x = \frac{2}{a+1} \geqslant 0 \iff x = \frac{2}{a+1}, a > -1.$$

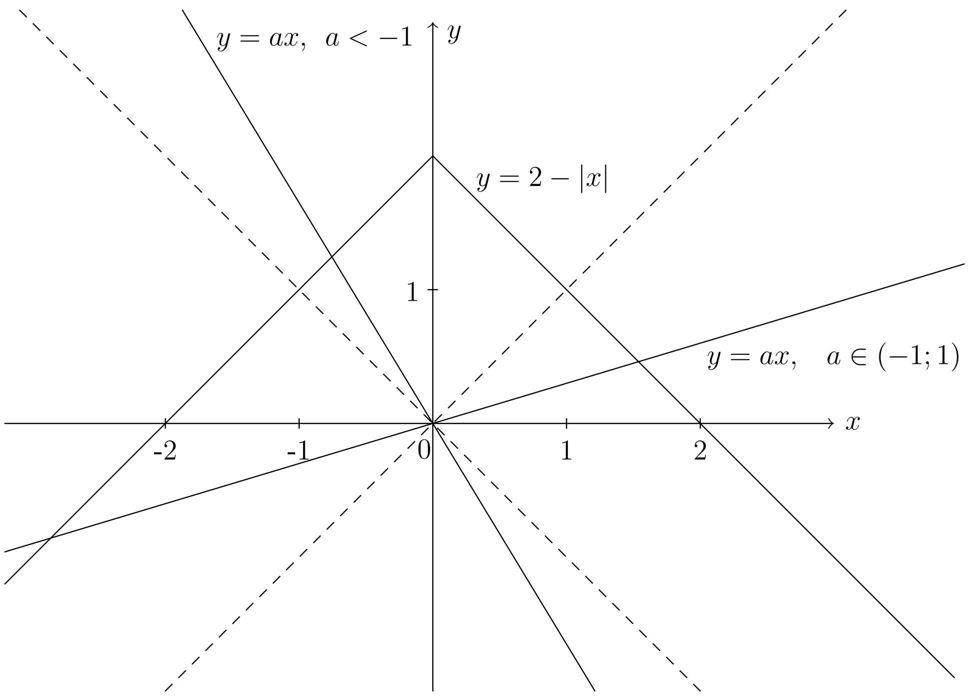
O antruoju atveju turime:

$$(a-1)x = 2, x < 0 \iff a \neq 1, x = \frac{2}{a-1} < 0 \iff x = \frac{2}{a-1}, a < 1.$$

Lygtis turi abu sprendinius $x = \frac{2}{a\pm 1}$ tada ir tik tada, kai $-1 < a < 1$, t. y. kai $a \in (-1; 1)$.

!! Galimas geometrinis uždavinio sprendimas. Reikia išsiaiškinti, kurioms a reikšmėms funkcijų $y = 2 - |x|$ ir $y = ax$ grafikai kertasi lygiai dviejuose taškuose.

Funkcijos $y = 2 - |x|$ grafiką sudaro dvi šakos: spinduliai $y = 2 - x$, $x \geqslant 0$, ir $y = 2 + x$, $x < 0$ (žr. pav.). Kai a prabėga visas reikšmes nuo $-\infty$ iki $+\infty$, tai tiesė $y = ax$ sukasi aplink koordinačių pradžią. Kai $a = \pm 1$, tiesė $y = ax$ tampa lygiagreti su viena iš $y = 2 - |x|$ šakų, todėl kerta tik kitą šaką (ir tik viename taške, nes turime tiesių sankirtą). Kai $-1 < a < 1$, tiesė $y = ax$ yra gulstesnė ir kerta abi šakas. Kai $a > 1$ arba $a < -1$, tiesė statesnė ir kerta tik vieną šaką. Vadinasi, du sankirtos taškus turime, kai $a \in (-1; 1)$.



23. **B** (444)

? Pirmųjų trijų sekos trejetų atsakymuose nėra, todėl galime atmesti sekos pradžią ir nagrinėti tik dviženklius skaičius: (101)(112)(131)(415)...(979)(899). Pastebėkime, kad iš trijų dviženklių skaičių vis sudaromi du skaitmenų trejetai. Tiksliau, gretimų trejetų poras iš eilės apjungus į skaitmenų šešetus

$$(101)(112) \to (10\ 11\ 12), \quad (131)(415) \to (13\ 14\ 15), \quad \ldots,$$

dviženkliai skaičiai suskirstomi į trejetus. Trečiasis dviženklis skaičius juose yra 12, 15, 18, ..., 99 – tai visi dviženkliai skaičiai, dalūs iš 3. Tarp jų yra skaičiai 24, 48, 66 ir 90. Todėl šešetų sekoje yra šešetai (22 23 24), (46 47 48), (64 65 66) ir (88 89 90), o pradinėje trejetų sekoje – trejetai (222)(324), (464)(748), (646)(566) ir (888)(990).

Taip atmetę kitus atsakymus, renkamės **B**.

! Užbaikime **?** dalies sprendimą. Jei trejetas (444) yra duotojoje sekoje, tai du iš trijų jo skaitmenų priklauso vienam dviženkliui skaičiui, t. y. skaičiui 44. Skaičius 45 dalijasi iš 3, todėl šešetų sekai priklauso (43 44 45). Tačiau tai reiškia, kad skaičiaus 44 skaitmenys priklauso skirtingiems trejetams (434) ir (445). Vadinasi, trejeto (444) negausime.

24. **C** 20

! Du skaičius kvadratų bendrose viršūnėse pažymėkime a ir b, o likusius du vidurinio kvadrato skaičius – c ir d. Užuot iš karto ieškoję pavyzdžių konkrečioms S reikšmėms, bandykime susiaurinti paiešką.

Visų 10 skaičių suma lygi

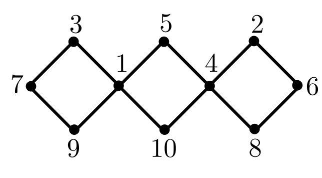
$$1 + 2 + \ldots + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 11 \cdot 5 = 55.$$

Šie 10 skaičių yra skaičiai c ir d bei dar 8 skaičiai šoniniuose kvadratuose. Todėl $55 = S + S + c + d$. Jei $S \leqslant 19$, tai $c + d \geqslant 55 - 19 - 19 = 17$. Tada

$$S = (a + b) + (c + d) \geqslant (1 + 2) + 17 = 20 > S.$$

Vadinasi, $S \geqslant 20$.

Jei $S = 20$, tai $c + d = 55 - 2S = 15$ ir $a + b = S - c - d = 5$. Tai žinant, jau nesunku sugalvoti pavyzdį su $S = 20$, imant kad ir $a = 1$, $b = 5 - a = 4$, $c = 10$, $d = 15 - c = 5$ bei atspėjant likusius skaičius (žr. pav.). Vadinasi, mažiausia galima S reikšmė yra 20.



!! Du skaičius kvadratų bendrose viršūnėse pažymėkime a ir b. Trim kvadratams priskirtų skaičių sumų suma lygi $3S$. Kita vertus, taip sudedame visus 10 pažymėtųjų skaičių, tik a ir b imdami du kartus:

$$3S = 1 + 2 + \ldots + 10 + a + b = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} + a + b = 55 + a + b \geqslant 55 + 1 + 2 = 58$$

ir todėl $S > 57 : 3 = 19$.

Galima sugalvoti pavyzdį, kai $S = 20$ (žr. **!** dalies pav.). Jį greičiau gausime pastebėję, kad $a + b = 3S - 55 = 5$.

Vadinasi, mažiausia galima S reikšmė yra 20.

25. (**D**) 4

? Tikrindami $f(n) = n^2 - 2n - 3$ reikšmes, kai $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, greitai aptiksime, kad $|f(0)| = |f(2)| = 3$ ir $|f(-2)| = |f(4)| = 5$ yra pirminiai skaičiai. Lieka atsakymai **D** ir **E**. Be to, aptiksime, kad kvadratinė funkcija $f(n)$ turi šaknis $n_1 = -1$ ir $n_2 = 3$. Todėl $|f(n)| = |n+1| \cdot |n-3|$ ir tada $|f(n)|$ turi du skirtingus daliklius, didesnius už 1, kai n pakankamai didelis arba pakankamai mažas. Tai prieštarauja pirminio skaičiaus apibrėžimui, todėl skaičius $|f(n)|$ yra pirminis tik baigtiniam kiekiui sveikųjų n reikšmių.

Renkamės atsakymą **D**.

! Nagrinėkime $f(n) = n^2 - 2n - 3$:

$$f(n) = n^2 - 2n + 1 - 4 = (n-1)^2 - 2^2 = (n - 1 + 2)(n - 1 - 2) = (n+1)(n-3).$$

Ši išraiška svarbi, nes jei $|f(n)| = |n+1| \cdot |n-3|$ yra pirminis skaičius, tai jis pagal apibrėžimą turi tik du teigiamus daliklius 1 ir $|f(n)|$. Todėl arba $|n+1| = 1$, arba $|n+1| = |f(n)|$ ir tada $|n-3| = 1$. Taip gauname 4 atvejus $n + 1 = \pm 1$, $n - 3 = \pm 1$, t. y. atvejus $n = 0$, -2, 4 ir 2. Iš tiesų, $|f(0)| = |f(2)| = 3$ ir $|f(-2)| = |f(4)| = 5$ yra pirminiai skaičiai. Gauname lygiai 4 tinkamas n reikšmes.

26. (**A**) Tik 16

! Nors uždavinyje kalbama apie tieses ir kreivę, jame svarbus ne brėžinys ir apskritai ne geometrija. Nagrinėkime bet kurią iš keturių tiesių. Ji negali būti vertikali tiesė $x = 0$, nes kirstų parabolę tik viename taške $(0; 0^2 - 2)$. Kadangi tiesė eina per koordinačių pradžią ir nėra vertikali, tai jos lygtis yra $y = kx$. Jos sankirtos su parabole du taškai tenkina lygtis $y = x^2 - 2$ ir $y = kx$. Tų taškų abscisės x_1 ir x_2 tenkina lygtį $x^2 - 2 = kx$. Jos yra kvadratinės lygties $x^2 - kx - 2 = 0$ šaknys. Be to, $x_1 \neq x_2$, nes kitaip tiesė $y = kx$ eitų per du taškus su ta pačia abscise ir būtų vertikali. Mums rūpi abscisių sandauga, todėl pritaikykime Vijeto teoremą gautai kvadratinei lygčiai su dviem sprendiniais x_1 ir x_2: turime $x_1 x_2 = -2$.

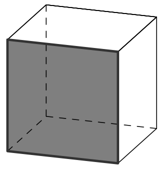
Kadangi dviejų abscisių sandauga lygi -2 kiekvienai iš 4 tiesių, tai visų 8 abscisių sandauga būtinai lygi $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

27. (**E**) 121

! Iš eilės skaičiuojant sekos narius, jie ima kartotis: $a_1 = 16$, $a_2 = 64$, $a_3 = (6+4+1)^2 = 121$, $a_4 = (1+2+1+1)^2 = 25$, $a_5 = (2+5+1)^2 = 64 = a_2$. Kadangi kiekvienas naujas sekos narys a_n priklauso tik nuo nario a_{n-1}, tai aišku, kad a_6 sutaps su a_3, tada a_7 su a_4, ir t. t. Apibendrinkime: kai $n = 5, 6, \ldots$, tai a_n sutampa su a_{n-3}. Seka yra periodinė.

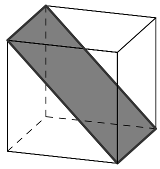
Vadinasi, $a_{2019} = a_{2016} = a_{2013} = \ldots$ Skaičius 2019 dalijasi iš 3, nes jo skaitmenų suma dalijasi iš 3. Todėl progresijoje 2019, 2016, 2013, … iš eilės mažėjimo tvarka eina skaičiai, dalūs iš 3, iki pat mažiausių tokių natūraliųjų skaičių …, 9, 6, 3. Taigi $a_{2019} = a_{2016} = \ldots = a_6 = a_3 = 121$.

28. Ⓔ 20

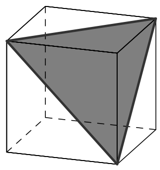


? Įsivaizduokime konkretų kubą. Spėliojant arba protingai perrenkant atvejus, galima atrasti paveikslėliuose parodytas plokštumas.

1) Plokštuma gali eiti per kubo sieną. Tokių yra 6, nes kubas turi 6 sienas.



2) Plokštuma gali eiti per kubo dvi priešingas briaunas. Tokių yra 6: kubas turi 12 briaunų, todėl yra $12 : 2 = 6$ priešingų briaunų poros.



3) Pasirinkus bet kurią kubo viršūnę, gaunama plokštuma, einanti per tris viršūnes, gretimas pasirinktajai. Tokių plokštumų yra 8, nes kubas turi 8 viršūnes.

Jau turime mažiausiai $6 + 6 + 8 = 20$ tinkamų plokštumų. Todėl renkamės atsakymą **E**.

! Užbaikime **?** dalies sprendimą ir įrodykime, kad daugiau plokštumų, einančių per mažiausiai tris duoto kubo viršūnes, nėra.

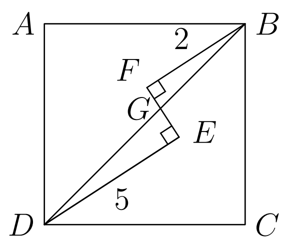
Pastebėkime, kad bet kurioms dviem priešingoms kubo sienoms priklauso visos jo viršūnės. Todėl iš trijų kubo viršūnių dvi visada yra vienoje sienoje. Jos yra tos sienos (kvadrato) arba gretimos, arba priešingos viršūnės. Pirmuoju atveju trečiąją viršūnę galime pasirinkti 6 būdais: 4 kartus gauname **?** dalies atvejį 1) ir du kartus – atvejį 2). Priešingų viršūnių atveju trečiąją viršūnę galime pasirinkti vėl 6 būdais: du kartus gauname atvejį 1), du kartus – atvejį 2) ir du kartus – atvejį 3). Vadinasi, kitų atvejų nei **?** dalyje aprašytieji nėra, o tinkamų plokštumų yra lygiai 20.

!! Užbaikime **?** dalies sprendimą ir įrodykime, kad daugiau plokštumų, einančių per mažiausiai tris duoto kubo viršūnes, nėra.

? dalies atvejais 1) ir 2) turime 12 plokštumų, einančių per kubo lygiai 4 viršūnes. Kiekvienam viršūnių ketvertui priklauso keturi viršūnių trejetai, todėl čia turime $4 \cdot 12 = 48$ viršūnių trejetus. Atvejį 3) atitinka dar 8 trejetai. Taigi iš viso **?** dalis apima $48 + 8 = 56$ viršūnių trejetus. Tačiau apskritai egzistuoja $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ kubo viršūnių trejetai. Vadinasi, **?** dalyje juos visus išnagrinėjome ir daugiau tinkamų plokštumų nėra.

29. (A) 5

! Atkarpų BD ir EF sankirtą pažymėkime G. Kadangi $\angle BGF = \angle DGE$ (kryžminiai kampai), tai statieji trikampiai BGF bei DGE turi tuos pačius kampus ir yra panašūs. Todėl $EG : FG = DE : BF = 5 : 2$ ir atkarpos FG ilgį sudaro 2 iš $5+2 = 7$ lygių $EF = 1$ dalių, t. y. $FG = \frac{2}{7}$. Pagal Pitagoro teoremą,



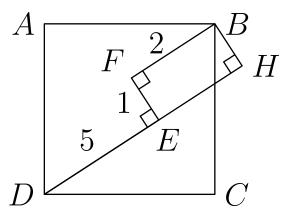
$$BG^2 = BF^2 + FG^2 = 2^2 + \frac{2^2}{7^2} = \frac{2^2}{7^2} \cdot (7^2 + 1), \quad BG = \frac{2}{7} \cdot \sqrt{50} = \frac{10\sqrt{2}}{7}.$$

Dabar DG galima rasti analogiškai arba per turimą trikampių panašumą:

$$DG = (DE : BF) \cdot BG = \frac{5}{2} \cdot BG = \frac{25\sqrt{2}}{7}.$$

Todėl $BD = BG + DG = \frac{35\sqrt{2}}{7} = 5\sqrt{2}$. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgį pažymėkime a. Tada $50 = BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2$ ir $a = \sqrt{50 : 2} = 5$.

!! Iš taško B į tiesę DE išveskime statmenį BH. Trys iš keturių keturkampio $BHEF$ kampų statieji, todėl statusis yra ir likęs jo kampas, o pats keturkampis yra stačiakampis. Todėl $BH = FE = 1$ ir $DH = DE + EH = DE + FB = 5 + 2 = 7$. Pagal Pitagoro teoremą, $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 1^2 + 7^2 = 50$. Toks yra kvadrato $ABCD$ įstrižainės ilgis. Tada kvadrato kraštinės ilgis yra $5\sqrt{2} : \sqrt{2} = 5$.



30. (B) $\frac{1}{6}$

! Marytė gali gauti bet kokį skaičių 1, 2, …, 10 derinį iš 3 skaičių. Taip gauname baigčių aibę, sudarytą iš $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 10 \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{8}{2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ baigčių. Žinoma, visos baigtys yra vienodai galimos, taigi galime taikyti klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą.

Suskaičiuokime, kelios baigtys yra palankios įvykiui „Vienas iš skaičių lygus kitų dviejų vidurkiui". Tarkime, kad Marytės skaičiai yra a, b, $c = \frac{a+b}{2}$. Koordinačių ašyje šie skaičiai žymėtų vienos atkarpos abu galus ir vidurio tašką. Taigi tokį trejetą vienareikšmiškai apibūdina jo mažiausio ir didžiausio skaičių (nesutvarkyta) pora a, b. Skaičius $a + b$ turi būti lyginis, t. y. skaičiai a ir b turi būti vienodo lyginumo. Kita vertus, pasirinkę bet kokius skirtingus vienodo lyginumo skaičius a ir b nuo 1 iki 10, gauname atitinkamą trejetą a, b, $c = \frac{a+b}{2}$. Čia c yra sveikasis skaičius tarp a ir b neimtinai, todėl $c \in [1; 10]$. Liko suskaičiuoti, kiek yra tokių porų a, b.

Nelyginių skaičių porą iš 5 nelyginių skaičių 1, 3, 5, 7, 9 galima pasirinkti $C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$ būdų. Lyginių skaičių porą iš 5 lyginių skaičių 2, 4, 6, 8, 10 galima pasirinkti tiek pat būdų. Todėl turime $10 + 10 = 20$ palankių baigčių, o ieškoma tikimybė lygi $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	E
3	D
4	D
5	C
6	B
7	A
8	C
9	B
10	D
11	D
12	C
13	E
14	D
15	D
16	B
17	A
18	E
19	E
20	A
21	B
22	C
23	B
24	C
25	D
26	A
27	E
28	E
29	A
30	B