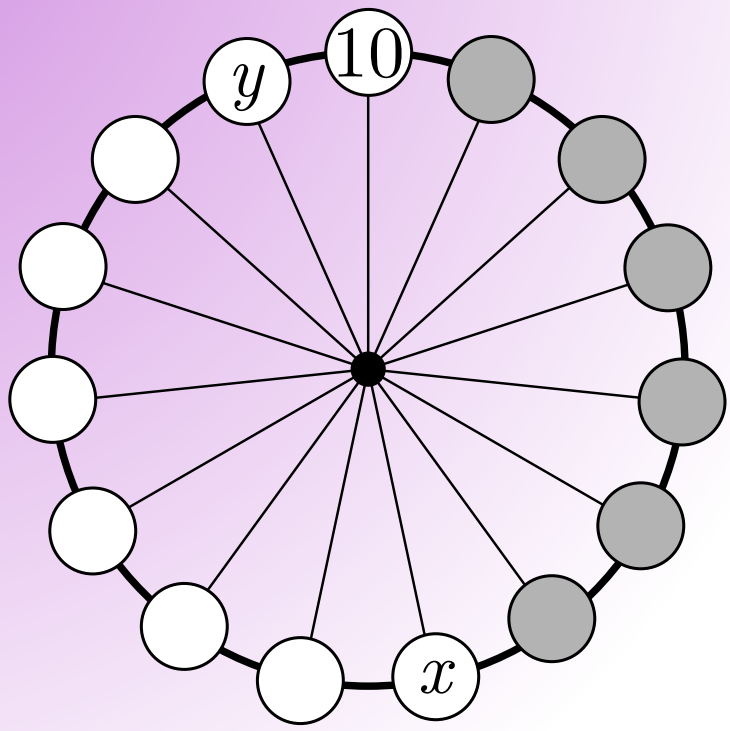
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA
Ekspertas



Užduotys ir sprendimai

2020

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2020. Ekspertas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Aivaras Novikas, Juozas Juvencijus Mačys,
Paulius Drungilas, Ugnė Gudžinskaitė

© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2020

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **5**

Užduočių sprendimai **10**

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų“ vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų“ vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

`http://aksf.org/`

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

`http://kengura.lt/`

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online“ režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

`http://www.ekspertas.kengura.lt/`

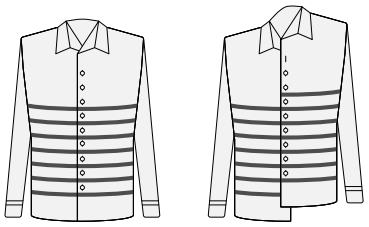
Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

Organizatoriai

2020 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kai Kazys užsagsto savo dryžuotus marškinius teisingai, jo liemenį juosia 7 uždari žiedai, kaip parodyta paveikslėlio kairėje. Šįryt Kazys blogai užsisegė marškinius, kaip parodyta paveikslėlio dešinėje. Kiek uždarų žiedų, juosiančių liemenį, dabar sudaro marškinių dryžiai?



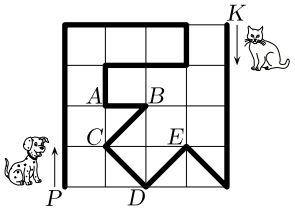
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 7

2. Elena šaligatvyje kreida nusipiešė didžiulį kvadratą. Ji pradeda šokinėti nuo skaičiaus 1. Kiekvieną kartą ji šoka prie trejetu didesnio skaičiaus. Koks yra didžiausias skaičius, kurį ji gali pasiekti taip šokinėdama?

1	5	8	11
4	7	10	14
24	23	13	18
21	19	16	20

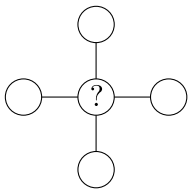
A) 11 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 24

3. Šuo ir katė bėga parko taku, paveikslėlyje pažymėtu stora juoda linija. Šuo pradeda bėgti iš taško P tuo pačiu metu, kai katė pradeda bėgti iš taško K. Kuriame taške jie susitiks, jei šuo bėga tris kartus greičiau už katę?



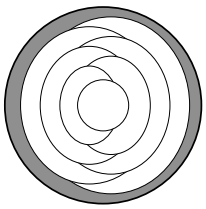
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

4. Romas skaičius 1, 2, 3, 4 ir 5 po vieną įrašė į skrituliukus. Eilutės skaičių suma yra lygi stulpelio skaičių sumai. Kuris skaičius gali būti įrašytas į skrituliuką, pažymėtą klaustuku?



A) Tik 5 **B)** 2, 3 arba 4 **C)** Tik 3 **D)** Tik 1 arba 3 **E)** 1, 3 arba 5

5. Ūla spalvina piešinį dešinėje, kiekvieną sritį nuspalvindama raudonai, pilkai arba geltonai taip, kad gretimos sritys būtų skirtingų spalvų. Vieną sritį ji jau nuspalvino pilkai. Kiek iš viso bus pilkų sričių, kai Ūla viską nuspalvins?

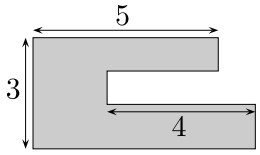


A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

6. Raminta sugaišta 3 valandas į mokyklą važiuodama autobusu ir grįždama pėsčiomis. Jei Raminta į mokyklą važiuotų autobusu ir atgal grįžtų autobusu, tai iš viso sugaištų 1 valandą. Kiek iš viso valandų prireiks Ramintai nueiti į mokyklą pėsčiomis ir grįžti atgal pėsčiomis?

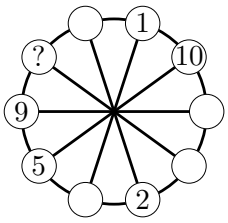
A) 3,5 **B)** 4,5 **C)** 5,5 **D)** 4 **E)** 5

7. Adomo sodas yra paveikslėlyje pavaizduotos formos. Bet kurios dvi šios figūros kraštinės yra arba lygiagrečios, arba statmenos. Trijų kraštinių ilgiai yra žinomi (žr. pav.). Kam lygus Adomo sodo perimetras?



A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

8. Visus skaičius nuo 1 iki 10 reikia po vieną įrašyti į skrituliukus (žr. pav.). Du skrituliukai yra **priešingi**, jei juos jungia skersmuo. Bet kurių dviejų gretimų skrituliukų skaičių suma turi būti lygi atitinkamų dviejų priešingų skrituliukų skaičių sumai. Kai kurie skaičiai jau įrašyti. Kokį skaičių reikės įrašyti į skrituliuką, pažymėtą klaustuku?



A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

9. Vienas iš brolių Grimų pamiršo pilną brolio sužadėtinės vardą ir jį paklausė: „Koks tavo sužadėtinės vardas – ar Adelė Lilė Klėja, ar Adelė Laura Kora, ar Alė Lora Klėja?“ Kiekvieną kartą lygiai vienas vardas ir jo padėtis buvo teisingi. Koks brolio sužadėtinės vardas?

A) Alė Lilė Kora **B)** Alė Laura Kora **C)** Adelė Laura Klėja
D) Adelė Lilė Kora **E)** Alė Laura Klėja

10. Iš skaičių nuo 1 iki 9 pasirinkti šeši skaičiai. Jie po vieną parašyti kubo sienose. Kiekvienų dviejų priešingųjų sienų skaičių suma ta pati. Koks skaičius parašytas sienoje, priešingoje sienai su skaičiumi 5?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

Klausimai po 4 taškus

11. Užraše KAN − ROO + GA kiekvieną raidę galima keisti skaitmeniu nuo 1 iki 9 (vienodas raides – vienodais skaitmenimis, skirtingas raides – skirtingais). Kokį didžiausią atsakymą galima gauti, atlikus nurodytus veiksmus?

A) 925 **B)** 933 **C)** 939 **D)** 942 **E)** 948

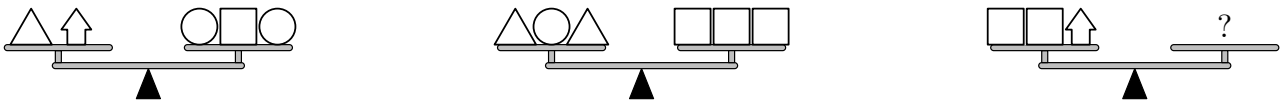
12. Kartą susitiko elfas, kuris visada sako tiesą, ir trolis, kuris visada meluoja. Jie abu ištarė tą patį sakinį – vieną iš užrašytų žemiau. Kurį?

A) Tu sakai tiesą **B)** Mes abu sakome tiesą **C)** Aš visada meluoju
D) Aš sakau tiesą **E)** Tik vienas iš mūsų sako tiesą

13. Marius turi kubo formos modelino luitą. Kiek mažiausiai kartų jam reikės perpjauti kubą, kad padalytų jį į 12 vienodų dalių?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

14. Paveikslėlyje parodytos trejos pusiausviros svarstyklės.



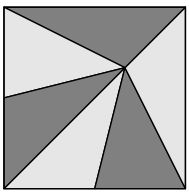
Kuris iš žemiau nurodytų rinkinių tikrai tinka klaustuko vietoje?

A) △△△△□ **B)** △△△○ **C)** △○○○ **D)** △□□□□ **E)** ○○□

15. Gabija nupirko 10 gėlių puokštę: 4 rožes, 3 tulpes, 2 gvazdikus ir 1 leliją. Keturios gėlės buvo raudonos, trys baltos, dvi rožinės ir viena geltona, ir jokios dvi gėlės nebuvo vienodos (t. y. tos pačios rūšies ir spalvos). Kokios gėlės nebuvo puokštėje?
A) Baltos tulpės **B)** Raudonos lelijos **C)** Raudonos rožės **D)** Rožinio gvazdiko **E)** Geltonos rožės

16. Šachmatų turnyre Viktorija turėjo sužaisti 15 partijų. Per turnyro pertrauką ji pastebėjo, kad ji laimėjo pusę iki pertraukos žaistų partijų, pralaimėjo trečdalį, o dvi partijas baigė lygiosiomis. Kiek partijų jai dar liko sužaisti?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

17. Kvadratinis langas, kurio plotas lygus 81 dm^2, įstiklintas šešių lygiapločių trikampių vitražu (žr. pav.). Bendroje trikampių viršūnėje tupi musė. Kokiame aukštyje nuo lango apačios ji tupi?
A) 3 dm **B)** 5 dm **C)** 5,5 dm **D)** 6 dm **E)** 7,5 dm

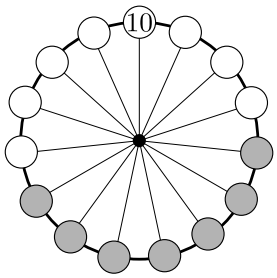


18. Šokių konkurso finale kiekvienas iš trijų teisėjų kiekvienam iš penkių finalo dalyvių skiria 0, 1, 2, 3 arba 4 balus. Kiekvienas teisėjas, vertindamas dalyvius, skaičius 0, 1, 2, 3, 4 užrašė po vieną kartą. Šokių finalo dalyvis Adomas žino kiekvieno finalo dalyvio balų sumą ir dar keletą atskirų įvertinimų, kaip parodyta lentelėje.

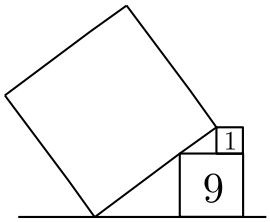
	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0			
II		2	0		
III					
	7	5	3	4	11

Kiek balų Adomui skyrė trečiasis teisėjas?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

19. Ratu surašyti 15 skaičių. Paveikslėlyje matome vieną iš jų – skaičių 10. Bet kurių 7 gretimų šio rato skaičių (taigi ir skaičių pilkuose skrituliuose) suma yra tokia pati. Keli iš skaičių 75, 216, 365 ir 2020 gali būti visų 15 skaičių suma?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

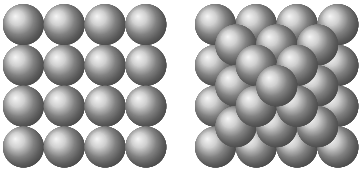


20. Paveikslėlyje pavaizduoti trys kvadratai ir tiesė bei nurodyti dviejų kvadratų plotai. Koks yra didžiojo kvadrato plotas?
A) 49 **B)** 80 **C)** 81 **D)** 82 **E)** 100



Klausimai po 5 taškus

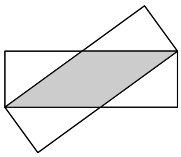
21. Julija stato piramidę iš vienodų rutulių. Piramidės pagrindas sudarytas iš 4×4 rutulių, kaip parodyta 1 pav. Ant jo paeiliui dedami piramidės sluoksniai iš 3×3, 2×2 rutulių ir piramidės viršūnė iš vieno rutulio (žr. 2 pav.). Keliose vietose liečiasi du jos rutuliai?



1 pav. 2 pav.

A) 30 **B)** 40 **C)** 56 **D)** 96 **E)** 112

22. Du lygūs stačiakampiai 9×3 kertasi, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra stačiakampių bendros dalies plotas?

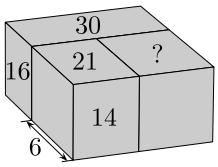


A) 12 **B)** $13\frac{1}{2}$ **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

23. Kam lygi skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana?
A) 0 **B)** 202 **C)** 404 **D)** 604 **E)** 702

24. Untė yra 71-galvis slibinas. Kartą užmigo visos Untės galvos. Bet kuriuo metu gali pabusti bet kurios lygiai 30 iš tuo metu miegančių Untės galvų. Bet kuriuo metu gali užmigti bet kurios lygiai 18 iš tuo metu nemiegančių Untės galvų. Kiek mažiausiai Untės galvų gali vienu metu miegoti po kurio laiko?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

25. Stačiakampis gretasienis padalytas į tris mažesnius. Paveikslėlyje nurodyti tų mažesnių gretasienių kai kurių sienų plotai bei vienos briaunos ilgis. Koks yra klaustuku pažymėtos sienos plotas?



A) 18 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 30 **E)** Nustatyti neįmanoma

26. Į 4×4 lentelės langelius reikia įrašyti po skaičių, kad keturių skaičių suma kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų tokia pati. Keli skaičiai jau įrašyti (žr. pav.). Kokį skaičių reikia įrašyti pilkajame langelyje?

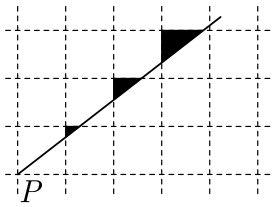
1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

27. Lentoje užrašyti 8 iš eilės einantys triženkliai natūralieji skaičiai. Kiekvienas iš jų dalijasi iš savo paskutinio skaitmens. Kokia yra mažiausio užrašyto skaičiaus skaitmenų suma?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

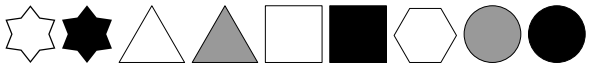
28. Auksė ryte užsuko į ledainę, siūlančią 16 ledų rūšių, ir rinkosi, kurių dviejų rūšių ledų nori. Vakare Auksė vėl užsuko į ledainę ir rinkosi, kurių trijų rūšių ledų nori. Iki vakaro kai kurių rūšių ledų ledainėje neliko, bet Auksė ryte ir vakare turėjo po tiek pat būdų pasirinkti. Kelių rūšių ledų neliko ledainėje iki antrojo Auksės apsilankymo?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

29. Plokštuma padalyta į kvadratinius langelius. Tiesė, nubrėžta per langelio viršūnę P, ir langelių kraštinės riboja tris užtušuotus trikampius, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra šių trikampių plotų santykis?



A) 1 : 2 : 3 **B)** 1 : 2 : 4 **C)** 1 : 3 : 9 **D)** 1 : 4 : 8 **E)** Kitas atsakymas

30. Gervazas ir Protazas nori sužinoti, kuri iš pavaizduotųjų figūrų labiausiai patinka Ambraziejui.



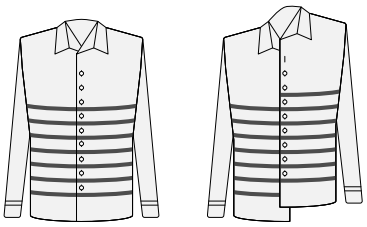
Gervazas žino, kad Ambraziejus atskleidė Protazui tos figūros formą. Protazas žino, kad Ambraziejus atskleidė Gervazui tos figūros spalvą. Gervazas pasakė Protazui: „Nežinau Ambraziejaus mėgstamiausios figūros, bet žinau, kad ir tu nežinai.” Protazas atsakė: „Ką tik aš nežinojau, kokia tai figūra, bet dabar jau žinau.” Į tai Gervazas atsakė: „Dabar jau žinau ir aš.” Kuri figūra labiausiai patinka Ambraziejui?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

Eksperto užduočių sprendimai

1. (A) 0

! Daug konkurso dalyvių rinkosi atsakymą **D**, greičiausiai tiesiogiai remdamiesi paveikslėliu. Bet pastebėkime, kad marškinių raštą sudaro 7 dryžiai. Blogai užsagsčius marškinius, pirmojo nuo apačios dryžio vienas galas liko laisvas, o kitas sutapo su antrojo dryžio vienu galu. Antrojo dryžio kitas galas sutapo su vienu trečiojo galu, ir t. t. Vadinasi, dryžiai nesudarė jokių uždarų žiedų, bet vientisą liniją – spiralę – su dviem laisvais galais marškinių viršuje ir apačioje.



2. (D) 19

! Iš 1 Elena turi šokti į 4, iš 4 – į 7, iš 7 – į 10, iš 10 – į 13, iš 13 – į 16, iš 16 – į 19. O štai trejetu didesnio skaičiaus 22 jos kvadrate nėra. Vadinasi, didžiausias skaičius, pasiekiamas šokinėjant tik į 3 vienetais didesnį, yra 19.

Beje, Elena visus šuolius atlieka tik į gretimą langelį (nors tai ir nesvarbu).

3. (E) E

! Kol katė nubėga tam tikrą atsumą, šuo nubėga tris tokius atstumus. Vadinasi, abu kartu jie nubėga 4 tokius atstumus, o katė nubėga vieną, t.y. 4 kartus mažiau.

Viso tako, kurį jie nubėga kartu, ilgis yra 16 kvadratėlio kraštinių ir 4 įstrižainės, o katė tada nubėga 4 kartus mažiau, o tai yra 4 kvadratėlių kraštinės ir 1 įstrižainė. Būtent tiek nubėgusi katė pasieks tašką E, ir jame susitiks su šunimi. Teisingas atsakymas – **E**.

4. (E) 1, 3 arba 5

? Čia jau tikrinti atsakymus sunku. Be to, jeigu, pavyzdžiui, 5 tinka, tai dar neaišku, ar **tik 5**, ar tinka ir dar kas nors. Žodžiu, reikia ką nors sugalvoti. Kaip kitaip galima pasakyti, kad stulpelio ir eilutės skaičių sumos lygios? Kadangi į abi tas sumas įeina centrinis skaičius, tai tos sumos liks lygios ir atmetus tą centrinį. Kitaip sakant, reikia sudaryti 2 poras skaičių, kurių sumos lygios. Įsitikiname, kad įmanomi 3 variantai:

$$1+4=2+3 \text{ (centras 5)}, \quad 1+5=2+4 \text{ (centras 3)}, \quad 2+5=3+4 \text{ (centras 1)}.$$

Renkamės atsakymą **E**.

! Taip sprendžiant, lieka abejonė: ar nepražiopsojome kokios nors galimybės? Atsakyti į šį klausimą paprasta: 1, 3 ir 5 tinka – tai įrodėme pavyzdžiais. Ir vis dėlto – o gal galima į centrą įrašyti 2 ar 4? Įsitikinkime, kad 2 įrašyti į centrą neįmanoma. Sakykime, kad 2 stovi centre. Tada lieka skaičiai 1, 3, 4 ir 5. Iš jų dviejų lygių sumų padaryti neįmanoma. Vadinasi, 2 negali stovėti centre.

Panašiai įsitikiname, kad centre negali stovėti 4.

Dabar jau visiškai aiškus teisingas atsakymas – **E**.

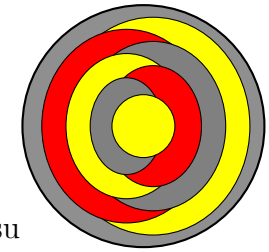
!! „Nušlifuotas“ (iš esmės tas pats) sprendimas būtų toks. Kadangi ne centre esančių skaičių dviejų porų sumos lygios, tai abiejų sumų suma yra lyginė, t. y. tų 4 skaičių suma lyginė. Bet visų 5 skaičių suma $1 + 2 + 3 + 4 + +5 = 15$ nelyginė. Vadinasi, centre turi stovėti nelyginis skaičius. Kad kiekvienas iš nelyginių skaičių į centrą tinka, įrodome pavyzdžiais:

1 tinka, nes iš 2, 3, 4, 5 sudarome 2 lygias porų sumas $2 + 5 = 3 + 4$;

3 tinka, nes iš 1, 2, 4, 5 sudarome 2 lygias porų sumas $1 + 5 = 2 + 4$;

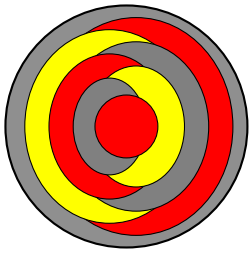
5 tinka, nes iš 1, 2, 3, 4 sudarome 2 lygias porų sumas $1 + 4 = 2 + 3$.

5. (B) 3



? Su išorine žiedine pilka sritimi liečiasi dvi kitos, tarpusavy gretimos sritys, tad šias dvi sritis reikės nuspalvinti skirtingomis spalvomis, geltona ir raudona. Pasirinkime sritį iš dešinės nuspalvinti geltonai, tada sritį iš kairės nuspalviname raudonai.

Toliau pastebime, kad visuomet atsiranda po vieną sritį, kuri ribojasi su dviem jau skirtingomis spalvomis nuspalvintomis sritimis, todėl tokią sritį turime vienareikšmiškai nuspalvinti trečiąja spalva. Nuspalvinę visą piešinį (žr. pav. dešinėje), suskaičiuojame 3 pilkas sritis, ir renkamės atsakymą **B**.



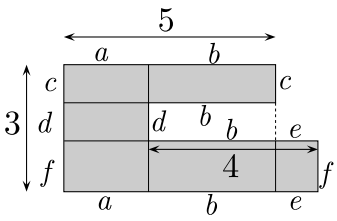
! Iš sprendimo **?** žinome, kad galima taip nuspalvinti piešinį, kad jis turėtų 3 pilkas sritis. Bet galbūt spalvinant kitaip gautume kitokį pilkų sričių skaičių? Sprendime **?** iš pradžių sritį dešinėje, kuri ribojosi su išorine pilka sritimi, nuspalvinome geltonai, o vėliau jokio pasirinkimo nebeturėjome. Dabar nuspalvinkime šią sritį raudonai. Tada sritį, besiribojančią su išoriniu žiedu kairėje, turime nuspalvinti geltonai, tada gretimą sritį dešinėje turime spalvinti pilkai, ir taip toliau vėl vienareikšmiškai po vieną spalvindami visas sritis nuspalviname visą piešinį (žr. pav. dešinėje). Matome, kad pilkų sričių vėl turime tris, o abu piešiniai skiriasi tik tuo, kad geltonų ir raudonų sričių spalvos sukeistos tarpusavyje.

6. (E) 5

! Raminta, važiuodama autobusu į mokyklą ir grįždama iš jos, iš viso sugaišta 1 valandą. Vadinasi, Raminta sugaišta pusę valandos važiuodama autobusu į mokyklą ir pusę valandos grįždama autobusu iš mokyklos. Kita vertus, Raminta sugaišta 3 valandas į mokyklą važiuodama autobusu ir grįždama pėsčiomis. Vadinasi, Raminta sugaišta dvi su puse valandos eidama pėsčiomis į mokyklą ir dvi su puse valandos grįždama pėsčiomis iš mokyklos. Taigi, Ramintai iš viso prireiks penkių valandų nueiti į mokyklą pėsčiomis ir grįžti atgal pėsčiomis.

Teisingas atsakymas **E**.

7. (C) 24



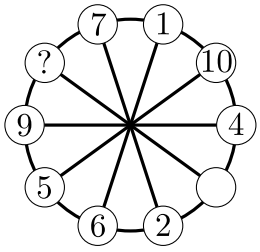
! Adomo sodo formos figūrą padalinkime į stačiakampius ir jų kraštinių ilgius pažymėkime a, b, c, d, e ir f (žr. pav.).

Tuomet, pagal uždavinio sąlygą, $a + b = 5$, $c + d + f = 3$ ir $b + e = 4$. Taigi, Adomo sodo perimetras lygus

$$(a + b) + c + b + d + (b + e) + f + (e + b + a) + f + d + c =$$
$$=2(a + b) + 2(b + e) + 2(c + d + f) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 24.$$

Teisingas atsakymas **C**.

8. (A) 3



! Iš pradžių galime įrašyti skaičių į skrituliuką, priešingą 1: šio skaičiaus ir 5 suma turi būti lygi priešingų skrituliukų skaičių sumai $1+10 = 11$. Taigi į skrituliuką įrašome $11 - 5 = 6$. Toliau įrašome skaičių į skrituliuką, priešingą 2: $2 + 6 - 1 = 7$. Taip pat įrašome skaičių, priešingą skrituliukui su 9: $9+5-10 = 4$. Tad lieka neįrašyti tik skaičiai 3 ir 8 (žr. pav.)

Galim pamėginti klaustuko vietoje įrašyti 8. Tada priešingame skrituliuke turėtume įrašyti $8 + 7 - 2 = 13$, o ne 3, vadinasi 8 klaustuko vietoje netinka. O štai vietoj klaustuko įrašius 3, priešingame skrituliuke turime įrašyti $7 + 3 - 2 = 8$, ko ir prašoma sąlygoje. Dar kartą patikriname, kad visos gretimų skrituliukų skaičių sumos yra lygios priešingų skrituliukų skaičių sumai, ir renkamės atsakymą **A**.

9. (A) Alė Lilė Kora

? Paprasčiausias būdas – tikrinti atsakymus. Galvokime, kad teisingas atsakymas **A**, Alė Lilė Kora. Tikriname, ar išpildytos uždavinio sąlygos. Pirmas buvo ištartas „didvardis“ Adelė Lilė Klėja – ir iš tikrųjų, tik vienas vardas, būtent Lilė, teisingas ir yra antras. Antras buvo pasakytas didvardis Adelė Laura Kora, ir tik vienas vardas Kora yra teisingas ir stovi trečioje vietoje. Trečias buvo pasakytas didvardis Alė Laura Klėja[1], ir tik vienintelis vardas Alė teisingas ir stovi reikiamoje pirmoje vietoje.

Kadangi tik vienas atsakymas teisingas, tai kiti neteisingi. Drąsiai renkamės atsakymą **A**.

! Žinoma, malonu įsitikinti, kad kiti atsakymai sąlygos netenkina. Jeigu brolio sužadėtinės didvardis būtų **B**, t. y. Alė Laura Kora, tai antrojo ištarto didvardžio du vardai – Laura ir Kora – teisingi, o turėtų būti teisingas tik vienas.

Jeigu sužadėtinės didvardis būtų **C**, Adelė Laura Klėja, tai pirmojo ištarto didvardžio Adelė Lilė Klėja būtų teisingi du vardai – Adelė ir Klėja.

Jeigu sužadėtinės didvardis būtų **D**, Adelė Lilė Kora, tai pirmame klausimo didvardyje Adelė Lilė Klėja būtų du teisingi vardai.

Pagaliau, jeigu sužadėtinės didvardis būtų **E**, Alė Laura Klėja, tai trečiame pasakytame didvardyje Alė Laura Klėja būtų netgi visi trys teisingi vardai.

Vadinasi, teisingas tik atsakymas **A**.

[1]Konkurso metu uždavinio sąlygoje trečiasis vardas buvo parašytas kaip „Alė Lora Klėja“. Ši korektūros klaida uždavinio atsakymo nekeičia.

!! Įdomu, kad uždavinį galima išspręsti ir be pasirenkamųjų atsakymų. Žinoma, taip jis tampa daug sunkesnis.

Taigi atspėkime sužadėtinės didvardį. Pirmas jo vardas negali būti Adelė. Iš tikrųjų, antras ir trečias vardai įmanomi tik tokie: Lilė Klėja, Lilė Kora, Laura Klėja, Laura Kora, ir įmanomi sužadėtinės didvardžiai būtų Adelė Lilė Klėja, Adelė Lilė Kora, Adelė Laura Klėja ir Adelė Laura Kora. Bet pirmas jų netinka, nes pirmame klausimo didvardyje būtų du teisingi vardai Adelė ir Lilė; antras netinka, nes antrame klausimo didvardyje būtų du teisingi vardai Adelė ir Kora; trečias netinka, nes pirmame klausimo didvardyje būtų du teisingi vardai Adelė ir Klėja; ketvirtas netinka, nes antrame klausimo didvardyje būtų visi trys teisingi vardai.

Taigi pirmas sužadėtinės vardas Alė. Dabar vėl įmanomi antro ir trečio vardo variantai yra Lilė Klėja, Lilė Kora, Laura Klėja ir Laura ir Kora, o įmanomi 4 sužadėtinės didvardžiai Alė Lilė Klėja, Alė Lilė Kora, Alė Laura Klėja ir Alė Laura Kora. Bet pirmu atveju teisingi būtų du vardai pirmajame klausimo didvardyje; trečiu atveju teisingi būtų visi trys vardai trečiajame klausimo didvardyje; ketvirtu atveju teisingi du vardai antrajame klausimo didvardyje. Taigi lieka tik antras atvejis – sužadėtinės vardas Alė Lilė Kora.

Čia taip pat reikia patikrinimo (o gal uždavinio sąlyga neteisinga, ir joks vardas netinka!), bet tą patikrinimą jau atlikome **?** sprendime.

10. (C) 6

! Pasvarstykime, kokia gali būti dviejų priešingų sienų skaičių suma. Visų 6 skaičių suma ne didesnė už $9+8+7+6+5+4 = 9+4+8+5+7+6 = 3\cdot 13$, taigi dviejų „priešingų“ skaičių suma (ji triskart mažesnė) ne didesnė už $3\cdot 13 : 3 = 13$.

Kita vertus, dviejų priešingų skaičių suma ne mažesnė kaip $8+1 = 9$ (nes 8 tikrai pasirinktas, jį matome paveikslėlyje). Bet 9 ta suma būti negali – tada prieš 4 būtų 5, o penketą matome greta. Negali ji būti ir 10 – tada prieš penketą būtų $10-5 = 5$, taip pat penketas, o skaičiai kartotis negali. Taigi jau žinome, kad sumos galėtų būti lygios tik 11, 12 arba 13.

Bet ir vėl – suma negali būti 13, nes tada prieš 8 būtų 5, o penketą matome greta aštuoneto. Suma negali būti 12, nes tada prieš 8 būtų 4, o ketvertą matome greta aštuoneto. Taigi suma galėtų būti tik 11, tada prieš 5 stovėtų $11-5 = 6$. Dar reikia įsitikinti, kad ir su kitais skaičiais būtų viskas gerai: prieš 8 stovėtų $11-8 = 3$, prieš 4 stovėtų $11-4 = 7$. Tai visiškai įmanoma – pasirinktieji 6 skaičiai yra 3, 4, 5, 6, 7, 8, o poromis priešingose sienose jie surašyti taip: 3 ir 8, 4 ir 7, 5 ir 6.

11. (D) 942

? Šimtų skaitmenį K dėmenyje KAN imame kuo didesnį, t. y. 9. Gavome reiškinį $9\mathrm{AN} + \mathrm{GA} - \mathrm{ROO}$. Atėminį imame kuo mažesnį, t.y. $\mathrm{R} = 1, \mathrm{O} = 2$, ir tų vieneto ir dvejeto tikrai neprireiks, nes turinyje skaitmenis imame kuo didesnius, t. y. raides A, N, G keisime (kuria nors tvarka) skaitmenimis 8, 7, 6. Taigi turime

$$9\mathrm{AN} + \mathrm{GA} - 122 = 900 + \mathrm{AN} + \mathrm{GA} - 122 = 778 + \mathrm{AN} + \mathrm{GA}.$$

Dešimčių $\mathrm{A} + \mathrm{G}$ sumoje $\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ imame kuo daugiau, t. y. $8+7$ arba $7+8$. Pirmu atveju $\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ virsta $8\mathrm{N} + 78$, o antru atveju $7\mathrm{N} + 87$, taigi pirmas skaičius vienetu didesnis. Jame N imame didžiausią galimą, t. y. 6, ir $\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ virto $86 + 78 = 164$.

Vadinasi, didžiausia $\mathrm{KAN} - \mathrm{ROO} + \mathrm{GA}$ reikšmė yra $778 + 164 = 942$.

! Sprendime **?** yra keletas silpnų vietų. Pavyzdžiui, kodėl K reikia imti kuo didesnį? Iš tikrųjų viskas priklauso nuo situacijos: sakysime, $9\mathrm{DE} + \mathrm{MP}$ visai nebūtinai daugiau už $8\mathrm{ST} + \mathrm{VZ}$. Užrašą $\mathrm{KAN} - \mathrm{ROO} + \mathrm{GA}$ ne visada galima keisti užrašu $\mathrm{KAN} + \mathrm{GA} - \mathrm{ROO}$: pavyzdžiui, užrašas $298 - 311 + 49$ neturi prasmės (bent jau kol nesame susipažinę su neigiamais skaičiais, atimti 311 iš 298 neįmanoma), o užrašas $289 + 49 - 311$ prasmę turi, – tai lygu $347 - 311$, t. y. 36. Bet kadangi mes nagrinėsime tik skaičius KAN, didesnius už ROO, tai ir pakeisti užrašą į $\mathrm{KAN} + \mathrm{GA} - \mathrm{ROO}$ galima. Negana to, pakeiskime jį į $\mathrm{KAN} + \mathrm{GA} - \mathrm{RUU}$, – labai jau nemalonu, kad raidė O panaši į nulį (žinoma, anglų kalboje žodis KANGAROO reiškia kengūrą, o žodžio KANGARUU nėra, bet matematikoje ir toks „žodis“ visiškai geras). Toliau O reikš tik nulį.

Taigi pabandykime būti tikslesni (ar net pedantiškesni), ir surašykime sprendimą išsamiau. Sakykime, jog mes jau sugebėjome užraše $\mathrm{KAN} + \mathrm{GA} - \mathrm{RUU}$ taip pakeisti raides skaičiais, kad gautas didžiausias įmanomas rezultatas (beje, niekas mums nesakė, kad yra tik vienas būdas tą padaryti, bet mes tada galime turėti galvoje bet kurį užrašą, duodantį didžiausią rezultatą). Tada $\mathrm{K} = 9$; iš tikrųjų, jei būtų $\mathrm{K} \leqslant 8$, tai net $899 + 99 - 122 < 900$, o didžiausias rezultatas tikrai didesnis už 900: pavyzdžiui, $987 + 68 - 122 > 900$. Toliau, aišku, kad $\mathrm{R} = 1$: jei mūsų užraše nė viena kita raidė nėra 1, tai pakeitę skaitmenį R vienetu sumažintume atėminį, ir skirtumas padidėtų, o tai neįmanoma – juk mūsų rezultatas didžiausias; jei turinyje $9\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ kuri nors raidė yra 1, tai sukeitę ją su R padidintume turinį ir sumažintume atėminį, taigi rezultatas padidėtų, – prieštara; jeigu raidė U atėminyje RUU būtų 1, tai sukeitus R ir U atėminys sumažėtų, o rezultatas vėl padidėtų, – prieštara.

Taigi turime $9\mathrm{AN} + \mathrm{GA} - 1\mathrm{UU}$. Aišku, kad $\mathrm{U} = 2$. Iš tikrųjų, jeigu U didesnis už 2, tai vėl nagrinėjame du atvejus: kai skaitmuo 2 nepanaudotas, keičiame U į 2, ir atėminys sumažės; jeigu skaitmuo 2 yra kuri nors turinio $9\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ raidė, tai ją sukeičiame su U, tada turinys padidės, atėminys sumažės, rezultatas padidės, – prieštara.

Taigi mūsų užrašas jau virto $9\mathrm{AN} + \mathrm{GA} - 122$. Jį galima perrašyti taip: $900 + \mathrm{AN} + \mathrm{GA} - 122 = 778 + \mathrm{AN} + \mathrm{GA}$, ir viskas priklauso nuo $\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$. Užrašius $\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ kaip $\mathrm{A}0 + N + G0 + A$ aišku, kad dešimčių skaičių $\mathrm{A} + \mathrm{G}$ reikia imti kuo didesnį, būtent $8 + 7 = 15$. Iš tikrųjų, jeigu $\mathrm{A} + \mathrm{G} \leqslant 14$, tai $\mathrm{A}0 + N + G0 + A \leqslant 140 + \mathrm{N} + \mathrm{A} < 140 + 10 + 10 = 160$, o pavyzdžiui $80 + 6 + 70 + 8 > 160$.

Taigi $\mathrm{A} + \mathrm{G} = 15$, ir yra dvi galimybės: $\mathrm{A} = 8, \mathrm{G} = 7$ ir $\mathrm{A} = 7, \mathrm{G} = 8$. Pirmu atveju $\mathrm{AN} + \mathrm{GA} = 8\mathrm{N} + 78$, antru atveju $7\mathrm{N} + 87$. Matome, kad pirmas skaičius vienetu didesnis: $80 + \mathrm{N} + 78 - (70 + \mathrm{N} + 87) = 70 - 9 = 1$. Taigi $\mathrm{A} = 8, \mathrm{G} = 7$.

Mūsų suma $\mathrm{AN} + \mathrm{GA}$ virto $8\mathrm{N} + 78$, ir aišku, kad N reikia imti didžiausią įmanomą, $\mathrm{N} = 6$. Vadinasi, $\mathrm{AN} + \mathrm{GA} = 86 + 78 = 164$, o didžiausias rezultatas $\mathrm{KAN} + \mathrm{GA} - \mathrm{RUU} = 778 + 164 = 942$.

Be kita ko, nustatėme, kad didžiausias rezultatas pasiekiamas vieninteliu būdu, imant $\mathrm{K} = 9, \mathrm{A} = 8, \mathrm{N} = 6, \mathrm{G} = 7, \mathrm{R} = 1, \mathrm{U} = 2$.

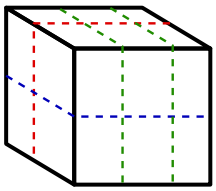
12. (D) Aš sakau tiesą

! Pagal uždavinio sąlygą elfas ir trolis pasakė tą patį sakinį, kurį sakydamas elfas sakė tiesą, o trolis – melavo. Jei elfas būtų pasakęs sakinį **A** arba **B**, tai tokiu būdu jis būtų pasakęs, kad trolis sako tiesą, taigi šis sakinys būtų melas, o juk elfas nemeluoja. Taip pat elfas negalėjo pasakyti ir sakinio **C**. Elfas galėtų būti teisus sakydamas sakinį **D** arba **E**.

Kita vertus, trolis negalėtų pasakyti sakinio **E**, nes šis sakinys yra teisingas. Užtat jis gali pasakyti sakinį **D**. Renkamės atsakymą **D**.

13. (B) 4

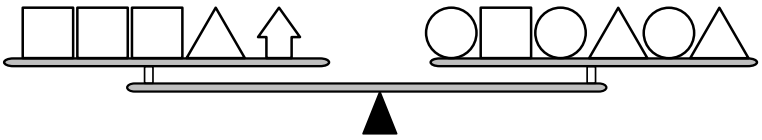
? Du kartus perpjovęs luitą, Marius gali padalinti jį į 4 gabalus (raudona ir mėlyna punktyrinės linijos paveikslėlyje). Tuomet dar dviem pjūviais Marius gali visus 4 gabalus kaip duoną „suraikyti“ į 3 dalis (žalios linijos) ir iš viso gauti $4 \cdot 3 = 12$ dalių. Taigi jam iš viso teprireiks $2 + 2 = 4$ pjovimų.



! Iki pilno sprendimo tetrūksta įrodyti, kad mažesnio pjūvių skaičiaus Mariui neužteks. Vienu pjūviu Marius geriausiu atveju gali padalinti kiekvieną jau turimą dalį į dvi. Taigi po trijų pjūvių jis turės ne daugiau kaip $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ dalis ir jam prireiks dar bent vieno pjūvio. Teisingas atsakymas – **B**.

14. (C) △○○○

! Kadangi pirmosios dvejos svarstyklės yra pusiausviros, tai pusiausviros bus ir svarstyklės, jei ant pirmųjų svarstyklių kairės lėkštelės pridėsime antrųjų svarstyklių dešinės pusės figūras, o ant dešiniosios lėkštelės – antrųjų svarstyklių kairės pusės figūras. Tada svarstyklės atrodys taip:



Nuo abiejų svarstyklės lėkščių nuimkime po kvadratą ir trikampį, – pusiausvyra išliks. Kairėje pusėje liks du kvadratai ir viena „rodyklė“ – rinkinys, kuris yra ir uždavinio sąlygoje pavaizduotų trečiųjų svarstyklių kairėje pusėje. Tuo tarpu dešinėje pusėje liks 3 skrituliai ir vienas trikampis. Šis rinkinys nurodytas atsakyme **C**.

Kadangi *Kengūros* konkurso taisyklės užtikrina, kad tik vienas atsakymas yra teisingas, jį jau galėtume ir rinktis. Visgi įsitikinkime, kad kiti rinkiniai tinka ne visada. Parinkime figūroms kokius nors svorius, kad jie atitiktų uždavinio sąlygą, pavyzdžiui: △$= 1$, □ $= 2$, ○ $= 4$ ir ⇧ $= 9$. Tada ant pirmųjų svarstyklių lėkščių uždėta $1 + 9 = 10 = 4 + 2 + 4$, ant antrųjų $1 + 4 + 1 = 6 = 2 + 2 + 2$, o ant trečiųjų kairės lėkštės $2 + 2 + 9 = 13$. Rinkinio **A** svoris $1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$, rinkinio **B**: $1 + 1 + 1 + 4 = 7$, rinkinio **C**: $1 + 4 + 4 + 4 = 13$, rinkinio **D**: $1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$, rinkinio **E**: $4 + 4 + 2 = 10$. Taigi rinkiniai **A**, **B**, **D** ir **E** šiuo atveju klaustuko vietoje netinka. Teisingas atsakymas **C**.

15. (D) Rožinio gvazdiko

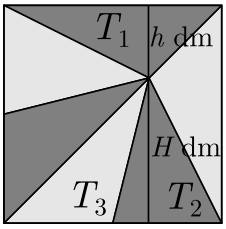
! Keturios rožės buvo visų keturių galimų spalvų: raudonos, baltos, rožinės ir geltonos. Tai reiškia, kad vienintelė geltona gėlė ir buvo rožė. Kadangi nebuvo geltonos tulpės, 3 tulpės turėjo būti visų dar likusių trijų spalvų: raudonos, baltos ir rožinės. Taigi dvi rožinės gėlės buvo rožė ir tulpė. Tuomet 2 gvazdikams lieka dvi spalvos: raudona ir balta, ir 3 baltos gėlės yra rožė, tulpė ir gvazdikas. Taigi lelijai lieka paskutinė „laisva“ spalva – raudona.

Peržiūrėję atsakymų variantus matome, kad puokštėje nebuvo rožinio gvazdiko. Teisingas atsakymas – **D**.

16. (B) 3

! Viktorija lygiosiomis baigė $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ partijų. Kadangi lygiosiomis ji baigė 2 partijas, tai iš viso ji jau žaidė $2 \cdot 6 = 12$ partijų, o jai dar liko žaisti $15 - 12 = 3$ partijas. Renkamės atsakymą **B**.

17. (D) 6 dm



! Kvadratinio lango kraštinės ilgis yra $a = \sqrt{81} = 9$ (dm). Nagrinėkime vertikalią tiesę, einančią per tašką, kuriame tupi musė. Ji statmena dviem kvadrato kraštinėms, ir jai priklauso vitražo trikampių T_1, T_2, T_3 aukštinės (žr. pav.). Tų aukštinių ilgius decimetrais pažymėkime H ir h, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada $H + h = a$. Reikia rasti H.

Trikampiai T_2 ir T_3 sudaro didesnį trikampį, kurio plotas $\frac{a \cdot H}{2}$ dm^2 yra dvigubai didesnis už T_1 plotą $\frac{a \cdot h}{2}$ dm^2. Todėl

$$H = 2h, \qquad a = H + h = H + \frac{H}{2} = \frac{3H}{2}, \qquad H = \frac{2a}{3} = 6 \text{ (dm)}.$$

Šį sprendimą galima pakeisti, nagrinėjant tik T_1 ir remiantis tuo, kad šio trikampio plotas $\frac{a \cdot h}{2}$ dm^2 yra lygus šeštadaliui kvadrato ploto a^2 dm^2. Tada $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{6}$, $h = \frac{a}{3} = 3$ ir $H = a - h = 6$ (dm).

18. Ⓑ 1

! Kadangi Agota iš viso surinko 5 balus, o I ir II teisėjai jai skyrė atitinkamai 0 ir 2 balus, tai III teisėjas jai skyrė 3 balus (žr. pav.).

	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0			4
II	4	2	0		3
III	1	3			4
	7	5	3	4	11

Gerda iš viso surinko 11 balų, todėl trys teisėjai jai skyrė balus 4, 4 ir 3. Kadangi III teisėjas, vertindamas dalyvius, skaičius 0, 1, 2, 3, 4 užrašė po vieną kartą ir Agotai šis teisėjas skyrė 3 balus, tai III teisėjas Gerdai skyrė 4 balus. Vadinasi, Gerdai 3 balus skyrė I arba II teisėjas. Jei I teisėjas Gerdai būtų skyręs 3 balus, tai 4 balus jis būtų skyręs Elenai arba Evelinai. Tačiau Elena iš viso surinko 3 balus, todėl I teisėjas neskyrė jai 4 balų. Jei I teisėjas 4 balus būtų skyręs Evelinai, tai II teisėjas jai būtų skyręs 0 balų, nes ji iš viso surinko 4 balus. Tačiau tokiu atveju II teisėjas Elenai ir Evelinai būtų skyręs po 0 balų, o taip būti negalėjo. Vadinasi, I teisėjas Gerdai skyrė 4 balus. Todėl II teisėjas Gerdai skyrė 3 balus (žr. pav. viršuje).

II teisėjas 4 balus skyrė Adomui arba Evelinai. Jei šis teisėjas 4 balus būtų skyręs Evelinai, tai I teisėjas jai būtų skyręs 0 balų. Tačiau taip negalėjo būti, nes tokiu atveju I teisėjas Agotai ir Evelinai būtų skyręs po 0 balų. Vadinasi, II teisėjas 4 balus skyrė Adomui. Kadangi Adomas iš viso surinko 7 balus, tai III teisėjas jam skyrė $7 - 2 - 4 = 1$ balą.

Vadinasi, jau galima rinktis atsakymą **B**. Bet ne pro šalį įsitikinti, kad lentelę galima užpildyti pagal sąlygą. II teisėjas Evelinai skyrė 1 balą (kiti jo įvertinimai jau panaudoti). I teisėjas Evelinai gali skirti 3 balus. Tada III teisėjas Evelinai skiria $4 - 3 - 1 = 0$, Elenai lieka 2, o I teisėjas Elenai skiria $3 - 2 - 0 = 1$:

	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
	7	5	3	4	11

Ši lentelė tenkina visas uždavinio sąlygas, taigi uždavinys visiškai išspręstas.

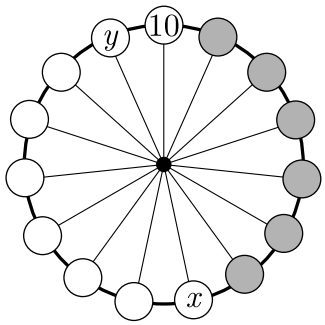
Bet I teisėjas gali skirti Evelinai ir 1 balą. Tada III teisėjas jai skiria $4 - 1 - 1 = 2$ balus, jam tenka Elenai skirti 0 balų, o I teisėjas Elenai skiria $3 - 0 - 0 = 3$ balus:

	Adomas	Agota	Elena	Evelina	Gerda
I	2	0	3	1	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	0	2	4
	7	5	3	4	11

Ši lentelė taip pat tenkina uždavinio sąlygą.

Teisingas atsakymas **B**.

19. (A) 0



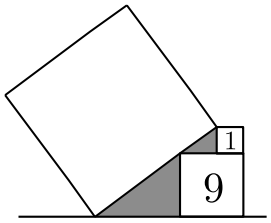
! Šis uždavinys buvo sunkus konkurso dalyviams: teisingas atsakymas nebuvo populiarus. Spėliojant galima dėlioti rate konkrečius skaičius ir mėginti gauti visų skaičių sumą, lygią 75, 216, 365 arba 2020. Bet tai nepavyks. Yra viena triviali galimybė: kai visi rato skaičiai lygūs 10. Tada uždavinio sąlyga tenkinama, tačiau visų skaičių suma lygi $10 \cdot 15 = 150$. Tai nėra vienas iš 4 skaičių, kuriuos reikia gauti. Užuot spėlioję, pamėginkime kuo daugiau sužinoti apie skaičių ratą, pasitelkę logiką.

Pastebėkime, kad be žinomo skaičiaus 10 galime vienareikšmiškai nustatyti ir kitus užrašytus skaičius. Du iš jų pažymėkime x ir y, kaip parodyta paveikslėlyje. Šešių skaičių, esančių tarp skaičių 10 ir x pilkuose skrituliuose, sumą pažymėkime s. Tada septynių skaičių suma $10 + s$ yra lygi septynių skaičių sumai $s + x$. Vadinasi, $x = 10$.

Samprotaujant analogiškai, galima pasirinkti bet kuriuos du skritulius, kuriuos skiria lygiai šeši skrituliai, ir įrodyti, kad juose įrašyti skaičiai lygūs. Taigi $y = x$. Gavome, kad gretimi skaičiai y ir 10 lygūs. Vėlgi, analogiškai samprotaujant, galima įrodyti, kad bet kurie du gretimi rato skaičiai lygūs. Vadinasi, visi rato skaičiai lygūs. Jau minėjome, kad tokiu atveju visų skaičių suma lygi 150. Sumos reikšmių 75, 216, 365 ir 2020 gauti neįmanoma.

Įrodėme, kad visi rato skaičiai lygūs. Įdomu, kad šį teiginį galima apibendrinti: pakeitus uždavinio duomenis 15 (bendras skaičių kiekis) ir 7 (gretimų skaičių kiekis) bet kuriais dviem natūraliaisiais skaičiais m ir n, kur $n < m$, visi rato skaičiai vis tiek turėtų būti lygūs, jei tik m ir n būtų tarpusavyje pirminiai.

20. (B) 80

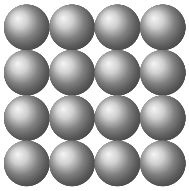


! Norėtųsi tikėtis, kad didžiojo kvadrato kraštinės ilgis yra sveikasis skaičius. Tada tiktų tik atsakymai **A**, **C** ir **E**. Galbūt todėl šiuos atsakymus pasirinko beveik pusė sprendusiųjų. Bet pamėginkime mąstyti griežtai.

Mažesniųjų kvadratų kraštinių ilgiai yra $\sqrt{1} = 1$ ir $\sqrt{9} = 3$. Nagrinėkime du pilkus stačiuosius trikampius (žr. pav.). Paveikslėlyje nesunku pastebėti, kad šie trikampiai panašūs. Tuo nesunku ir įsitikinti: trikampių atitinkami statiniai lygiagretūs, nes tokios yra atitinkamos mažesniųjų kvadratų kraštinės, o įžambinės apskritai yra vienoje tiesėje. Todėl pilkųjų trikampių atitinkami kampai lygūs, o trikampiai yra panašūs.

Pilkųjų trikampių vertikalių statinių ilgiai yra 1 ir 3, todėl panašumo koeficientas yra $3 : 1 = 3$. Mažesniojo trikampio kito statinio ilgis yra $3 - 1 = 2$, o įžambinės ilgis yra $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Vadinasi, didesniojo trikampio įžambinės ilgis yra $3\sqrt{5}$. Abi įžambinės sudaro didžiojo kvadrato kraštinę, todėl jos ilgis yra $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, o kvadrato plotas lygus $(4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 = 80$.

21. (D) 96

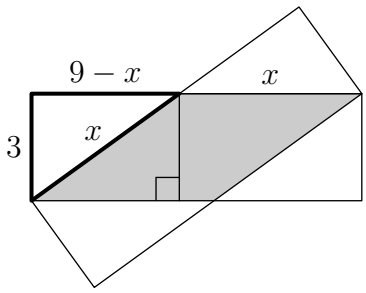


! Nagrinėkime piramidės pagrindą, sudarytą iš 4×4 rutulių (žr. pav.).

Pagrindo kiekvienoje rutulių eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra lygiai 3 lietimosi vietos. Vadinasi, piramidės pagrinde 4×4 yra $(4 + 4) \cdot 3 = 24$ lietimosi vietos. Panašiai gauname, kad piramidės sluoksnyje 3×3 yra $(3 + 3) \cdot 2 = 12$ lietimosi vietų, o sluoksnyje 2×2 yra $(2 + 2) \cdot 1 = 4$ lietimosi vietos. Be to, kiekvienas 3×3 sluoksnio rutulys liečiasi su lygiai keturiais piramidės pagrindo 4×4 rutuliais. Vadinasi, 3×3 sluoksnio rutuliai liečiasi su 4×4 sluoksnio rutuliais $9 \cdot 4 = 36$ taškuose. Panašiai gauname, kad 2×2 sluoksnio rutuliai liečiasi su 3×3 sluoksnio rutuliais $4 \cdot 4 = 16$ taškų. Lieka piramidės viršūnės rutulys, kuris su 2×2 sluoksnio rutuliais liečiasi 4 taškuose. Taigi, iš viso yra $24 + 12 + 4 + 36 + 16 + 4 = 96$ lietimosi vietos.

Teisingas atsakymas **D**.

22. (D) 15



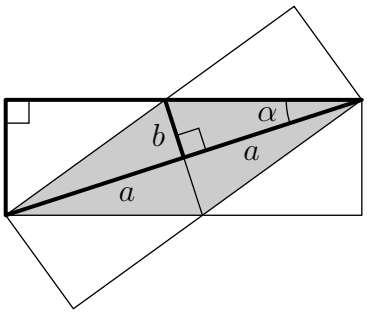
! Daug konkurso dalyvių rinkosi atsakymą **B**, greičiausiai spėdami, kad stačiakampių bendros dalies plotas sudaro pusę kiekvieno iš jų ploto 27. Tačiau reikėjo pastebėti kitokius dėsningumus.

Visų pirma, paveikslėlyje nesunku pastebėti, kad nuspalvinta figūra yra lygiagretainis ir net rombas. Panorėjus tai galima ir įrodyti, remiantis dviejų stačiakampių simetrija jų bendros įstrižainės atžvilgiu ir kiekvieno iš jų simetrija jų bendro centro atžvilgiu. Rombo kraštinę pažymėkime x. Jo plotas lygus $3x$, nes šio lygiagretainio aukštinė lygi trumpesnei vieno stačiakampio kraštinei. Liko rasti x.

Nagrinėkime paryškintą statųjį trikampį (žr. pav.). Jo statinių ir įžambinės ilgiai atitinkamai lygūs 3, $9-x$ ir x. Todėl

$$3^2+(9-x)^2=x^2, \qquad 9+81-18x+x^2=x^2, \qquad 18x=90, \qquad x=5.$$

Vadinasi, rombo plotas lygus $3\cdot 5=15$.



!! Kaip ir **!** dalyje, pastebėkime, kad dviejų stačiakampių bendra dalis yra rombas. Jo įstrižainės dalija jį į keturis lygius stačiuosius trikampius. Nubrėžkime tas įstrižaines, ilgesnės iš jų ilgį pažymėkime $2a$, trumpesnės – $2b$, ir nagrinėkime du paryškintus stačiuosius trikampius (žr. pav.). Kadangi tie trikampiai statieji ir turi bendrą smailųjį kampą α, tai jie panašūs. Šių trikampių atitinkamų statinių santykiai lygūs: $b:a=3:9$ ir $b=\frac{a}{3}$. Didesniajam paryškintam trikampiui galioja Pitagoro teorema: $4a^2=(2a)^2=3^2+9^2=90$. Vadinasi, ieškomas rombo plotas lygus

$$4\cdot\frac{ab}{2}=\frac{2a^2}{3}=\frac{4a^2}{6}=\frac{90}{6}=15.$$

23. (C) 404

! Skaičių 20202020202020202020 galima išreikšti taip:

$$\begin{aligned}&202\cdot 10^{17}+202\cdot 10^{13}+202\cdot 10^{9}+202\cdot 10^{5}+2020=\\ =&202\cdot 4\cdot 5^2\cdot 10^{15}+202\cdot 4\cdot 5^2\cdot 10^{11}+202\cdot 4\cdot 5^2\cdot 10^{7}+\\ +&202\cdot 4\cdot 5^2\cdot 10^{3}+2020=\\ =&808\cdot(5^2\cdot 10^{15}+5^2\cdot 10^{11}+5^2\cdot 10^{7}+5^2\cdot 10^{3})+2020.\end{aligned}$$

Taigi, skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana sutampa su skaičiaus 2020 dalybos iš 808 liekana. Kadangi $2020=2\cdot 808+404$, tai skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana lygi 404.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Nagrinėkime 202 kartus mažesnius skaičius. Skaičiaus ...10 dalybos iš 4 liekana lygi 2. Padidinkime viską 202 kartus: skaičiaus 20202020202020202020 dalybos iš 808 liekana lygi 404.

24. Ⓒ 5

! Pamėginkime gauti kuo mažesnį Untės miegančių galvų skaičių, eksperimentuodami ir konstruodami pavyzdį:

$$71 \Rightarrow 41 \Rightarrow 11 \Rightarrow 29 \Rightarrow 47 \Rightarrow 17 \Rightarrow 35 \Rightarrow 5.$$

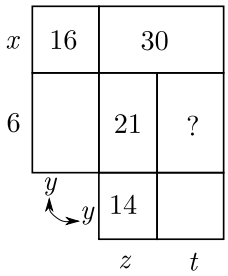
Jei bandysime pratęsti gautąją skaičių seką arba perkurti ją, tai mažiau nei 5 galvų niekaip negausime. Bet kaip galime būti tikri, kad nepraleidome kokios nors galimybės?

Čia gali padėti skaičių dalumo savybės. Kadangi skaičiai 30 ir 18 abu dalijasi iš 6 (tai yra jų didžiausias bendrasis daliklis), tai Untės miegančių galvų skaičius visą laiką keičiasi (nesvarbu ar didėja, ar mažėja) per skaičiaus 6 kartotinį. Todėl miegančių galvų skaičiaus dalybos iš 6 liekana niekada nesikeičia. Ta liekana lygi 5, nes $71 = 66 + 5 = 6 \cdot 11 + 5$. Mažiausias neneigiamas sveikasis skaičius, kuris dalijasi iš 6 su liekana 5, yra pats skaičius 5. Vadinasi, visada miega mažiausiai penkios Untės galvos.

Kartu įrodėme, kad negali likti 1, 3 ar 7 miegančios Untės galvos. Tačiau **E)** $11 = 5 + 6$ miegančių galvų įmanoma gauti. Nenuostabu, kad šis atsakymas tarp konkurso dalyvių buvo antras populiariausias.

25. Ⓑ 24

! Didžiojo stačiakampio gretasienio išklotinėje pažymėkime atkarpų ilgius x, y, z, t (žr. pav.). Tada



$$xy = 16, \qquad x(z+t) = 30, \qquad 6z = 21, \qquad yz = 14 \qquad 6t = ?.$$

Vieną po kito galime rasti nežinomuosius: $z = 21 : 6 = \frac{7}{2}$, $y = 14 : z = 4$, $x = 16 : y = 4$, $t = 30 : x - z = 4$, $? = 6t = 24$. Sprendimą galima užrašyti ir kitaip:

$$6x = \frac{xy \cdot 6z}{yz} = \frac{16 \cdot 21}{14} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 7)}{2 \cdot 7} = (2 \cdot 3) \cdot 4, \qquad x = 4,$$

$$z + t = \frac{30}{x} = \frac{15}{2}, \qquad 6z + 6t = 6 \cdot \frac{15}{2} = 3 \cdot 15 = 45,$$

$$? = 6t = 45 - 6z = 45 - 21 = 24.$$

26. (C) 7

1	a	6	3
	2	2	8
	7		4
b	c	7	d

! Galima bandyti tiesiog užpildyti lentelę, bet tai nebūtina.

Tarkime, lentelė užpildyta, kad visų eilučių ir stulpelių skaičių sumos būtų lygios tam pačiam skaičiui s, o skaičiai a, b, c, d joje įrašyti, kaip parodyta paveikslėlyje. Atkreipkime dėmesį į skaičius viršutinėje eilutėje ir antrajame iš kairės stulpelyje:

$$s = 1 + a + 6 + 3 = a + 2 + 7 + c, \qquad 1 + 6 + 3 = 2 + 7 + c, \qquad c = 1.$$

Dabar liko analogiškai pasinaudoti apatine eilute ir dešiniuoju stulpeliu:

$$b + c + 7 = 3 + 8 + 4, \qquad b = 7.$$

Taigi norint rasti b, pakanka užpildyti tik dar vieną langelį.

Beje, lentelę galima užpildyti be galo daug būdų. Skaičius d gali būti bet koks, o jį pasirinkus lentelė užpildoma vienareikšmiškai:

1	d+5	6	3
d+3	2	2	8
4	7	d	4
7	1	7	d

27. (D) 13

! Pakaktų atspėti skaičių aštuonetą, tenkinantį sąlygą. Bet kaip tokį gauti? Bandykime analizuoti situaciją.

Turime aštuonių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių seką. Jei jų pirmieji du skaitmenys keistųsi, tai sekos vietoje, kur tie skaitmenys pakinta, būtų gretimi skaičiai, kurių vienas baigiasi devynetu, o tolimesnis – nuliu. Tokiu atveju tas tolimesnis skaičius turėtų dalytis iš 0. Vadinasi, visi aštuoni skaičiai prasideda tuo pačiu dviženkliu skaičiumi N. Tai skaičiai $\overline{N1}$, $\overline{N2}$, …, $\overline{N8}$ arba skaičiai $\overline{N2}$, $\overline{N3}$, …, $\overline{N9}$.

Bet kuriuo iš dviejų atvejų skaičius $\overline{N2} = 10N + 2$ dalijasi iš 2, $\overline{N3} = 10N + 3$ dalijasi iš 3, …, $\overline{N8} = 10N + 8$ dalijasi iš 8. Vadinasi, $10N$ dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Kadangi $10 = 2 \cdot 5$, tai dalumas iš 2 ir 5 nieko nepasako apie N. Jei $10N$ dalijasi iš 8 ir 3, tai dalijasi ir iš 4, ir iš 6. Taigi daliklių sąrašą galime sutrumpinti: $10N$ turi dalytis iš 3, 7 ir 8. Skaičius 10 nesidalija iš pirminių 3 ir 7, todėl iš jų turi dalytis pats N. Taip pat jei $10N : 8 = 5N : 4$ yra sveikasis skaičius, tai N dalijasi iš 4. Skaičiai 3, 4 ir 7 yra poromis tarpusavyje pirminiai, todėl N dalijasi ne tik iš kiekvieno iš jų, bet ir iš jų sandaugos 84. Tačiau vienintelis dviženklis skaičiaus 84 kartotinis yra 84. Taigi vienintelė galimybė yra $N = 84$. Kadangi 849 iš 9 nesidalija, tai aštuoni skaičiai yra 841, 842, …, 848 – jie iš tiesų tenkina uždavinio sąlygą.

Gauname atsakymą $8 + 4 + 1 = 13$.

28. (E) 6

? Tarkime, kad vakare buvo likę $m = 16 - n$ ledų rūšių.

Ryte Auksė turėjo $C_{16}^2 = \frac{16\cdot 15}{2} = 8 \cdot 15$ būdų pasirinkti (derinių skaičius), o vakare – $C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ būdų. Vadinasi,

$$m(m-1)(m-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 15 = 48 \cdot 15.$$

Tikrinkime atsakymus. Jei $n = 2, 3, 4, 5$, tai vienas iš skaičių m, $m-1$ ir $m-2$ lygus 13 arba 11, o $48 \cdot 15$ nei iš 11, nei iš 13 nesidalija. Todėl atsakymai **A**-**D** netinka.

Renkamės atsakymą **E**.

! Tarkime, kad vakare buvo likę $m = 16 - n$ ledų rūšių. Reikia rasti n. Dalyje **?** jau gavome lygybę

$$m(m-1)(m-2) = 48 \cdot 15.$$

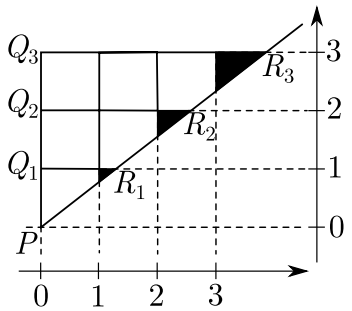
Akivaizdu, kad $m > 2$. Kintamojo $m > 2$ funkcija $m(m-1)(m-2)$ yra didėjanti, nes tokie yra teigiami dauginamieji m, $m-1$ ir $m-2$. Taigi reikšmę $48 \cdot 15$ ši funkcija įgyja tik su viena m reikšme – tereikia ją atspėti.

Nesunku įsitikinti, kad natūraliosios reikšmės $m < 7$ per mažos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 15 < 48 \cdot 15$. Reikšmės $m = 7, 8, 9$ netinka, nes tada $m(m-1)(m-2)$ dalijasi iš 7. Pagaliau kai $m = 10$ ir $n = 6$, tai

$$m(m-1)(m-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 8 = (2 \cdot 3 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 3) = 48 \cdot 15.$$

29. (E) Kitas atsakymas

! Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad kvadratiniai langeliai yra vienetiniai. Nagrinėkime trikampius PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3 (žr. pav.). Užtušuotus trikampius atitinkamai pažymėkime T_1, T_2, T_3.



Visų šešių stačiųjų trikampių PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3, T_1, T_2, T_3 atitinkamos kraštinės yra arba lygiagrečios, arba vienoje tiesėje. Todėl šių trikampių atitinkami kampai lygūs, ir visi šeši trikampiai yra panašūs.

Pažymėkime $Q_1R_1 = a$. Kadangi $PQ_1 : PQ_2 : PQ_3 = 1 : 2 : 3$, tai $Q_1R_1 : Q_2R_2 : Q_3R_3 = 1 : 2 : 3$ ir $Q_2R_2 = 2a$, $Q_3R_3 = 3a$. Tada statieji trikampiai T_1, T_2, T_3 atitinkamai turi statinius $Q_1R_1 - 1 = a - 1$, $Q_2R_2 - 2 = 2(a-1)$, $Q_3R_3 - 3 = 3(a-1)$. Vadinasi, panašiųjų trikampių T_1, T_2, T_3 tų statinių, o todėl ir kitų atitinkamų statinių santykis lygus

$$(a-1) : 2(a-1) : 3(a-1) = 1 : 2 : 3.$$

Tada šių trikampių plotų santykis lygus $1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9$.

30. (C)

! Devynias duotąsias figūras pažymėkime tokioje lentelėje:

Spalva\ Forma	Žvaigždė	Trikampis	Kvadratas	Šešiakampis	Skritulys
Balta					
Pilka					
Juoda					

Visus tolimesnius samprotavimus galima parašyti ir nesinaudojant lentele, bet pasinaudosime ja dėl patogumo. Ambraziejaus mėgstamiausią figūrą pažymėkime X.

Pradžioje Gervazas žino, kurioje eilutėje yra X, o Protazas – kuriame stulpelyje. Kadangi visose eilutėse yra bent po dvi figūras, tai Gervazas negali žinoti, kas yra X. Todėl jo frazė „Nežinau Ambraziejaus mėgstamiausios figūros“ nesuteikia papildomos informacijos nei mums, nei Protazui. Analogiškai Protazas pradžioje žino X tik tuo atveju, jei žino, kad X yra stulpelyje su vienintele figūra (šešiakampiu). Todėl Gervazo frazė „Žinau, kad ir tu nežinai“ reiškia, kad jis žino, jog X – ne šešiakampis. Taip negalėtų būti, jei Gervazas žinotų, kad figūra X balta – jis negalėtų atmesti šešiakampio, esančio toje eilutėje. Kita vertus, žinodamas, kad figūra pilka ar juoda, šešiakampį Gervazas galėtų atmesti: atitinkamų eilučių sankirta su šešiakampio stulpeliu tuščia. Taigi Gervazo frazė ekvivalenti informacijai, kad figūra X nėra balta (todėl ir ne šešiakampis). Šią informaciją sužinome mes ir Protazas.

Vadinasi, prieš prabildamas Protazas žino, kad figūra yra šioje lentelėje:

Spalva\ Forma	Žvaigždė	Trikampis	Kvadratas	Skritulys
Pilka				
Juoda				

ir žino, kuriame naujos lentelės stulpelyje yra X. Jei tas stulpelis būtų skritulio stulpelis, tai Protazas negalėtų ištarti „dabar jau žinau“, nes šiame stulpelyje yra dvi figūros. Kitų trijų stulpelių atveju Protazas figūrą X nustatytų vienareikšmiškai: jei žvaigždė, tai juoda; jei trikampis, tai pilkas; jei kvadratas, tai juodas. Taigi Protazo frazė pasako mums ir Gervazui, kad X nėra skritulys.

Prieš savo antrąjį pasisakymą Gervazas žino, kad figūra yra šioje lentelėje:

Spalva\ Forma	Žvaigždė	Trikampis	Kvadratas
Pilka			
Juoda			

ir žino, kurioje eilutėje yra X. Jei tai juodos spalvos eilutė, tai Gervazas dar negali nustatyti X: tai gali būti žvaigždė arba kvadratas. Tačiau Gervazas nustato X, todėl ta eilutė yra pilkos spalvos eilutė, o X yra pilkas trikampis.

Ekspertas

Nr.	Atsakymas
1	A
2	D
3	E
4	E
5	B
6	E
7	C
8	A
9	A
10	C
11	D
12	D
13	B
14	C
15	D
16	B
17	D
18	B
19	A
20	B
21	D
22	D
23	C
24	C
25	B
26	C
27	D
28	E
29	E
30	C