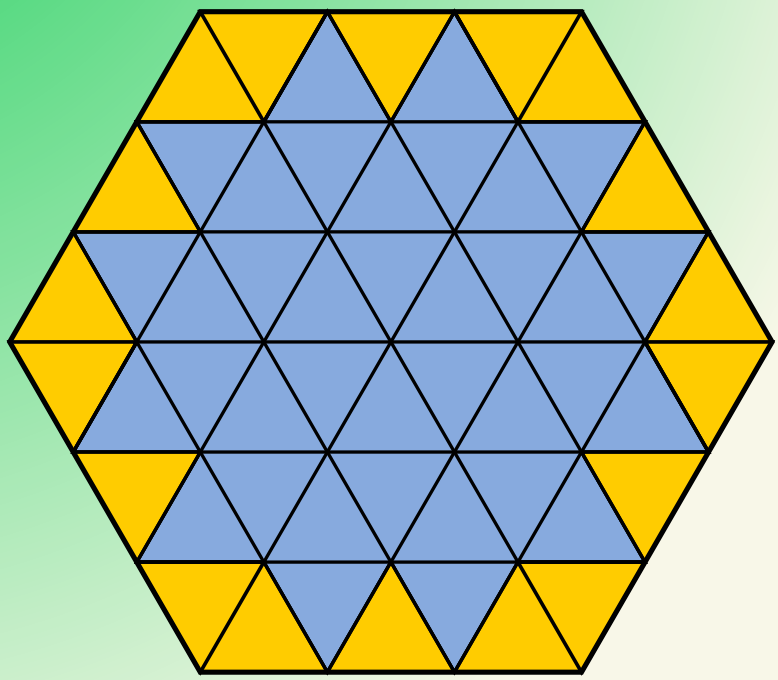
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA
Kadetas



Užduotys ir sprendimai

2020

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2020. Kadetas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Drungilas

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Paulius Drungilas, 2020
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2020

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **10**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 38700 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2020 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2020 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

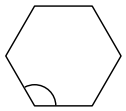
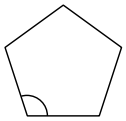
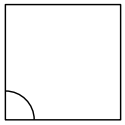
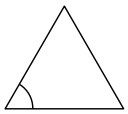
Organizatoriai

2020 m. *Kadeto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Keli iš skaičių 2, 20, 202, 2020 yra pirminiai?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

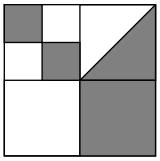
2. Atsakymų paveikslėliuose pavaizduoti taisyklingieji daugiakampiai su vienu pažymėtu kampu. Kuris kampas yra didžiausias?

A)  **B)** **C)**  **D)**  **E)** 

3. Gerda kasdien išsprendžia po šešis uždavinius, o Elena – po keturis. Per kiek dienų Elena išspręs tiek uždavinių, kiek Gerda išsprendžia per keturias dienas?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

4. Kuri trupmena yra didžiausia?
A) $\frac{8}{3+5}$ **B)** $\frac{3+5}{8}$ **C)** $\frac{8+5}{3}$ **D)** $\frac{3}{8+5}$ **E)** $\frac{8+3}{5}$

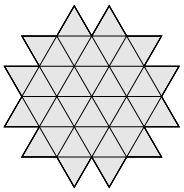
5. Didysis kvadratas padalintas į mažesnius kvadratus. Viename iš jų nubrėžta įstrižainė. Kokią dalį didžiojo kvadrato ploto sudaro užtušuotasis plotas?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{1}{3}$

6. Futbolo turnyre dalyvauja 4 komandos. Kiekviena komanda su kiekviena kita komanda sužaidžia lygiai vienas rungtynes. Rungtynes laimėjusi komanda pelno 3 taškus, o pralaimėjusi – 0 taškų. Jei rungtynės baigiasi lygiosiomis, tai abi komandos pelno po 1 tašką. Kuris skaičius turnyrui pasibaigus negali būti lygus jokios komandos surinktų taškų skaičiui?
A) 6 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

7. Paveikslėlyje pavaizduota figūra sudaryta iš 36 vienodų lygiakraščių trikampių. Kiek mažiausiai tokių trikampių reikia pridėti prie figūros, kad gautume šešiakampį?

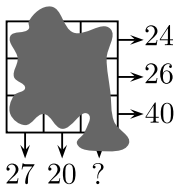


A) 12 **B)** 24 **C)** 15 **D)** 10 **E)** 18

8. Motiejus iš skaičių -5, -3, -1, 2, 4 ir 6 išsirinko tris skirtingus ir juos sudaugino. Kokią mažiausią sandaugą galėjo gauti Motiejus?
A) -200 **B)** -120 **C)** -90 **D)** -48 **E)** -15

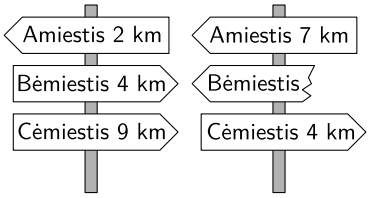
9. Raminta sugaišta 3 valandas į mokyklą važiuodama autobusu ir grįždama pėsčiomis. Jei Raminta į mokyklą važiuotų autobusu ir atgal grįžtų autobusu, tai iš viso sugaištų 1 valandą. Kiek iš viso valandų prireiks Ramintai nueiti į mokyklą pėsčiomis ir grįžti atgal pėsčiomis?
A) 3,5 **B)** 4,5 **C)** 5,5 **D)** 4 **E)** 5

10. Kiekviename 3×3 lentelės langelyje įrašytas vienas skaičius. Šių skaičių nematyti, nes juos dengia rašalo dėmė. Tačiau yra žinomos skaičių sumos kiekvienoje lentelės eilutėje ir dviejuose jos stulpeliuose (žr. pav.). Kam lygi lentelės trečio stulpelio skaičių suma?
A) 41 **B)** 43 **C)** 44 **D)** 45 **E)** 47



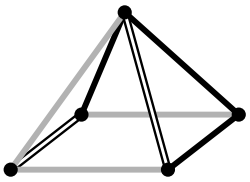
Klausimai po 4 taškus

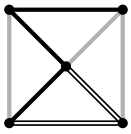
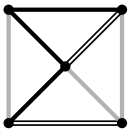
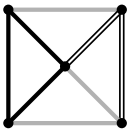
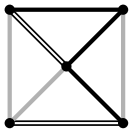
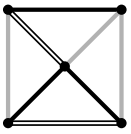
11. Trumpiausias kelias iš Amiesčio į Cėmiestį eina per Bėmiestį. Paveiklėlyje pavaizduoti ženklai pastatyti šiame kelyje. Koks atstumas buvo parašytas ant sulūžusio kelio ženklo?
A) 1 km **B)** 3 km **C)** 4 km **D)** 5 km **E)** 9 km



12. Agota suplanavo kovo mėnesį pėsčiomis nueiti vidutiniškai po 5 km per dieną. Kovo 16 dienos pabaigoje Agota iš viso buvo nuėjusi 95 km. Kiek vidutiniškai kilometrų per dieną Agota turi nueidinėti per likusias kovo mėnesio dienas, kad pasiektų tikslą?
A) 3,6 km **B)** 3,1 km **C)** 5,4 km **D)** 4 km **E)** 5 km

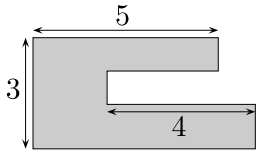
13. Dešinėje pavaizduota piramidė. Kaip ji atrodys, žiūrint iš viršaus?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

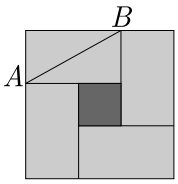
14. Kiekvienas klasės mokinys lanko arba plaukimą, arba tenisą, arba ir plaukimą, ir tenisą. Lygiai trys penktadaliai klasės mokinių lanko plaukimą. Tenisą lanko taip pat lygiai trys penktadaliai klasės mokinių. Lygiai penki klasės mokiniai lanko ir plaukimą, ir tenisą. Kiek mokinių yra šioje klasėje?
A) 15 **B)** 20 **C)** 25 **D)** 30 **E)** 35

15. Adomo sodas yra paveikslėlyje pavaizduotos formos. Bet kurios dvi šios figūros kraštinės yra arba lygiagrečios, arba statmenos. Trijų kraštinių ilgiai yra žinomi (žr. pav.). Kam lygus Adomo sodo perimetras?
A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26



16. Andrius turi 27 vienodus kubelius. Kiekvienas kubelis turi dvi gretimas raudonas sieneles ir keturias žalias sieneles. Iš šių kubelių Andrius sudėjo didesnį kubą. Kiek daugiausiai didesniojo kubo sienų gali būti vien tik raudonos spalvos?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

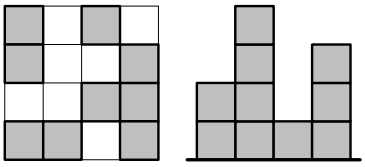
17. Paveikslėlyje pavaizduotas kvadratas sudarytas iš keturių vienodų stačiakampių ir juodo kvadratėlio, esančio jo centre. Didžiojo kvadrato plotas lygus 49 cm^2, o stačiakampio įstrižainės AB ilgis lygus 5 cm (žr. pav.). Kam lygus juodojo kvadratėlio plotas?



A) 1 cm^2 **B)** 2,25 cm^2 **C)** 4 cm^2 **D)** 9 cm^2 **E)** 16 cm^2

18. Antano atlyginimas lygus 20% jo vadovo atlyginimo. Kiek procentų turėtų padidėti Antano atlyginimas, kad jis būtų lygus jo vadovo atlyginimui?
A) 80% **B)** 120% **C)** 180% **D)** 400% **E)** 500%

19. Evelina iš vienodų kubelių pastatė „miestą“. Paveikslėlio kairėje parodytas „miesto“ vaizdas iš viršaus, o dešinėje – to paties „miesto“ vaizdas iš šono (nenurodyta, iš kurio šono). Kiek daugiausiai kubelių galėjo panaudoti Evelina šio „miesto“ statybai?



A) 25 **B)** 24 **C)** 23 **D)** 22 **E)** 21

20. Elena turi languotą popierinę juostelę 1×5, kurios langeliuose įrašyti skaičiai 1, 2, 3, 4 ir 5 (žr. pav.). Ji sulankstė šią juostelę per langelių kraštines ir gavo penkių sluoksnių popierinį langelį 1×1. Kuria tvarka (nuo viršutinio langelio iki apatinio) skaičiai negalėjo eiti sulankstytoje juostelėje?

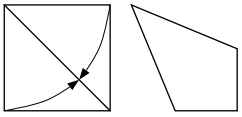
1	2	3	4	5

A) 3, 5, 4, 2, 1 **B)** 3, 4, 5, 1, 2 **C)** 3, 2, 1, 4, 5 **D)** 3, 1, 2, 4, 5 **E)** 3, 4, 2, 1, 5

Klausimai po 5 taškus

21. Į eilę ant stalo sudėti 12 spalvotų kubelių: 3 mėlyni, 2 geltoni, 3 raudoni ir 4 žali (nebūtinai šia tvarka). Viename eilės gale yra geltonas kubelis, o kitame – raudonas. Visi raudoni kubeliai sudėti iš eilės vienas po kito. Taip pat ir visi žali kubeliai sudėti iš eilės vienas po kito. Dešimtas kubelis iš kairės yra mėlynas. Kokios spalvos yra šeštas kubelis iš kairės?
A) Žalios **B)** Geltonos **C)** Mėlynos **D)** Raudonos **E)** Raudonos arba mėlynos

22. Sofija užlenkė dvi kvadratinio popieriaus lapo kraštines iki jo įstrižainės (žr. pav.). Kam lygus didžiausias gauto keturkampio kampas?



A) 112,5° **B)** 120° **C)** 125° **D)** 135° **E)** 145°

23. Kiek yra keturženklių skaičių A, kurie turi tokias savybes: pusė skaičiaus A dalijasi iš 2, trečdalis skaičiaus A dalijasi iš 3 ir penktadalis skaičiaus A dalijasi iš 5?
A) 1 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

24. Šokių konkurso finale kiekvienas iš trijų teisėjų kiekvienam iš penkių finalo dalyvių skiria 0, 1, 2, 3 arba 4 balus. Kiekvienas teisėjas, vertindamas dalyvius, skaičius 0, 1, 2, 3, 4 užrašė po vieną kartą. Šokių finalo dalyvis Adomas žino kiekvieno finalo dalyvio balų sumą ir dar keletą atskirų įvertinimų, kaip parodyta lentelėje.

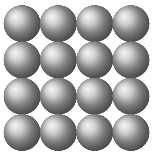
	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0			
II		2	0		
III					
	7	5	3	4	11

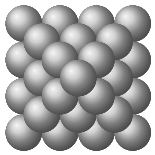
Kiek balų Adomui skyrė trečiasis teisėjas?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

25. Ema prie kiekvienos kvadrato kraštinės parašė po vieną natūralųjį skaičių. Prie kiekvienos šio kvadrato viršūnės ji parašė prie dviejų kvadrato kraštinių, kurios išeina iš šios viršūnės, parašytų skaičių sandaugą. Prie kvadrato viršūnių parašytų skaičių suma lygi 15. Kam lygi prie kvadrato kraštinių parašytų skaičių suma?
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 15

26. Austėja turi 52 vienodus lygiašonius stačiuosius trikampius. Imdama kai kuriuos iš šių trikampių ji sudeda kvadratą. Kiek yra galimų to kvadrato kraštinės ilgių?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

27. Julija stato piramidę iš vienodų rutulių. Piramidės pagrindas sudarytas iš 4×4 rutulių, kaip parodyta 1 pav. Ant jo paeiliui dedami piramidės sluoksniai iš 3×3, 2×2 rutulių ir piramidės viršūnė iš vieno rutulio (žr. 2 pav.). Keliose vietose liečiasi du jos rutuliai?
A) 30 **B)** 40 **C)** 56 **D)** 96 **E)** 112


1 pav.


2 pav.

28. Kiek mažiausiai skirtingų natūraliųjų skaičių, ne mažesnių už 1 ir ne didesnių už 30, reikia pasirinkti, kad jų sandauga dalytųsi iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 16

29. Austėja, Gerda ir Sofija dalyvavo bėgimo varžybose. Visos pradėjo bėgti vienu metu ir kiekviena bėgo pastoviu greičiu. Austėjai kertant finišo liniją, Gerdai iki finišo liko bėgti 15 m, o Sofijai – 35 m. Gerdai kertant finišo liniją, Sofijai iki finišo liko bėgti 22 m. Koks buvo distancijos ilgis?
A) 135 m **B)** 140 m **C)** 150 m **D)** 165 m **E)** 175 m

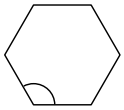
30. Kam lygi skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana?
A) 0 **B)** 202 **C)** 404 **D)** 604 **E)** 702

Kadeto užduočių sprendimai

1. (B) 1

! Skaičius 2 yra pirminis, o skaičiai 20, 202 ir 2020 nėra pirminiai, nes dalijasi iš 2 ir yra didesni už 2.

Teisingas atsakymas **B**.

2. (A) 

! Taisyklingojo n-kampio kampų suma lygi $180(n-2)$ laipsnių. Todėl taisyklingojo n-kampio kiekvienas kampas lygus $\frac{180(n-2)}{n} = 180 - \frac{360}{n}$ laipsnių. Matome, kad reiškinys $180 - \frac{360}{n}$ įgyja didžiausią reikšmę, kai skaičius n yra didžiausias įmanomas. Taigi, iš visų paveiklėliuose pavaizduotų taisyklingųjų daugiakampių šešiakampio kampas yra didžiausias.

Teisingas atsakymas **A**.

3. (C) 6

! Gerda per keturias dienas išsprendžia $4 \cdot 6 = 24$ uždavinius. Vadinasi, Elena 24 uždavinius išspręs per $\frac{24}{4} = 6$ dienas.

Teisingas atsakymas **C**.

4. (C)

! Atsakymų **A**, **B** ir **D** trupmenų reikšmės yra ne didesnės už 1. Atsakymo **C** trupmena yra didesnė už atsakymo **E** trupmeną, nes

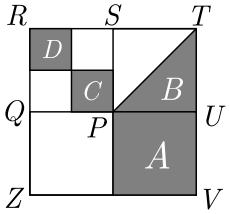
$$\frac{8+5}{3} > \frac{8+3}{3} > \frac{8+3}{5} > 1.$$

Vadinasi, atsakymo **C** trupmena yra didžiausia.

Teisingas atsakymas **C**.

5. (D) $\frac{1}{2}$

! Užtušuoto A kvadrato plotas lygus pusei stačiakampio $ZQUV$ ploto. Kvadratų C ir D bendras plotas lygus pusei kvadrato $PQRS$ ploto. Panašiai, lygiašonio stačiojo trikampio B plotas lygus pusei kvadrato $PSTU$ ploto. Vadinasi, kvadrato $RTVZ$ užtušuotos dalies plotas lygus pusei šio kvadrato ploto.



Teisingas atsakymas **D**.

6. (B)

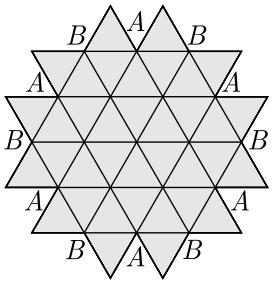
! Kiekviena komanda futbolo turnyre sužaidžia po trejas rungtynes. Jei komanda dvejas rungtynes laimėtų, o trečias pralaimėtų, tai iš viso surinktų $3 + 3 + 0 = 6$ taškus. Jei komanda vienas rungtynes laimėtų, vinerias sužaistų lygiosiomis ir vienerias pralaimėtų, tai surinktų $3 + 1 + 0 = 4$ taškus. Jei komanda vienerias rungtynes laimėtų ir kitas dvejas sužaistų lygiosiomis, tai iš viso surinktų $3 + 1 + 1 = 5$ taškus. Galiausiai, jei komanda dvejas rungtynes laimėtų ir vienerias sužaistų lygiosiomis, iš viso surinktų $3 + 3 + 1 = 7$ taškus. Kita vertus, jokia komanda šiame futbolo turnyre negali surinkti lygiai 8 taškų. Iš tikrųjų, jei komanda visas trejas rungtynes laimėtų, tai iš viso surinktų $3 + 3 + 3 = 9$ taškus. Tačiau jei komanda bent vienerias rungtynes pralaimėtų arba sužaistų lygiosiomis, tai surinktų ne daugiau negu $3 + 3 + 1 = 7$ taškus.

Teisingas atsakymas **B**.

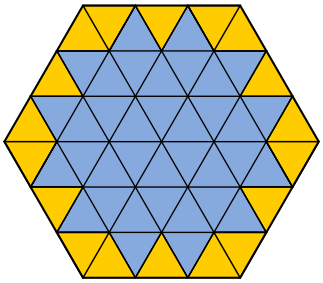
!! Panašiai būtų sprendžiamas uždavinys, jei pasirenkamųjų atsakymų nebūtų. Aišku, kad negalima surinkti daugiau kaip 9 taškus: $3+3+3 = 9$. Visas likusias sumas nuo 0 iki 7 surinkti galima: $0+0+0 = 0$, $0+0+1 = 1$, $0+1+1 = 2$, $0+0+3 = 3$, $0+1+3 = 4$, $1+1+3 = 5$, $0 + 3 + 3 = 6$, $1 + 3 + 3 = 7$. O štai 8 taškų surinkti negalima: jei pergalės dvi tai taškų $\leqslant 3 + 3 + 1 = 7$, o jei pergalės trys, tai taškų lygiai $3 + 3 + 3 = 9$. Atsakymas būtų toks: surinkti negalima 8 ir daugiau kaip 9 taškų (o galima surinkti 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 arba 9 taškus).

7. (E) 18

! Kiekvienam kampui, pažymėtam raide A, reikės bent vieno trikampio (žr. pav.). Panašiai, kiekvienam kampui, pažymėtam raide B, reikės bent dviejų trikampių. Taigi, norėdami gauti šešiakampį, prie uždavinio sąlygoje pavaizduotos figūros turėsime pridėti bent $6 + 6 \cdot 2 = 18$ trikampių.



Kita vertus, prie figūros įmanoma pridėti 18 trikampių ir gauti šešiakampį (žr. pav.).



Teisingas atsakymas **E**.

8. (B) -120

! Mažiausios sandaugos, kurią Motiejus galėjo gauti, modulis ne didesnis už $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. Vadinasi, bet kuri Motiejaus gauta sandauga yra ne mažesnė negu -120. Kita vertus, Motiejus galėjo gauti sandaugą -120, išsirinkęs skaičius -5, 4 ir 6.

Teisingas atsakymas **B**.

9. (E) 5

! Raminta, važiuodama autobusu į mokyklą ir grįždama iš jos, iš viso sugaišta 1 valandą. Vadinasi, Raminta sugaišta pusę valandos važiuodama autobusu į mokyklą ir pusę valandos grįždama autobusu iš mokyklos. Kita vertus, Raminta sugaišta 3 valandas į mokyklą važiuodama autobusu ir grįždama pėsčiomis. Vadinasi, Raminta sugaišta dvi su puse valandos eidama pėsčiomis į mokyklą ir dvi su puse valandos grįždama pėsčiomis iš mokyklos. Taigi, Ramintai iš viso prireiks penkių valandų nueiti į mokyklą pėsčiomis ir grįžti atgal pėsčiomis.

Teisingas atsakymas **E**.

10. (B) 43

! Sudėję eilučių sumas, gausime visos lentelės skaičių sumą. Kita vertus, sudėję visų stulpelių sumas, taip pat gausime lentelės skaičių sumą. Vadinasi, lentelės trečiojo stulpelio skaičių suma lygi $24 + 26 + 40 - 27 - 20 = 43$.

Teisingas atsakymas **B**.

11. (A) 1

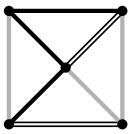
! Kadangi pirmame ženkle pavaizduota, kad nuo šio ženklo vietos į Amiestį ir į Bėmiestį reikia keliauti priešingomis kryptimis, tai šis ženklas stovi kelyje tarp Amiesčio ir Bėmiesčio. Todėl atstumas tarp šių miestų lygus $2 + 4 = 6$ km. Kadangi antrame ženkle pavaizduota, kad į Amiestį ir į Bėmiestį reikia keliauti ta pačia kryptimi, tai šis ženklas stovi kelyje tarp Bėmiesčio ir Cėmiesčio (pagal uždavinio sąlygą, ženklas stovi kelyje tarp Amiesčio ir Cėmiesčio). Vadinasi, ant antrojo kelio ženklo sulūžusios dalies buvo parašytas atstumas, kuris lygus $7 - 6 = 1$ km.

Teisingas atsakymas **A**.

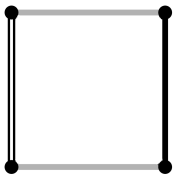
12. (D) 4 km

! Kovo mėnuo turi 31 dieną. Kadangi Agota kovo mėnesį suplanavo pėsčiomis nueiti vidutiniškai po 5 km per dieną, tai per visą kovo mėnesį ji turi nueiti lygiai $31 \cdot 5 = 155$ km. Per pirmas 16 kovo mėnesio dienų Agota nuėjo 95 km. Vadinasi, per likusias $31 - 16 = 15$ dienų Agota turi nueiti lygiai $155 - 95 = 60$ km. Taigi, Agota turi nueidinėti vidutiniškai po $\frac{60}{15} = 4$ km per likusias kovo dienas.

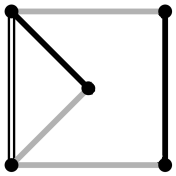
Teisingas atsakymas **D**.

13. (B) 

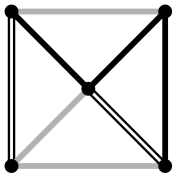
! Piramidės briaunas ═══, ━━━ ir ━━━ pažymėkime atitinkamai raidėmis B, J ir P. Šios piramidės pagrindas pavaizduotas paveikslėlyje:



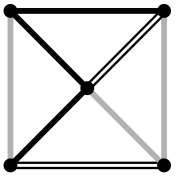
Į pagrindo kraštinę B remiasi dvi piramidės briaunos J ir P:



Į pagrindo kraštinę J remiasi dvi piramidės briaunos B ir J:



Šį paveikslėlį pasukę 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę, gausime atsakyme **B** pavaizduotą paveikslėlį:



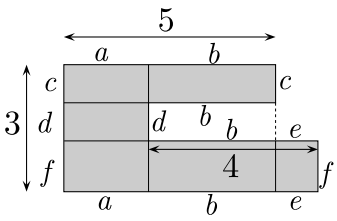
Teisingas atsakymas **B**.

14. (C) 25

! Lygiai trys penktadaliai klasės mokinių lanko plaukimą. Todėl lygiai $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ mokinių lanko tik tenisą. Panašiai gauname, kad lygiai du penktadaliai mokinių lanko tik plaukimą. Vadinasi, lygiai $1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ mokinių lanko ir plaukimą, ir tenisą. Uždavinio sąlygoje duota, kad lygiai penki klasės mokiniai lanko ir plaukimą, ir tenisą. Vadinasi, šioje klasėje iš viso yra $5 \cdot 5 = 25$ mokiniai.

Teisingas atsakymas **C**.

15. (C) 24



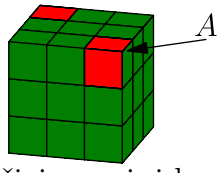
! Adomo sodo formos figūrą padalinkime į stačiakampius ir jų kraštinių ilgius pažymėkime a, b, c, d, e ir f (žr. pav.).

Tuomet, pagal uždavinio sąlygą, $a + b = 5$, $c + d + f = 3$ ir $b + e = 4$. Taigi, Adomo sodo perimetras lygus

$$(a + b) + c + b + d + (b + e) + f + (e + b + a) + f + d + c =$$
$$=2(a + b) + 2(b + e) + 2(c + d + f) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 24.$$

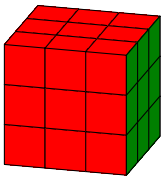
Teisingas atsakymas **C**.

16. (C) 4



! Išsirinkime didesnio kubo viršūnę, ją pažymėkime raide A ir nagrinėkime viršūnėje A esantį kubelį (žr. pav. viršuje).

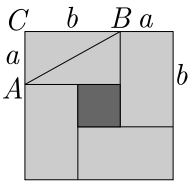
Šios kubelio trys sienelės priklauso trims didesnio kubo sienoms. Bent viena iš šių trijų sienelių yra žalios spalvos, todėl didesniojo kubo siena, kuriai priklauso žalios spalvos sienelė, nebus vien tik raudonos spalvos. Panašiai, nagrinėdami kubelį, esantį didesnio kubo viršūnėje, kuri yra priešinga viršūnei A, gausime, jog dar bent viena didesnio kubo siena negali būti vien raudonos spalvos. Taigi, Andriaus sudėtame kube bus ne daugiau negu keturios vien raudonos sienos. Įsitikinkime, kad Andrius galėjo sudėti kubą, kurio lygiai keturios sienos yra vien raudonos.



Iš tikrųjų, nagrinėkime iš 27 dar nedažytų kubelių sudėtą kubą. Jo dvi gretimas sienas (turinčias bendrą briauną) nudažykime vien raudonai (žr. pav. dešinėje apačioje).

Kubo sienas, kurios yra priešingos paveikslėlyje matomoms vien raudonoms sienoms, taip pat nudažykime raudonai, o likusias dvi šio kubo sienas nudažykime vien žaliai. Dabar jau kubo paviršiaus kubelių (jų yra 26) bent po vieną sienelę nudažyta; ir tik kubo viduje esančio vienintelio kubelio visos sienelės dar nedažytos. Jei paviršinio kubelio dvi sienelė nudažytos raudonai, tai jos gretimos, ir nedažytąsias sieneles nudžius žaliai, gausime „teisingą“ kubelį (kurio dvi gretimos sienelės raudonos, o likusios žalios). Kitų kubelių daugiausiai viena sienelė žalia, taigi juos paprasta nudažyti taip, kad dvi gretimos sienelės būtų raudonos, o kitos – žalios.
Teisingas atsakymas **C**.

17. (A) 1 cm^2



! Stačiakampio kraštinių ilgius centimetrais pažymėkime a ir b (žr. pav.).

Kadangi didžiojo kvadrato plotas lygus 49 cm^2, tai jo kraštinės ilgis lygus 7 cm. Todėl $a + b = 7$ (žr. pav.). Kita vertus, stačiojo trikampio ABC įstrižainės AB ilgis lygus 5 cm, todėl, remiantis Pitagoro teorema, $a^2 + b^2 = 5^2$. Į šią lygybę vietoje b įstatę išraišką $b = 7 - a$, gauname lygtį $a^2 + (7 - a)^2 = 25$. Išsprendę šią kvadratinę lygtį, gauname $a = 3$ (tada $b = 7 - 3 = 4$) arba $a = 4$ (tada $b = 7 - 4 = 3$). Taigi, stačiakampio kraštinių ilgiai yra 3 cm ir 4 cm, todėl jo plotas lygus $3 \cdot 4 = 12$ cm^2. Juodo kvadrato plotą gausime iš didžiojo kvadrato ploto atėmę keturių stačiakampių plotus. Vadinasi, juodo kvadrato plotas lygus $49 - 4 \cdot 12 = 1$ cm^2.

Teisingas atsakymas **A**.

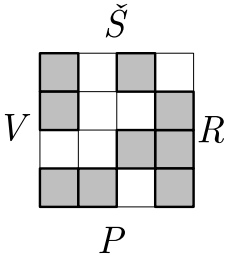
18. (D) 400%

! Kadangi Antano atlyginimas lygus 20% jo vadovo atlyginimo, tai jo vadovo atlyginimas yra penkis kartus didesnis už Antano atlyginimą. Jų atlyginimų skirtumas yra keturis kartus didesnis už Antano atlyginimą. Todėl Antano atlyginimas turi padidėti 400%, kad taptų lygus jo vadovo atlyginimui.

Teisingas atsakymas **D**.

19. (B) 24

! Miesto šonus pažymėkime raidėmis $\check{S}$, R, P ir V (žr. pav. dešinėje).



Sakykime, kad uždavinio sąlygos antrame paveikslėlyje parodytas „miesto“ vaizdas iš $\check{S}$ šono. Pirmoje eilėje iš kairės yra trys „pastatai“, ir kiekvieno jų aukštis ne didesnis kaip du kubeliai. Taigi, šioje eilėje yra ne daugiau kaip $3 \cdot 2 = 6$ kubeliai. Antroje eilėje iš kairės yra du „pastatai“, ir kiekvieno jų aukštis ne didesnis kaip keturi kubeliai. Taigi, šioje eilėje yra ne daugiau kaip $2 \cdot 4 = 8$ kubeliai. Trečioje eilėje iš kairės yra vienas „pastatas“, kuris pastatytas iš vieno kubelio. Ketvirtoje eilėje iš kairės yra trys „pastatai“, ir kiekvieno jų aukštis ne didesnis kaip trys kubeliai. Taigi, šioje eilėje yra ne daugiau kaip $3 \cdot 3 = 9$ kubeliai. Vadinasi, jei parodytas vaizdas iš $\check{S}$ šono, tai „miesto“ statybai galėjo būti panaudoti daugiausiai $6 + 8 + 1 + 9 = 24$ kubeliai. Tą patį rezultatą gausime, jei paveikslėlyje parodytas vaizdas iš P šono (skaičiuojant iš kairės, eilės bus sunumeruotos atvirkščia tvarka).

Dabar tarkime, kad paveikslėlyje parodytas vaizdas iš R šono. Pirmoje eilėje iš kairės yra trys „pastatai“, ir kiekvieno jų aukštis ne didesnis kaip du kubeliai. Taigi, šioje eilėje yra ne daugiau kaip $3 \cdot 2 = 6$ kubeliai. Antroje eilėje iš kairės yra du „pastatai“, ir kiekvieno jų aukštis ne didesnis kaip keturi kubeliai. Taigi, šioje eilėje yra ne daugiau kaip $2 \cdot 4 = 8$ kubeliai. Trečioje eilėje iš kairės yra du „pastatai“, kurių kiekvienas pastatytas iš vieno kubelio. Taigi, šioje eilėje yra lygiai du kubeliai. Ketvirtoje eilėje iš kairės yra du „pastatai“, ir kiekvieno jų aukštis ne didesnis kaip trys kubeliai. Taigi, šioje eilėje yra ne daugiau kaip $2 \cdot 3 = 6$ kubeliai. Vadinasi, jei paveikslėlyje parodytas vaizdas iš R šono, tai jo statybai galėjo būti panaudoti daugiausiai $6 + 8 + 2 + 6 = 22$ kubeliai. Tą patį rezultatą gausime, jei paveikslėlyje parodytas vaizdas iš V šono.

Taigi, „miesto“ statybai Evelina galėjo panaudoti daugiausiai 24 kubelius.

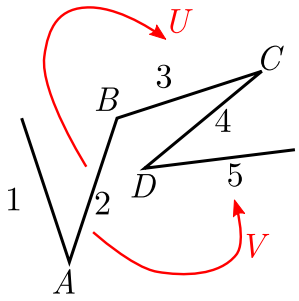
Teisingas atsakymas **B**.

20. (E) 3, 4, 2, 1, 5

! Juostelės langelių kraštines, skiriančias skaičius vieną nuo kito, pažymėkime raidėmis A, B, C ir D (žr. pav.).

A	B	C	D	
1	2	3	4	5

Atsakymuose **A, B, C** ir **D** pažymėta tvarka skaičiai galėjo eiti sulankstytoje juostelėje, jei juostelė paeiliui buvo lankstoma išilgai kraštinių atitinkamai tokia tvarka: $DCBA$, $CDAB$, $BACD$ ir $ABCD$.



Įrodysime, kad atsakyme **E** pažymėta tvarka skaičiai negalėjo eiti sulankstytoje juostelėje. Iš tikrųjų, tarkime priešingai, kad įmanoma taip sulankstyti juostelę, jog jos langeliuose įrašyti skaičiai eitų atsakymą **E** pažymėta tvarka (nuo viršutinio langelio iki apatinio). Kadangi lapeliai su skaičiais 3 ir 4 turi eiti iš eilės, tai galime laikyti, kad pirmiausia juostelė buvo perlenkta išilgai C kraštinės. Panašiai, kadangi lapeliai su skaičiais 1 ir 2 turi eiti iš eilės, tai galime laikyti, kad antrasis juostelės perlenkimas buvo padarytas išilgai A kraštinės. Išilgai kraštinės B taip pat buvo padarytas lenkimas. Šis lenkimas galėjo būti padarytas dviem būdais – kryptimi U arba kryptimi V (žr. pav.; paveikslėlyje juostelė ant stalo pastatyta išilgai jos ilgosios kraštinės, ir į ją žiūrima iš viršaus).

Jei juostelė buvo perlenkta išilgai kraštinės B kryptimi U, tuomet langelis su skaičiumi 3 uždengtas, todėl jis sulankstytoje juostelėje nėra apatinis ir nėra viršutinis. Panašiai, jei juostelė buvo perlenkta išilgai kraštinės B kryptimi V, tuomet langelis su skaičiumi 5 uždengtas, todėl jis sulankstytoje juostelėje nėra apatinis ir nėra viršutinis. Gautas prieštaravimas įrodo, jog neįmanoma taip sulankstyti juostelę, kad jos langeliuose įrašyti skaičiai eitų atsakyme **E** nurodyta tvarka.

Teisingas atsakymas **E**.

21. (A) Žalios

! Sunumeruokime kubelius iš kairės į dešinę paeiliui skaičiais nuo 1 iki 12. Mėlynus, geltonus, raudonus ir žalius kubelius žymėsime atitinkamai raidėmis M, G, R ir Z. Jei pirmas kubelis būtų geltonas, tai pagal uždavinio sąlygą 10, 11 ir 12 kubeliai būtų raudoni, t. y. dešimtas kubelis iš kairės būtų raudonas, o ne mėlynas. Vadinasi, 1, 2 ir 3 kubeliai yra raudoni, 10 kubelis yra mėlynas, o 12 kubelis – geltonas (žr. pav.).

R	R	R							M		G
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

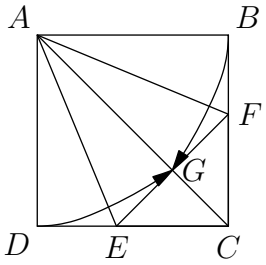
Pagal uždavinio sąlygą, visi žali kubeliai sudėti iš eilės vienas po kito. Jei šeštas kubelis nebūtų žalias, tai visi keturi žali kubeliai nebūtų sudėti iš eilės vienas po kito. Vadinasi, šeštas kubelis yra žalias. O sudėti kubelius tenkinant uždavinio sąlygą galima, pavyzdžiui, taip:

R	R	R	Z	Z	Z	Z	M	M	M	G	G
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Teisingas atsakymas **A**.

!! Galima savęs paklausti: o kiek yra būtų sudėti tenkinant uždavinio sąlygą kubelius. Jau matėme, kad keturis žaliuosius kubelius reikia iš eilės sudėti į langelius nuo 4 iki 9. Tam yra trys būdai: 4567, 5678, 6789. Lieka trys langeliai, į kuriuos bet kaip galima padėti dar vieną geltoną ir du mėlynus kubelius. Geltonąjį kiekvienu žaliųjų išdėstymo atveju galima padėti trimis būdais, o mėlynieji automatiškai paklius į likusius du langelius. Vadinasi, iš viso yra $3 \times 3 = 9$ būdai sudėti visus kubelius.

22. (A) 112,5°



! Kvadratiniame popieriaus lape $ABCD$ pažymėkime linijas AE ir AF, išilgai kurių jis buvo lenkiamas.

Perlenkus kvadratinį popieriaus lapą išilgai linijos AE, trikampis ADE sutampa su trikampiu AGE. Todėl $\angle GAE = \angle EAD = \frac{1}{2}\angle DAC$. Panašiai gauname, kad $\angle GAF = \frac{1}{2}\angle BAC$. Vadinasi,

$$\angle EAF = \frac{1}{2}(\angle DAC + \angle BAC) = \frac{1}{2}\angle DAB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Kita vertus, keturkampis $AFCE$ yra simetriškas kvadrato $ABCD$ įstrižainės AC atžvilgiu. Todėl $\angle AEC = \angle AFC$. Kadangi keturkampio $AFCE$ kampų suma lygi 360°, tai

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle EAF - \angle FCE) = \frac{1}{2}(360^\circ - 45^\circ - 90^\circ) = 112{,}5^\circ.$$

Vadinasi, didžiausias keturkampio $AFCE$ kampas lygus 112,5°.

Teisingas atsakymas **A**.

23. (D) 10

! Kadangi pusė skaičiaus A dalijasi iš 2, tai skaičius A dalijasi iš 4. Panašiai gauname, kad skaičius A dalijasi iš 9 ir iš 25. Bet kurie du iš skaičių 4, 9 ir 25 yra tarpusavyje pirminiai (didžiausias bendrasis daliklis lygus 1), todėl skaičius A dalijasi iš $4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$. Vadinasi, šį skaičių galima išreikšti $900 \cdot a$, kur a yra natūralusis skaičius. Kadangi skaičius A yra keturženklis, tai $1000 \leqslant A \leqslant 10000$. Taigi, $1000 \leqslant 900 \cdot a \leqslant 10000$, $\frac{10}{9} \leqslant a \leqslant \frac{100}{9}$. Todėl galimos a reikšmės yra $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. Taigi, iš viso tokių skaičių A yra 10.

Teisingas atsakymas **D**.

24. Ⓑ 1

! Kadangi Agota iš viso surinko 5 balus, o I ir II teisėjai jai skyrė atitinkamai 0 ir 2 balus, tai III teisėjas jai skyrė 3 balus (žr. pav.).

	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0			4
II	4	2	0		3
III	1	3			4
	7	5	3	4	11

Gerda iš viso surinko 11 balų, todėl trys teisėjai jai skyrė balus 4, 4 ir 3. Kadangi III teisėjas, vertindamas dalyvius, skaičius 0, 1, 2, 3, 4 užrašė po vieną kartą ir Agotai šis teisėjas skyrė 3 balus, tai III teisėjas Gerdai skyrė 4 balus. Vadinasi, Gerdai 3 balus skyrė I arba II teisėjas. Jei I teisėjas Gerdai būtų skyręs 3 balus, tai 4 balus jis būtų skyręs Elenai arba Evelinai. Tačiau Elena iš viso surinko 3 balus, todėl I teisėjas neskyrė jai 4 balų. Jei I teisėjas 4 balus būtų skyręs Evelinai, tai II teisėjas jai būtų skyręs 0 balų, nes ji iš viso surinko 4 balus. Tačiau tokiu atveju II teisėjas Elenai ir Evelinai būtų skyręs po 0 balų, o taip būti negalėjo. Vadinasi, I teisėjas Gerdai skyrė 4 balus. Todėl II teisėjas Gerdai skyrė 3 balus (žr. pav. viršuje).

II teisėjas 4 balus skyrė Adomui arba Evelinai. Jei šis teisėjas 4 balus būtų skyręs Evelinai, tai I teisėjas jai būtų skyręs 0 balų. Tačiau taip negalėjo būti, nes tokiu atveju I teisėjas Agotai ir Evelinai būtų skyręs po 0 balų. Vadinasi, II teisėjas 4 balus skyrė Adomui. Kadangi Adomas iš viso surinko 7 balus, tai III teisėjas jam skyrė $7 - 2 - 4 = 1$ balą.

Vadinasi, jau galima rinktis atsakymą **B**. Bet ne pro šalį įsitikinti, kad lentelę galima užpildyti pagal sąlygą. II teisėjas Evelinai skyrė 1 balą (kiti jo įvertinimai jau panaudoti). I teisėjas Evelinai gali skirti 3 balus. Tada III teisėjas Evelinai skiria $4 - 3 - 1 = 0$, Elenai lieka 2, o I teisėjas Elenai skiria $3 - 2 - 0 = 1$:

	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
	7	5	3	4	11

Ši lentelė tenkina visas uždavinio sąlygas, taigi uždavinys visiškai išspręstas.

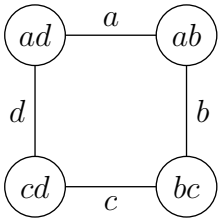
Bet I teisėjas gali skirti Evelinai ir 1 balą. Tada III teisėjas jai skiria $4 - 1 - 1 = 2$ balus, jam tenka Elenai skirti 0 balų, o I teisėjas Elenai skiria $3 - 0 - 0 = 3$ balus:

	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0	3	1	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	0	2	4
	7	5	3	4	11

Ši lentelė taip pat tenkina uždavinio sąlygą.

Teisingas atsakymas **B**.

25. (C) 8



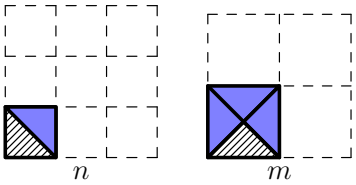
! Prie kvadrato kraštinių parašytus skaičius pažymėkime a, b, c ir d. Tuomet prie šio kvadrato viršūnių yra paršayti skaičiai ad, ab, bc ir cd (žr. pav.).

Prie kvadrato viršūnių parašytų skaičių suma lygi 15, todėl $ad+ab+bc+cd=15$. Kadangi $ad+ab+ +bc+cd=(a+c)(b+d)$, tai $(a+c)(b+d)= =15$. Skaičiai a, b, c ir d yra natūralieji, todėl $a+c \geqslant 2$ ir $b+d \geqslant 2$. Vadinasi, $a+c=3$ ir $b+d=5$ arba $a+c=5$ ir $b+d=3$. Bet kuriuo atveju prie kvadrato kraštinių parašytų skaičių suma lygi

$$a+b+c+d=(a+c)+(b+d)=3+5=8.$$

Teisingas atsakymas **C**.

26. (D) 8

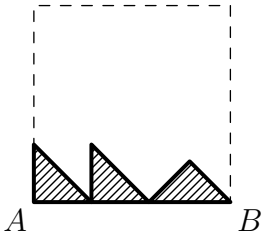


! Nemažindami bendrumo laikykime, kad lygiašonio stačiojo trikampio statinio ilgis lygus 1. Tuomet, remiantis Pitagoro teorema, jo įžambinės ilgis lygus $\sqrt{2}$. Paveikslėlyje pavaizduoti du būdai, kaip sudėti kvadratą iš trikampių.

Pirmuoju būdu $n \times n$ kvadratas sudėtas iš mažesnių kvadratų, kurių kiekvienas gautas suglaudus du lygiašonius stačiuosius trikampius išilgai jų įžambinių (kairiajame paveikslėlyje pavaizduotas atvejis, kai $n=3$). Tokiam $n \times n$ kvadratui sudėti prireiks $2n^2$ trikampių, o jo kraštinės ilgis bus lygus n. Kadangi Austėja turi lygiai 52 trikampius, tai $2n^2 \leqslant 52$. Iš čia gauname galimas n reikšmes $n=1,2,3,4,5$. Taigi, šiuo būdu iš turimų trikampių galima sudėti kvadratus, kurių kraštinių ilgiai yra 1, 2, 3, 4 ir 5.

Antruoju būdu $m \times m$ kvadratas sudėtas iš mažesnių kvadratų, kurių kiekvienas gautas keturis lygiašonius stačiuosius trikampius paeiliui suglaudus išilgai jų statinių (dešiniajame paveikslėlyje pavaizduotas atvejis, kai $m=2$). Tokiam $m \times m$ kvadratui sudėti prireiks $4m^2$ trikampių, o jo kraštinės ilgis bus lygus $\sqrt{2}\,m$. Kadangi Austėja turi lygiai 52 trikampius, tai $4m^2 \leqslant 52$. Iš čia gauname galimas m reikšmes $m=1,2,3$. Taigi, šiuo būdu iš turimų trikampių galima sudėti kvadratus, kurių kraštinių ilgiai yra $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ ir $3\sqrt{2}$.

Kadangi skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ ir $3\sqrt{2}$ yra skirtingi, tai jau gavome 8 skirtingo dydžio kvadratus, kuriuos galima sudėti iš Austėjos turimų trikampių.



Įrodysime, kad kitokių kvadratų neįmanoma gauti. Iš tikrųjų, tarkime, kad Austėja iš turimų trikampių sudėjo kvadratą. Sakykime, kad kvadrato kraštinę AB sudaro a statinių ir b įžambinių (žr. pav. dešinėje; jame pavaizduotas atvejis $a=2$ ir $b=1$).

Tuomet to kvadrato kraštinės ilgis lygus $a+b\sqrt{2}$, o jo plotas lygus $(a+b\sqrt{2})^2=a^2+b^2+2ab\sqrt{2}$. Kadangi kiekvieno lygiašonio stačiojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2}$, tai bet kurio Austėjos sudėto kvadrato plotas yra racionalusis skaičius (jei kvadratas sudėtas iš c trikampių, tai tokio kvadrato plotas lygus $\frac{c}{2}$). Vadinasi, skaičius $a^2+b^2+2ab\sqrt{2}$ yra racionalusis.

Pažymėkime šį racionalųjį skaičių r. Jei $a \neq 0$ ir $b \neq 0$, tai iš lygybės $a^2+b^2+2ab\sqrt{2}=r$ gauname $\sqrt{2}=\frac{r-a^2-b^2}{2ab}$. Tai reikštų, kad skaičius $\sqrt{2}$ yra racionalusis. Tačiau gerai žinoma, kad skaičius $\sqrt{2}$ nėra racionalusis (žr. Pastabą). Gauta prieštara reiškia, kad arba $a=0$, arba $b=0$.

Jei $a = 0$, tai nagrinėjamo kvadrato kraštinės ilgis bus lygus $b\sqrt{2}$, o jo plotas bus lygus $2b^2$. Vadinasi, jis bus sudėtas iš $2b^2 : \frac{1}{2} = 4b^2$ trikampių. Kadangi Austėja turi lygiai 52 trikampius, tai $4b^2 \leqslant 52$. Iš čia gauname galimas b reikšmes $b = 1, 2, 3$ ir atitinkamus kvadrato kraštinių ilgius: $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ ir $3\sqrt{2}$. Kvadratus su tokio ilgio kraštinėmis jau mokame sudėti (antruoju būdu, aprašytu aukščiau).

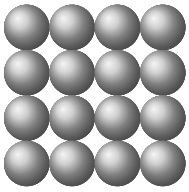
Jei $b = 0$, tai tai nagrinėjamo kvadrato kraštinės ilgis bus lygus a, o jo plotas bus lygus a^2. Vadinasi, jis bus sudėtas iš $a^2 : \frac{1}{2} = 2a^2$ trikampių. Kadangi Austėja turi lygiai 52 trikampius, tai $2a^2 \leqslant 52$. Iš čia gauname galimas a reikšmes $a = 1, 2, 3, 4, 5$ ir atitinkamus kvadrato kraštinių ilgius: 1, 2, 3, 4 ir 5. Kavadratus su tokio ilgio kraštinėmis jau mokame sudėti (pirmuoju būdu, aprašytu aukščiau).

Teisingas atsakymas **D**.

Pastaba. Įrodykime, kad $\sqrt{2}$ – iracionalusis skaičius. Tarkime priešingai, kad $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (m ir n – natūralieji skaičiai). Tada $m^2 = 2n^2$. Išskaidykime m ir n pirminiais daugikliais. Tada skaičiaus $m^2 = m \cdot m$ skaidinyje bus lyginis dvejetų skaičius (kiek jų yra pirmame daugiklyje, tiek ir antrame). Vadinasi, $2n^2 = 2 \cdot n \cdot n$ skaidinyje yra nelyginis dvejetų skaičius. Prieštara.

27. (D) 96

! Nagrinėkime piramidės pagrindą, sudarytą iš 4×4 rutulių (žr. pav.).



Pagrindo kiekvienoje rutulių eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra lygiai 3 lietimosi vietos. Vadinasi, piramidės pagrinde 4×4 yra $(4 + 4) \cdot 3 = 24$ lietimosi vietos. Panašiai gauname, kad piramidės sluoksnyje 3×3 yra $(3 + 3) \cdot 2 = 12$ lietimosi vietų, o sluoksnyje 2×2 yra $(2 + 2) \cdot 1 = 4$ lietimosi vietos. Be to, kiekvienas 3×3 sluoksnio rutulys liečiasi su lygiai keturiais piramidės pagrindo 4×4 rutuliais. Vadinasi, 3×3 sluoksnio rutuliai liečiasi su 4×4 sluoksnio rutuliais $9 \cdot 4 = 36$ taškuose. Panašiai gauname, kad 2×2 sluoksnio rutuliai liečiasi su 3×3 sluoksnio rutuliais $4 \cdot 4 = 16$ taškų. Lieka piramidės viršūnės rutulys, kuris su 2×2 sluoksnio rutuliais liečiasi 4 taškuose. Taigi, iš viso yra $24 + 12 + 4 + 36 + 16 + 4 = 96$ lietimosi vietos.

Teisingas atsakymas **D**.

28. Ⓒ 9

! Natūralusis skaičius dalijasi iš kiekvienos natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30 tada ir tik tada, kai jis dalijasi iš kiekvieno pirminio skaičiaus laipsnio, ne didesnio už 30. Vadinasi, natūralusis skaičius dalijasi iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30 tada ir tik tada, kai jis dalijasi iš kiekvieno iš šių skaičių: 2^4, 3^3, 5^2, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 – tai didžiausi pirminių skaičių laipsniai, ne didesni už 30. Dabar nesunku įsitikinti, kad devynių skaičių 17, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 28 ir 29 sandauga dalijasi iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30. Įrodysime, kad jokių aštuonių skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių negu 30, sandauga nesidalija iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30. Iš tikrųjų, tarkime, kad galima pasirinkti aštuonis skirtingus natūraliuosius skaičius $a_1, a_2, \ldots, a_8$, ne didesnius negu 30, kurių sandauga dalijasi iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30. Tuomet ši sandauga dalijasi iš kiekvieno iš šių skaičių: 2^4, 3^3, 5^2, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Vadinasi, sandauga $a_1 \cdot a_2 \cdots a_8$ dalijasi iš sandaugos $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$. Todėl

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_8 \geqslant 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

Kita vertus, teisinga nelygybė

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_8 \leqslant 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30.$$

Gauname tokią nelygybę:

$$23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \geqslant 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

Šios nelygybės abi puses suprastinę iš jos kairėje ir dešinėje pusėje esančių skaičių didžiausio bendrojo daliklio, gausime nelygybę

$$3 \cdot 10 \cdot 12 \geqslant 11 \cdot 17 \cdot 19,$$

kuri yra akivaizdžiai neteisinga. Gauta prieštara reiškia, kad jokių aštuonių skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių negu 30, sandauga nesidalija iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus nuo 1 iki 30.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Pabandykime apčiuopti, kas turėtų įeiti į mažiausią rinkinį skaičių, kurių sandauga dalijasi iš visų skaičių nuo 1 iki 30. Į tą rinkinį būtinai įeis 29 – kiti jo kartotiniai, net $2 \cdot 29$, per dideli. Lygiai taip pat į rinkinį įeis 23, 19, 17. Į jį taip pat įeis 13 arba 26 – kitaip sandauga nesidalys iš 13. Į jį įeis bent vienas iš skaičių 11 ir 22. Į jį įeis bent vienas iš skaičių 7, 14, 21, 28, taip pat bent vienas iš skaičių 5, 10, 15, 20, 25, 30. Toliau eina pirminis skaičius 3. Rinkinio skaičių sandauga turi dalytis iš $3^3 = 27$. Bet jeigu į rinkinį paimtume 8 iš mažesniųjų skaičių, tai jų sandauga iš 27 nesidalintų: juk daliklį 3 turėtų ne daugiau kaip du skaičiai – 21 ir vienas iš penketo kartotinių 15 arba 30. Įrodėme, kad ieškomame rinkinyje bus ne mažiau kaip 9 skaičiai. Atspėti tokį rinkinį dabar jau nesunku.

Kaip jau matėme, 8 skaičiai būtinai bus iš jau minėtų. Devintuoju skaičiumi natūralu imti 27 – juk būtent dėl nedalumo iš 27 neužtenka 8 skaičių komplekto. Dabar rinkinys jau dalysis iš 3^3. Lieka pasirūpinti, kad jis dalytųsi iš $2^4 = 16$ ir $5^2 = 25$. Tai padaryti nesunku: į rinkinį iš 13 kartotinių imame $26 = 2 \cdot 13$, iš 11 kartotinių imame $22 = 2 \cdot 11$, iš 7 kartotinių imame $28 = 2^2 \cdot 7$, ir jau sandauga $26 \cdot 22 \cdot 28 = 13 \cdot 11 \cdot 2^4$ dalijasi iš 2^4. O kad sandauga dalytųsi iš 5^2, užtenka iš penketo kartotinių imti būtent 25.

Įsitikinome, kad sandauga $29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 26 \cdot 22 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 25$ dalijasi iš bet kurio iš skaičių nuo 1 iki 30.

Pastaba. Įdomu, kad sąlygoje žodį „skirtingų“ galima praleisti: ir skirtingų, ir neskirtingų 8 skaičių rinkiniui neužtenka (ką tik pateiktas įrodymas lieka tas pats). Skaitytojui siūlome kiek sunkesnį uždavinį – rasti dar bent vieną reikiamą (nebūtinai skirtingų) skaičių rinkinį.

29. (D) 165 m

! Distancijos ilgį metrais pažymėkime s. Sakykime, kad Gerda 15 m nubėgo per t sekundžių. Tuomet Gerdos greitis lygus $\frac{15}{t}$ m/s. Per t sekundžių Sofija nubėgo $35 - 22 = 13$ metrų, todėl jos greitis lygus $\frac{13}{t}$ m/s. Tarkime, kad Austėja distancijai įveikti prireikė lygiai u sekundžių. Per tiek laiko Gerda nubėgo $u \cdot \frac{15}{t}$ metrų. Kita vertus, pagal uždavinio sąlygą, šis atstumas lygus $s - 15$. Taigi, turime tokią lygtį:

$$u \cdot \frac{15}{t} = s - 15.$$

Per u sekundžių Sofija nubėgo $u \cdot \frac{13}{t}$ metrų. Pagal uždavinio sąlygą, šis atstumas lygus $s - 35$. Taigi, turime dar vieną lygtį:

$$u \cdot \frac{13}{t} = s - 35.$$

Pirmąją lygtį panariui padaliję iš antrosios, gauname lygtį

$$\frac{15}{13} = \frac{s-15}{s-35}.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname $s = 165$. Taigi, distancijos ilgis lygus 165 m.

Teisingas atsakymas **D**.

!! Galima apsieiti ir su vienu nežinomuoju – distancijos ilgiu s. Kai Austėja finišavo, per tą laiką Gerda buvo nubėgusi $s - 15$ metrų, o Sofija $s - 35$ metrus, taigi, jų greičių santykis buvo $\frac{s-15}{s-35}$. Kai Gerda finišavo, nubėgusi s metrų, tai Sofija buvo nubėgusi $s - 22$ metrus, o jų greičių santykis buvo $\frac{s}{s-22}$. Bet juk jų greičiai pastovūs, taigi ir santykis nekinta,

$$\frac{s-15}{s-35} = \frac{s}{s-22}.$$

Sprendžiame: $s^2 - 37s + 15 \cdot 22 = s^2 - 35s$, $2s = 15 \cdot 22$, $s = 15 \cdot 11 = 165$ (m).

30. (C) 404

! Skaičių 20202020202020202020 galima išreikšti taip:

$$\begin{aligned}
&202 \cdot 10^{17} + 202 \cdot 10^{13} + 202 \cdot 10^{9} + 202 \cdot 10^{5} + 2020 = \\
=&202 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 10^{15} + 202 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 10^{11} + 202 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 10^{7} + \\
+&202 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 10^{3} + 2020 = \\
=&808 \cdot (5^2 \cdot 10^{15} + 5^2 \cdot 10^{11} + 5^2 \cdot 10^{7} + 5^2 \cdot 10^{3}) + 2020.
\end{aligned}$$

Taigi, skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana sutampa su skaičiaus 2020 dalybos iš 808 liekana. Kadangi $2020 = 2 \cdot 808 + 404$, tai skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana lygi 404.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Nagrinėkime 202 kartus mažesnius skaičius. Skaičiaus ...10 dalybos iš 4 liekana lygi 2. Padidinkime viską 202 kartus: skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana lygi 404.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	A
3	C
4	C
5	D
6	B
7	E
8	B
9	E
10	B
11	A
12	D
13	B
14	C
15	C
16	C
17	A
18	D
19	B
20	E
21	A
22	A
23	D
24	B
25	C
26	D
27	D
28	C
29	D
30	C