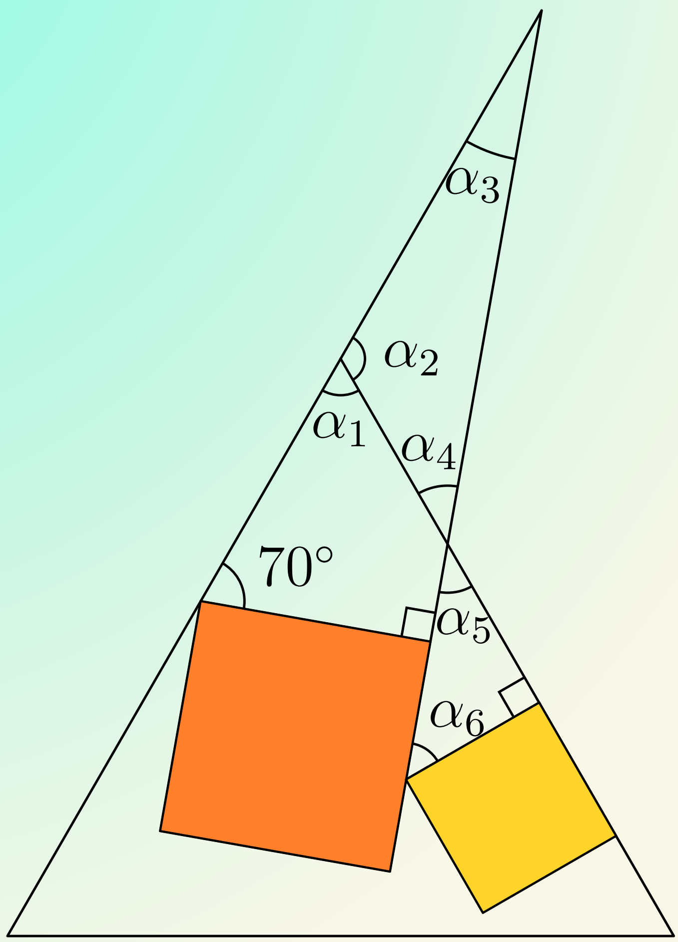
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Junioras



Užduotys ir sprendimai

2020

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2020. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 38700 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2020 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2020 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

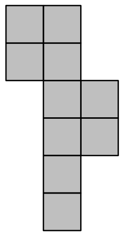
Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2020 m. *Junioro* užduočių sąlygos

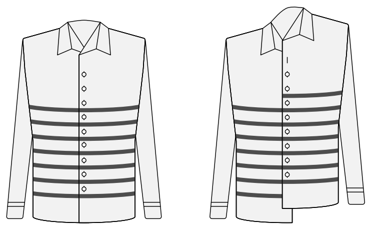
Klausimai po 3 taškus



1. Figūrą paveikslėlyje sudaro 10 vienetinių langelių. Koks yra jos perimetras?
A) 14 **B)** 18 **C)** 30 **D)** 32 **E)** 40

2. Kuris iš duotųjų penkių skaitinių reiškinių būtų vidurinis, išrikiavus juos reikšmių didėjimo tvarka?
A) $1 + 2345$ **B)** $12 + 345$ **C)** $123 + 45$ **D)** $1234 + 5$ **E)** 12345

3. Kas Onutei yra Onutės senelės dukters mama?
A) Sesuo **B)** Dukterėčia **C)** Mama **D)** Teta **E)** Senelė

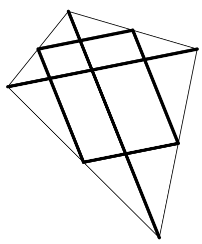


4. Kai Kazys užsagsto savo dryžuotus marškinius teisingai, jo liemenį juosia 7 uždari žiedai, kaip parodyta paveikslėlio kairėje. Šįryt Kazys blogai užsisegė marškinius, kaip parodyta paveikslėlio dešinėje. Kiek uždarų žiedų, juosiančių liemenį, dabar sudaro marškinių dryžiai?
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 7

5. Paveikslėlyje kiekviena raidė žymi skaitmenį. Vienodos raidės žymi tą patį skaitmenį. Kam lygi skaičių suma dešinėje?
A) 79 **B)** 158 **C)** 176 **D)** 194 **E)** 869

$$\begin{array}{r} AB \\ +\,CD \\ \hline 79 \end{array} \qquad \begin{array}{r} AD \\ +\,CD \\ AB \\ CB \\ \hline ? \end{array}$$

6. Keturių iš eilės einančių sveikųjų skaičių suma lygi 2. Koks yra mažiausias iš tų keturių skaičių?
A) -3 **B)** -2 **C)** -1 **D)** 0 **E)** 1



7. Kad pagamintų aitvarą, Aivaras supjaustė medinį strypą į 6 dalis. Dvi iš jų, kurių ilgiai 120 cm ir 80 cm, tapo aitvaro įstrižainėmis, o likusios keturios strypo dalys sujungė aitvaro kraštinių vidurio taškus (žr. pav.). Koks buvo medinio strypo ilgis?
A) 300 cm **B)** 370 cm **C)** 400 cm **D)** 410 cm **E)** 450 cm

8. Šiuos metus galima užrašyti dviem lygiais dviženkliais skaičiais: 2020. Tą patį galima pasakyti ir, pavyzdžiui, apie 1717-uosius metus. Po kiek mažiausiai metų vėl turėsime metus su šia savybe?
A) 20 **B)** 101 **C)** 120 **D)** 121 **E)** 202

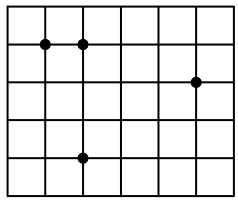
9. Vilija turėjo 10 popierėlių. Kai kurie popierėliai buvo kvadratiniai, o likusieji – trikampiai. Vilija tris kvadratus perkirpo į dvi dalis išilgai įstrižainės. Dabar Vilijos 13 popierėlių turi iš viso 42 viršūnes. Kiek trikampių popierėlių Vilija turėjo pradžioje?
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

10. Kiek kilogramų sveria vienas dramblys, jei P pelių sveria K kilogramų, o D dramblių sveria tiek pat, kiek M pelių?
A) $PKDM$ **B)** $\frac{PK}{DM}$ **C)** $\frac{KD}{PM}$ **D)** $\frac{KM}{PD}$ **E)** $\frac{PM}{KD}$

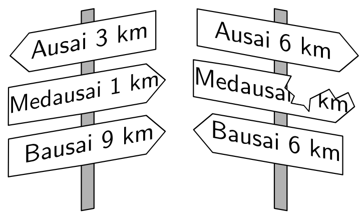
Klausimai po 4 taškus

11. Mažoji Onutė ruošiasi praleisti pas senelę kaime 18 dienų iš eilės. Senelė seka Onutei pasakas antradieniais, šeštadieniais ir sekmadieniais. Onutė nori klausytis senelės pasakų kuo daugiau dienų. Kurią savaitės dieną turėtų prasidėti Onutės apsilankymas pas senelę?
A) Pirmadienį **B)** Antradienį **C)** Penktadienį **D)** Šeštadienį **E)** Sekmadienį

12. Plokštuma padalyta į vienetinius langelius. Langelių viršūnėse pažymėti keturi taškai, kaip parodyta paveikslėlyje. Kokio mažiausio ploto trikampį galima gauti, sujungus tris iš tų taškų?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 2 **E)** $\frac{5}{2}$

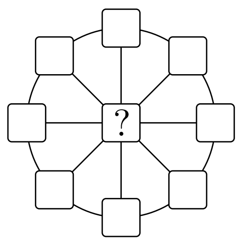


13. Trumpiausias kelias iš Ausų į Bausus eina per Medausus. Eidama iš Ausų tuo keliu, Austėja pamatė pakelės stulpą, pavaizduotą paveikslėlio kairėje, o vėliau – pakelės stulpą, pavaizduotą paveikslėlio dešinėje. Koks atstumas buvo užrašytas ant sulaužytos rodyklės?
A) 1 km **B)** 2 km **C)** 3 km **D)** 4 km **E)** 5 km



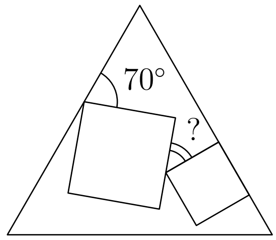
14. Lygiašonio trikampio vienos kraštinės ilgis yra 20, o kita kraštinė yra pustrečio karto ilgesnė už trečiąją. Koks yra to trikampio perimetras?
A) 36 **B)** 48 **C)** 60 **D)** 90 **E)** 120

15. Į paveikslėlio devynis langelius taip įrašyta po skaičių, kad kiekvieno skersmens trijų skaičių suma lygi 13, o aštuonių apskritimo skaičių suma lygi 40. Koks skaičius įrašytas viduriniame langelyje?
A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12



16. Skaičius 2020 pasižymi tokia savybe: tarp jo antrojo ir trečiojo skaitmenų įterpus daugybos ženklą, sandaugos reikšmė yra sveikojo skaičiaus kvadratas ($20 \cdot 20 = 20^2$). Kiek natūraliųjų skaičių nuo 2010 iki 2099 (įskaitant 2020) pasižymi šia savybe?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

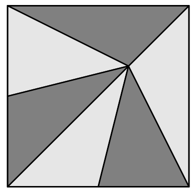
17. Du kvadratai taip įbrėžti į lygiakraštį trikampį, kaip parodyta paveikslėlyje. Kam lygus klaustuku pažymėtas kampas?
A) 25° **B)** 30° **C)** 35° **D)** 45° **E)** 50°



18. Sveikieji skaičiai a, b, c, d tenkina lygybę $ab = 2cd$. Kuri iš pateiktųjų reikšmių **negali** būti lygi $abcd$?
A) 50 **B)** 100 **C)** 200 **D)** 450 **E)** 800

19. Kokia yra skaičiaus $9x + 27y$ reikšmė, jei $17x + 51y = 102$?
A) 54 **B)** 36 **C)** 34 **D)** 18 **E)** Nustatyti neįmanoma

20. Kvadratinis langas, kurio plotas lygus 81 dm^2, įstiklintas šešių lygiapločių trikampių vitražu (žr. pav.). Bendroje trikampių viršūnėje tupi musė. Kokiame aukštyje nuo lango apačios ji tupi?
A) 3 dm **B)** 5 dm **C)** 5,5 dm **D)** 6 dm **E)** 7,5 dm



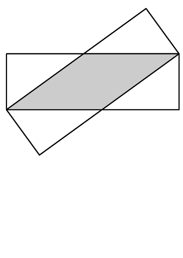
Klausimai po 5 taškus

21. Visi skaitmenys nuo 1 iki 9 atsitiktine tvarka surašomi vienas po kito. Kokia tikimybė, kad gautasis devynženklis skaičius dalijasi iš 18?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{5}{9}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

22. Vėžlys Ezopas ir zuikis Puikis lenktyniauja, kuris greičiau nubėgs 5 km tiesią distanciją. Davus startą, Ezopas ėmė bėgti teisinga kryptimi, o Puikis – 5 kartus greičiau, bet kryptimi, statmena teisingajai. Vos pastebėjęs klaidą, Puikis ėmė bėgti tiesiai link finišo ir pasiekė jį vienu metu su Ezopu. Kokį atstumą Puikis bėgo tiesiai link finišo?
A) 11 km **B)** 12 km **C)** 13 km **D)** 14 km **E)** 15 km

23. Lentoje nupieštos kelios figūros. Kiekviena iš jų yra: jei ne trikampis, tai kvadratas; jei ne žalia, tai raudona; jei ne didelė, tai maža; jei didelė, tai kvadratas; jei žalia, tai trikampis. Kuris teiginys yra neabejotinai teisingas?
A) Visos raudonos figūros yra kvadratai **B)** Visi kvadratai dideli
C) Visos mažos figūros yra žalios **D)** Visi trikampiai žali
E) Visos žalios figūros yra mažos

24. Du lygūs stačiakampiai 9×3 kertasi, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra stačiakampių bendros dalies plotas?
A) 12 **B)** $13\frac{1}{2}$ **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16



25. Untė yra 71-galvis slibinas. Kartą užmigo visos Untės galvos. Bet kuriuo metu gali pabusti bet kurios lygiai 30 iš tuo metu miegančių Untės galvų. Bet kuriuo metu gali užmigti bet kurios lygiai 18 iš tuo metu nemiegančių Untės galvų. Kiek mažiausiai Untės galvų gali vienu metu miegoti po kurio laiko?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

26. Trys medinio kubo sienos nudažytos juodai, o tada kubas supjaustytas į 64 vienodus kubelius. Kiek daugiausiai kubelių gali turėti lygiai vieną nudažytą sieną?

A) 27 **B)** 28 **C)** 32 **D)** 34 **E)** 40

27. Į 4×4 lentelės langelius reikia įrašyti po skaičių, kad keturių skaičių suma kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų tokia pati. Keli skaičiai jau įrašyti (žr. pav.). Kokį skaičių reikia įrašyti pilkajame langelyje?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

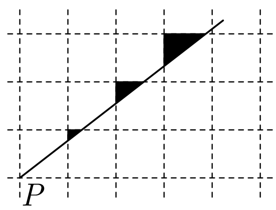
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

28. Agnė, Ignė ir Ugnė varžosi rankų lenkime. Kiekvienas rankų lenkimas yra dviejų merginų kova iki pergalės, kol likusi mergina ilsisi. Pasibaigus dvikovai, jos nugalėtoja toliau žaidžia su varžove, kuri ką tik ilsėjosi. Agnė sudalyvavo 10 dvikovų, Ignė – 15, o Ugnė – 17. Kas yra antrosios dvikovos pralaimėtoja?

A) Agnė **B)** Ignė **C)** Ugnė **D)** Ja galėjo būti ir Agnė, ir Ignė

E) Ja galėjo būti ir Ignė, ir Ugnė

29. Plokštuma padalyta į kvadratinius langelius. Tiesė, nubrėžta per langelio viršūnę P, ir langelių kraštinės riboja tris užtušuotus trikampius, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra šių trikampių plotų santykis?



A) $1 : 2 : 3$ **B)** $1 : 2 : 4$ **C)** $1 : 3 : 9$ **D)** $1 : 4 : 8$ **E)** Kitas atsakymas

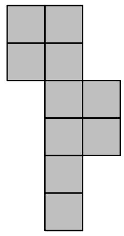
30. Lentoje užrašyti 8 iš eilės einantys triženkliai natūralieji skaičiai. Kiekvienas iš jų dalijasi iš savo paskutinio skaitmens. Kokia yra mažiausio užrašyto skaičiaus skaitmenų suma?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

Junioro užduočių sprendimai

1. (B) 18

! Figūros kraštą sudaro langelių kraštinės, kurių ilgiai lygūs 1. Todėl tereikia suskaičiuoti, kiek tokių kraštinių yra. Tai galima padaryti akimis apeinant kraštą arba, pavyzdžiui, mąstant taip: figūra telpa šešiose eilutėse ir trijuose stulpeliuose, iš kairės ir dešinės ją riboja po šešias langelių kraštines, o iš viršaus ir apačios – po tris; iš viso gauname $6+6+3+3=18$ langelių kraštines.



Antras populiariausias atsakymas buvo **E)** 40. Jį pasirinkę dalyviai greičiausiai rado ne figūros, o visų langelių suminį perimetrą $4 \cdot 10$.

2. (D) $1234+5$

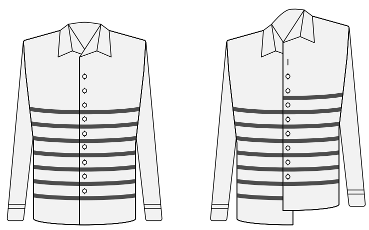
! Net tiksliai neskaičiuojant duotųjų reiškinių reikšmių, nesunku pastebėti, kad atsakymų **B** ir **C** reikšmės triženklės ir todėl mažesnės už atsakymų **A** ir **D** keturženkles reikšmes, o atsakymo **E** reikšmė penkiaženklė, didžiausia. Todėl vidurinė pagal didumą iš penkių reikšmių yra mažesnysis iš skaičių **A)** 2346 ir **D)** 1239.

3. (E) Senelė

! Jei moteris turi dukterį, tai tos dukters mama ir yra pati moteris. Todėl Onutės senelės dukters mama yra Onutės senelė.

4. (A) 0

! Daug konkurso dalyvių rinkosi atsakymą **D**, greičiausiai tiesiogiai remdamiesi paveikslėliu. Bet pastebėkime, kad marškinių raštą sudaro 7 dryžiai. Blogai užsagsčius marškinius, pirmojo nuo apačios dryžio vienas galas liko laisvas, o kitas sutapo su antrojo dryžio vienu galu. Antrojo dryžio kitas galas sutapo su vienu trečiojo galu, ir t. t. Vadinasi, dryžiai nesudarė jokių uždarų žiedų, bet vientisą liniją – spiralę – su dviem laisvais galais marškinių viršuje ir apačioje.



5. (B) 158

$$\begin{array}{r} A\,B \\ +\;C\,D \\ \hline 7\;9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A\,D \\ +\;C\,D \\ A\,B \\ C\,B \\ \hline ? \end{array}$$

? Nors skaitmenų A, B, C, D reikšmių nustatyti neįmanoma, galimas reikšmes nesunku atspėti. Pavyzdžiui, tinka $\overline{AB} = 80$, $\overline{CD} = 19$. Beliko suskaičiuoti sumą $89 + 19 + 80 + 10$.

Renkamės atsakymą **B**.

?? Kairioji sudėtis stulpeliu rodo, kad vienetų skaitmenų B ir D suma baigiasi skaitmeniu 9. Tada vienetų skaitmuo paveikslėlio dešinėje gaunamas taip: $D + D + B + B = 2(D + B) = = 2 \cdot \ldots 9 = \ldots 8$. Tarp duotųjų atsakymų tėra vienintelis, kuris baigiasi skaitmeniu 8.

Renkamės atsakymą **B**.

! Kadangi $\overline{AB} + \overline{CD} = 79$, tai

$$\overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AB} + \overline{CB} = (\overline{AB} + \overline{CD}) + (10A + D) + (10C + B) =$$

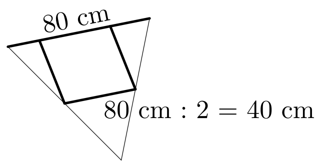
$$= 79 + (10A + B) + (10C + D) = 79 + (\overline{AB} + \overline{CD}) = 79 + 79 = 158.$$

6. (C) -1

! Čia pakanka perrenkant duotuosius atsakymus pastebėti, kad pasirinkus **C)** -1 gaunama reikiama suma $(-1) + 0 + 1 + 2 = 2$. Bet galima spręsti ir griežčiau. Jei ieškomas skaičius lygus x, tai

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 2, \qquad 4x + 6 = 2, \qquad x = -1.$$

7. (C) 400 cm



! Kiekviena aitvaro įstrižainė dalija jį į du trikampius. Šiame geometriniame uždavinyje svarbiausia pastebėti, kad keturios strypo dalys, kurių ilgiai neduoti, yra tų trikampių vidurio linijos, ir prisiminti, kad trikampio vidurio linija lygi pusei trikampio kraštinės. Taip randami keturių strypo dalių ilgiai centimetrais $120 : 2 = 60$, $120 : 2 = 60$, $80 : 2 = 40$, $80 : 2 = 40$ ir strypo ilgis

$$120 + 80 + 60 + 60 + 40 + 40 = 400 \text{ (cm)}.$$

8. (B) 101

? Po **A)** 20 metų bus 2040-ieji (netinka), o po **B)** 101 metų bus 2121-ieji (tinka). Kitų atsakymų galime netikrinti – gausime tik vėlesnius metus.

Renkamės atsakymą **B**.

! Kol turėsime metų skaičių $20\ldots$, tai lygių dviženklių skaičių negausime: $20 \neq \ldots$ O toliau ateis metai $21\ldots$, ir tada vienintelis tinkamas metų skaičius bus 2121, kurį turėsime už 101 metų.

9. **(E)** 4

! Pradinius kvadratinių ir trikampių popierėlių skaičius atitinkamai pažymėkime k ir t. Tada $k + t = 10$. Perkirpus tris kvadratus, kvadratų skaičius sumažėjo 3, o trikampių – padidėjo $3 \cdot 2 = 6$. Bendras gautųjų figūrų viršūnių skaičius lygus

$$42 = 4(k - 3) + 3(t + 6) = 4k + 3t + 6 = 4(10 - t) + 3t + 6 = 46 - t,$$

$$t = 46 - 42 = 4.$$

!! Kiekvienas iš 13 popierėlių turi tris viršūnes, o jei yra kvadratinis, tai turi dar vieną papildomą viršūnę. Todėl bendras viršūnių skaičius 42 lygus $13 \cdot 3 = 39$ plius tokių papildomų viršūnių skaičius. Papildomų viršūnių, o todėl ir kvadratinių popierėlių yra $42 - 39 = 3$. Vadinasi, iki sukarpymo jų buvo $3 + 3 = 6$, o trikampių popierėlių buvo $10 - 6 = 4$.

10. **(D)** $\frac{KM}{PD}$

! Kad nesusipainiotume, išskaidykime sprendimą į žingsnelius:

1) P pelių sveria K kg;

2) viena pelė sveria $K : P$ kg;

3) M pelių sveria $K : P \cdot M$ kg;

4) D dramblių sveria $K : P \cdot M$ kg;

5) vienas dramblys sveria $K : P \cdot M : D = \frac{KM}{PD}$ (kg).

11. **(D)** Šeštadienį

? Užuot skaičiavę pasakadienius kiekvienam galimam Onutės pasirinkimui, suprastinkime uždavinį. Nepriklausomai nuo to, kurią dieną prasidės apsilankymas pas senelę, per paskutines 14 to apsilankymo dienų prabėgs pilnos dvi savaitės, o kiekviena savaitės diena pasikartos po lygiai du kartus. Todėl pakanka nagrinėti tik pirmas keturias apsilankymo dienas.

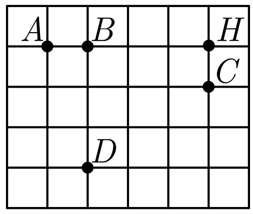
Jei Onutė atvyks pas senelę šeštadienį, tai pirmosios keturios dienos bus šeštadienis, sekmadienis, pirmadienis ir antradienis – iš viso trys pasakadieniai. Kita vertus, per savaitę, o tuo labiau per keturias dienas daugiau nei trijų pasakadienių negali būti.

Renkamės atsakymą **D**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, pastebėkime, kad jei tarp keturių iš eilės einančių dienų yra trys pasakadieniai, tai tarp jų yra šeštadienis ir antradienis. Dienų nuo antradienio iki šeštadienio (imtinai) būtų penkios – per daug. Dienų nuo šeštadienio iki antradienio būtų keturios, todėl šeštadienis turėtų būti pirmoji iš keturių dienų. Vadinasi, šeštadienis yra vienintelė diena, tinkanti Onutei kaip apsilankymo pradžia.

12. (A) $\frac{1}{2}$

? Iš keturių pažymėtųjų taškų pasirinkti tris galima keturiais būdais. Taip gauname keturis trikampius ABC, ABD, ACD, BCD (žr. pav.). Reikia pasirinkti mažiausiojo iš jų plotą. Trikampiai ACD ir BCD atrodo aiškiai didesnio ploto nei ABC ir ABD. O dėl pastarųjų dviejų trikampių galima ir suabejoti – jie gali atrodyti esą panašaus ploto. Trikampis ABD labiau atkreipia dėmesį, be to, jis statusis, todėl jo plotą $\frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$ lengviausia rasti. Galbūt todėl daug konkurso dalyvių pasirinko atsakymą **C**.



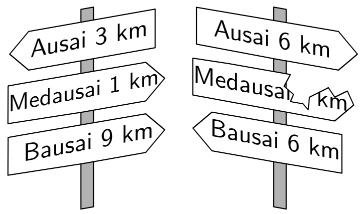
Tačiau raskime bukojo trikampio ABC plotą. Jo aukštinė iš C į AB yra langelio kraštinė CH, jos ilgis yra 1. Pagrindo AB ilgis taip pat lygus 1. Todėl trikampio ABC plotas lygus $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$. Mažesnio skaičiaus atsakymuose nėra.

Renkamės atsakymą **A**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, pastebėkime, kad vienas vienetinio ploto langelis yra trikampių ACD ir BCD viduje, todėl mes nesuklydome, kad šių trikampių plotas didesnis nei trikampio ABC. Beje, trikampio BCD plotas lygus $\frac{BD \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$ (pagal aukštinę iš C į BD). Kiek sunkiau įrodyti, kad trikampio ACD plotas lygus $\frac{11}{2}$.

13. (B) 2 km

! Atstumas iki Ausų ties pirmuoju stulpu yra 3 km, o ties antruoju – 6 km. Todėl nuo vieno stulpo iki kito yra $6 - 3 = 3$ (km). Tokią pačią išvadą galima padaryti ir žiūrint į rodykles, nukreiptas į Bausus. Žinoma, ir atstumas iki Medausų, keliaujant nuo vieno stulpo iki kito, turi pakisti tiek pat, t. y. 3 km. Kadangi vienoje rodyklėje tas atstumas yra 1 km, tai kitoje turėtų būti arba 4 km (pagal $1 + 3 = 4$), arba 2 km (pagal $1 - 3 = -2$).



Kurį variantą pasirinkti? Pirmasis variantas (atsakymas **D**, kuris tarp konkurso dalyvių buvo antras populiariausias) reikštų, kad, einant nuo pirmojo stulpo prie antrojo, atstumas nuo Ausų ir Medausų kinta vienodai – visą laiką didėja. Tačiau pirmojo stulpo rodyklės rodo į Ausus ir Medausus priešingomis kryptimis. Taigi einant nuo pirmojo stulpo ir tolstant nuo Ausų pradžioje yra artėjama link Medausų. Vadinasi, nuo antrojo stulpo iki Medausų yra 2 km.

!! Pakanka pasinaudoti trijų rodyklių informacija:

1) nuo Ausų iki pirmojo stulpo yra 3 km;

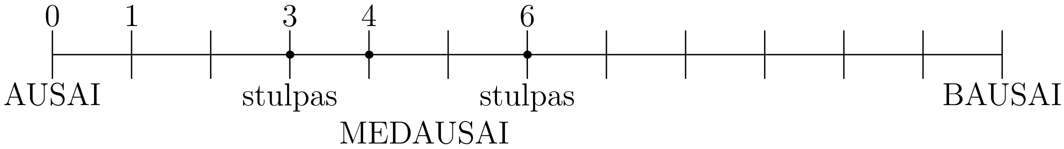
2) Ausai ir Medausai yra skirtingose pusėse nuo pirmojo stulpo;

3) nuo pirmojo stulpo iki Medausų yra 1 km;

4) nuo Ausų iki antrojo stulpo yra 6 km.

Vadinasi, einant keliu iš Ausų pirmasis stulpas pasirodo už 3 km, Medausai – dar už 1 km, o antrasis stulpas pasirodo už 6 km nuo Ausų, t. y. už $6 - 3 - 1 = 2$ km nuo Medausų.

Kad būtų aiškiau, situaciją galima pavaizduoti tiesėje:



14. (B) 48

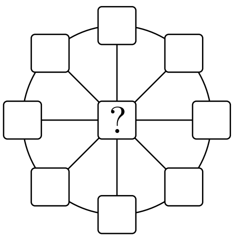
! Lygiašonio trikampio dvi kraštinės, kurių ilgiai neduoti, nėra lygios, todėl vienos iš jų ilgis turi būti lygus likusios kraštinės ilgiui 20. Vadinasi, trikampio kraštinių ilgiai yra 20, 20, $2{,}5 \cdot 20 = 50$ arba 20, 20, $20 : 2{,}5 = 40 : 5 = 8$. Daug konkurso dalyvių pasirinko pirmąjį atvejį. Tačiau jie nepastebėjo, kad gautosios kraštinės netenkina trikampio nelygybės: $20 + 20 < 50$. Vadinasi, toks trikampis neegzistuoja. Lieka antrasis atvejis: trikampio perimetras lygus $20+20+8 = 48$.

Kad sprendimas būtų pilnas, pastebėkime, jog 20, 20, 8 tenkina tris reikiamas trikampio nelygybes: $20 + 20 > 8$ ir (du kartus) $20 + 8 > 20$. To pakanka, kad trikampis egzistuotų.

15. (A) 3

? Pamėginkime į visus aštuonis apskritimo langelius įrašyti po tokį patį skaičių $40 : 8 = 5$. Kad būtų tenkinama uždavinio sąlyga, belieka į vidurinį langelį įrašyti $13 - 5 - 5 = 3$. Vadinasi, atsakymas 3 tinka.

Renkamės atsakymą **A**.



! Ieškomą skaičių pažymėkime x. Paveikslėlyje matome keturis apskritimo skersmenis. Kiekvieno iš šių skersmenų galuose įrašytų dviejų skaičių suma lygi $13-x$. Tada visų aštuonių apskritimo skaičių suma lygi $4(13-x) = 40$. Išsprendę lygtį, randame $x = 3$.

16. (C) 3

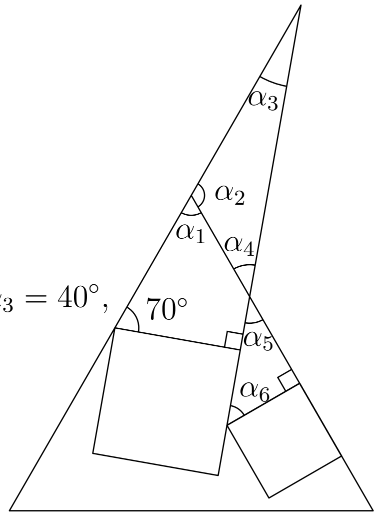
! Reikia nustatyti, kiek yra tokių dviženklių skaičių n, kad $20 \cdot n$ yra tikslusis kvadratas. Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, kad tinka tik $n = 20$: juk jei $20 \cdot n = m \cdot m$, tai $m = n = 20$? Galbūt panašiai mąstydami arba tiesiog neradę kitų tinkamų reikšmių, daug konkurso dalyvių pasirinko atsakymą **A**. Tačiau, pavyzdžiui, $20 \cdot 5 = 10^2$, todėl nors 5 nėra dviženklis skaičius, būkime atsargesni.

Iš lygybės $20n = m^2$ išplaukia, kad m^2, o todėl ir m dalijasi iš 5. Bet tada $m^2 = 5 \cdot 4 \cdot n$ dalijasi iš 5^2, o n dalijasi iš 5. Tada $m^2 = 100 \cdot \frac{n}{5}$ dalijasi iš 10^2, o m dalijasi iš 10. Pažymėkime $n = 5n_1$, $m = 10m_1$. Gauname $n_1 = m_1^2$. Iš eilės tikrinkime $n_1 = 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ Tada $n = 5, 20, 45, 80, 125, \ldots$ Tinka trys skaičiai 20, 45 ir 80, o tolimesnės n reikšmės per didelės. Taigi uždavinio sąlygą tenkina trys skaičiai 2020, 2045, 2080. Čia $20 \cdot 45 = 30^2$, $20 \cdot 80 = 40^2$.

Pastebėsime, kad norint išspręsti uždavinį galima mąstyti ir ne taip griežtai: visų pirma, tiesiog nuspėti, kad n turi dalytis iš 5. Juk kitaip reiškinyje $\sqrt{20n}(= 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{n})$ niekaip nepanaikinsime iracionaliojo $\sqrt{5}$. Tada belieka nuspėti, kad $n_1 = \frac{n}{5}$ yra tikslusis kvadratas, nes $20n = 100 \cdot n_1$ turi būti tikslusis kvadratas, o skaičius 100 jau toks yra.

!! Reikia nustatyti, kiek yra tokių dviženklių skaičių n, kad $20 \cdot n$ yra tikslusis kvadratas. Natūralusis skaičius, didesnis už 1, yra tikslusis kvadratas tada ir tik tada, kai jo skaidinyje pirminiais daugikliais visi laipsnių rodikliai yra lyginiai. Kad jie tokie būtų skaičių n ir $20 = 2^2 \cdot 5^1$ sandaugos skaidinyje, paties n skaidinyje skaičius 5 turi būti pakeltas nelyginiu laipsniu, o skaičius 2 bei visi kiti pirminiai skaičiai, jei tik iš viso priklauso n skaidiniui, tai jame turi būti pakelti lyginiu laipsniu. Kitaip tariant, $n = 5n_1$, kur n_1 skaidinyje visi laipsnių rodikliai yra lyginiai, t. y. kur n_1 yra tikslusis kvadratas. Vadinasi, reikia suskaičiuoti, kiek yra tiksliųjų kvadratų n_1, kuriems $10 \leqslant 5n_1 < 100$. Gauname nelygybes $2 \leqslant n_1 < 20$, kurias tenkina trys n_1 reikšmės 4, 9, 16.

17. (**E**) 50°

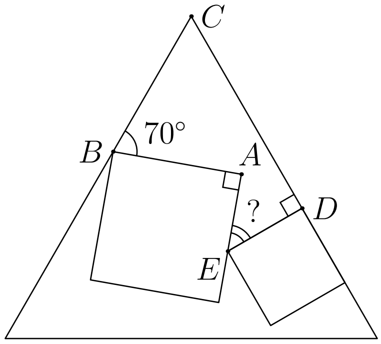


! Trikampio ir vieno kvadrato kraštines pratęskime iki jų susikirtimo bei pažymėkime kampus, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada

$\alpha_1 = 60^\circ$ (lygiakraštis trikampis), $\quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 120^\circ$,

$\alpha_3 = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ (statusis trikampis), $\quad \alpha_5 = \alpha_4 = 180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3 = 40^\circ$,

$? = \alpha_6 = 90^\circ - \alpha_5 = 50^\circ$ (statusis trikampis).



!! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Reikia rasti vieną iš (neiškilojo) penkiakampio $ABCDE$ kampų DEA. Pasinaudokime n-kampio kampų sumos formule $180^\circ \cdot (n-2)$:

$$180^\circ \cdot 3 = \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA + \angle EAB =$$

$$= 70^\circ + 60^\circ + 90^\circ + \angle DEA + (360^\circ - 90^\circ),$$

$$\angle DEA = 540^\circ - 490^\circ = 50^\circ.$$

18. (**B**) 100

! Būtų galima ieškoti konkrečių a, b, c, d reikšmių, su kuriomis gaunami uždavinio atsakymai. Bet sprendimas greitesnis, užrašius

$$abcd = (ab) \cdot (cd) = (2cd) \cdot (cd) = 2(cd)^2.$$

Todėl, padalijus (arba padauginus) $abcd$ iš 2, turi išeiti tikslusis kvadratas:
A) $50 : 2 = 5^2$; **C)** $200 : 2 = 10^2$; **D)** $450 : 2 = 15^2$; **E)** $800 : 2 = 20^2$. Tačiau **B)** $100 : 2 = 50$ nėra tikslusis kvadratas. Vadinasi, $abcd \neq 100$.

Kad sprendimas būtų pilnas, pastebėkime, kad keturios atsakymuose duotos $abcd$ reikšmės gaunamos, kai, pavyzdžiui, $(a, b, c, d) = (2, b, 1, b)$ ir **A)** $b = 5$; **C)** $b = 10$; **D)** $b = 15$; **E)** $b = 20$.

19. (**A**) 54

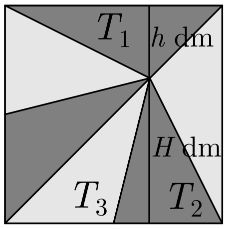
! Reiškiniai $9x + 27y$ ir $17x + 51y$ gali atrodyti nepanašūs, nesusiję. Todėl nenuostabu, kad tarp konkurso dalyvių populiarus buvo atsakymas **E**. Bet pastebėjus, kad reiškinių koeficientams būdingas dėsningumas $27 : 9 = 51 : 17$, tampa lengviau suvokti, kad verta atlikti tokius veiksmus:

$$102 = 17x + 51y = 17(x + 3y), \qquad x + 3y = 102 : 17 = 6,$$

$$9x + 27y = 9(x + 3y) = 9 \cdot 6 = 54.$$

Taigi reiškinio $9x + 27y$ reikšmė lygi 54 bei nuo konkrečių x ir y reikšmių nepriklauso.

20. (D) 6 dm



! Kvadratinio lango kraštinės ilgis yra $a = \sqrt{81} = 9$ (dm). Nagrinėkime vertikalią tiesę, einančią per tašką, kuriame tupi musė. Ji statmena dviem kvadrato kraštinėms, ir jai priklauso vitražo trikampių T_1, T_2, T_3 aukštinės (žr. pav.). Tų aukštinių ilgius decimetrais pažymėkime H ir h, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada $H + h = a$. Reikia rasti H.

Trikampiai T_2 ir T_3 sudaro didesnį trikampį, kurio plotas $\frac{a \cdot H}{2}$ dm^2 yra dvigubai didesnis už T_1 plotą $\frac{a \cdot h}{2}$ dm^2. Todėl

$$H = 2h, \qquad a = H + h = H + \frac{H}{2} = \frac{3H}{2}, \qquad H = \frac{2a}{3} = 6 \text{ (dm)}.$$

Šį sprendimą galima pakeisti, nagrinėjant tik T_1 ir remiantis tuo, kad šio trikampio plotas $\frac{a \cdot h}{2}$ dm^2 yra lygus šeštadaliui kvadrato ploto a^2 dm^2. Tada $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{6}$, $h = \frac{a}{3} = 3$ ir $H = a - h =$ $= 6$ (dm).

21. (B) $\frac{4}{9}$

! Apibrėžkime baigčių aibę. Ją sudarykime iš devynženklių skaičių, turinčių visus skaitmenis 1, 2, …, 9. Tokių skaičių yra 9! (skaitmenų aibės kėlinių skaičius). Visos baigtys yra vienodai tikėtinos.

Palankios baigtys – tie iš nagrinėjamų skaičių, kurie dalijasi iš 18. Skaičius dalijasi iš 18, kai dalijasi iš 9 ir iš 2. Vadinasi, remiantis dalumo požymiais, skaičius dalijasi iš 18, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9, o paskutinis skaitmuo – iš 2. Tačiau jei skaičiaus skaitmenys yra 1, 2, …, 9, tai jo skaitmenų suma $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ visada dalijasi iš 9. Todėl palankių baigčių yra tiek, kiek yra nagrinėjamų skaičių, kurie baigiasi lyginiu skaitmeniu.

Skaičių, kurie baigiasi skaitmeniu 2, yra 8!: paskutinis skaitmuo fiksuotas, o jo kairėje likę 8 skaitmenys 1, 3, …, 9 gali būti surašyti bet kokia tvarka. Analogiškai, yra po 8! nagrinėjamų skaičių, kurie baigiasi skaitmeniu 4, 6 ir 8. Liko pasiremti klasikiniu tikimybės apibrėžimu:

$$P(\text{„Gautasis skaičius dalijasi iš 18“}) = \frac{8! + 8! + 8! + 8!}{9!} = \frac{4 \cdot 8!}{9 \cdot 8!} = \frac{4}{9}.$$

!! Gautojo skaičiaus paskutinį skaitmenį pažymėkime a. Kaip ir **!** dalyje, pastebėkime, kad gautasis skaičius dalijasi iš 18 tada ir tik tada, kai skaitmuo a yra lyginis. Todėl ieškoma tikimybė lygi

$$P(\text{„}a \text{ yra lyginis“}) = P(a = 2) + P(a = 4) + P(a = 6) + P(a = 8).$$

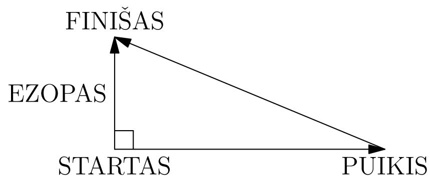
Žinoma, sudarant devynženklį skaičių, visi rikiuojami skaitmenys yra lygiaverčiai, todėl devyni atsitiktiniai įvykiai $a = 1$, $a = 2$, …, $a = 9$ yra vienodai tikėtini:

$$P(a = 1) = P(a = 2) = \ldots = P(a = 9) = \frac{1}{9},$$

$$P(\text{„}a \text{ yra lyginis“}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

22. C 13 km

? Puikis yra 5 kartus greitesnis už Ezopą, todėl kol Ezopas įveikė 5 km distanciją, Puikis nubėgo $5 \cdot 5 = 25$ kilometrus. Trys tiesios atkarpos – kuria judėjo Ezopas (5 km), ir dvi, kuriomis judėjo Puikis (bendras ilgis – 25 km), – sudaro statųjį trikampį. Reikia rasti įžambinės ilgį c. Skaičiai 5, $25 - c$, c tenkina Pitagoro teoremą.



Panagrinėkime penkis duotus atsakymus. Įžambinė turi būti ilgesnė už statinius, todėl netinka atsakymai **A** ir **B** ($c = 11$ arba 12). Patikrinkime, pavyzdžiui, atsakymą **D**. Turime $c = 14$, $25 - c = 11$, tačiau $5^2 + 11^2 \neq 14^2$. Analogiškai galima atmesti **E** arba patikrinti, kad atsakymas **C** tinka.

Renkamės atsakymą **C**.

! Ieškomą atstumą pažymėkime c km. Kaip įsitikinome **?** dalyje, skaičiai 5, $25 - c$, c tenkina Pitagoro teoremą:

$$5^2 + (25 - c)^2 = c^2,$$

$$5^2 + 25^2 - 50c + c^2 = c^2,$$

$$50c = 25 + 25^2 = 25 \cdot (1 + 25) = 25 \cdot 26 = 25 \cdot 2 \cdot 13 = 50 \cdot 13.$$

Taigi $c = 13$ (km).

23. E Visos žalios figūros yra mažos

? Esminiai yra du uždavinio sąlygos teiginiai: kiekviena didelė figūra yra kvadratas, o kiekviena žalia figūra yra trikampis. Uždavinys buvo sunkus konkurso dalyviams. Joks atsakymas nebuvo labai populiarus, o du populiariausi atsakymai buvo **B** ir **D**, kuriuose minėtieji esminiai teiginiai yra apgręžti: kiekvienas kvadratas didelis; kiekvienas trikampis žalias. Galbūt šie konkurso dalyviai manė, kad teiginius galima taip apgręžti. Tačiau ši logika netinkama. Juk iš to, kad kiekviena pušis yra medis, neišplaukia, kad kiekvienas medis yra pušis.

Teisingas „apgręžimas“ būtų toks. Jei kiekviena didelė figūra yra kvadratas, tai reiškia, kad joks nekvadratas nėra didelis, t. y. kad joks trikampis nėra didelis, t. y. kad kiekvienas trikampis yra mažas. Apibendrinti šį principą galima taip: jei iš A išplaukia B, tai iš ne B išplaukia ne A. Analogiškai galima padaryti tokią išvadą iš to, kad kiekviena žalia figūra yra trikampis: kiekvienas kvadratas („netrikampis“) yra raudonas („nežalias“).

Išvardykime bei įsižiūrėkime į du duotus ir toliau į du mūsų išvestus teiginius:

1) didelė $\Longrightarrow$ kvadratas;

2) žalia $\Longrightarrow$ trikampis;

3) trikampis $\Longrightarrow$ maža (išplaukia iš 1));

4) kvadratas $\Longrightarrow$ raudona (išplaukia iš 2)).

Dabar aiškiau matome, kad galime padaryti dar vieną neabejotiną išvadą iš 1) ir 4): „didelė $\Longrightarrow$ kvadratas $\Longrightarrow$ raudona“ reiškia, kad visos didelės figūros yra raudonos. Analogiškai galime sujungti 2) ir 3): „žalia $\Longrightarrow$ trikampis $\Longrightarrow$ maža“ reiškia, kad visos žalios figūros yra mažos. Vadinasi, teiginys **E** yra neabejotinai teisingas.

Žinoma, gautąją išvadą galima pagrįsti daug trumpiau. Kadangi visos didelės figūros yra kvadratai, tai visi trikampiai yra maži. Kadangi visos žalios figūros yra trikampiai, o visi trikampiai maži, tai visos žalios figūros yra neabejotinai mažos.

Renkamės atsakymą **E**.

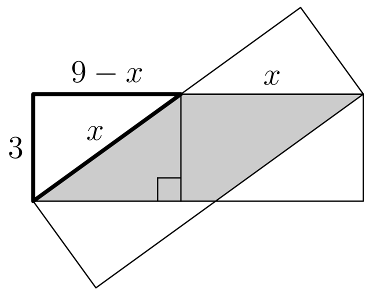
! Užbaikime **?** dalies sprendimą, pagrįsdami, kad teiginiai **A**-**D** gali būti (nors gal ir nebūtinai yra) klaidingi. Tam kiek formalizuokime uždavinį.

Visos figūros trimis būdais suskirstytos į dvi kategorijas: didelės ir mažos, žalios ir raudonos, kvadratai ir trikampiai. Tai leidžia suskirstyti figūras iš viso į $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimas kategorijas: dideli žali kvadratai (DŽK), dideli žali trikampiai (DŽT), ..., maži raudoni trikampiai (MRT).

Uždavinyje dar duoti du teiginiai: 1) kiekviena didelė figūra yra kvadratas; 2) kiekviena žalia figūra yra trikampis. Daugiau informacijos neturime. Ką teigia šie teiginiai? Teiginys 1) ekvivalentus teiginiui, kad kategorijoms DŽT ir DRT nepriklauso jokia figūra. Teiginys 2) ekvivalentus teiginiui, kad kategorijoms DŽK ir MŽK nepriklauso jokia figūra.

Taigi, galime performuluoti uždavinio sąlygą: kiekviena figūra priklauso vienai iš keturių likusių kategorijų DRK, MŽT, MRK, MRT. Kiekvienos iš šių keturių kategorijų figūrų lentoje gali būti, o gali ir nebūti. Tai, kad lentoje gali būti nupieštas mažas raudonas trikampis, leidžia įsitikinti, kad teiginiai **A**, **C**, **D** nebūtinai teisingi. O tai, kad lentoje gali būti mažas raudonas kvadratas, reiškia, kad nebūtinai teisingas teiginys **B**. Savo ruožtu tai, kad neliko kategorijų DŽK ir DŽT, reiškia, kad lentoje nėra didelių žalių figūrų, ir dar kartą mums patvirtina, kad teiginys **E** yra neabejotinai teisingas.

24. **D** 15



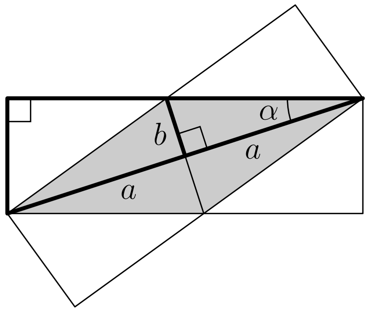
! Daug konkurso dalyvių rinkosi atsakymą **B**, greičiausiai spėdami, kad stačiakampių bendros dalies plotas sudaro pusę kiekvieno iš jų ploto 27. Tačiau reikėjo pastebėti kitokius dėsningumus.

Visų pirma, paveikslėlyje nesunku pastebėti, kad nuspalvinta figūra yra lygiagretainis ir net rombas. Panorėjus tai galima ir įrodyti, remiantis dviejų stačiakampių simetrija jų bendros įstrižainės atžvilgiu ir kiekvieno iš jų simetrija jų bendro centro atžvilgiu. Rombo kraštinę pažymėkime x. Jo plotas lygus $3x$, nes šio lygiagretainio aukštinė lygi trumpesnei vieno stačiakampio kraštinei. Liko rasti x.

Nagrinėkime paryškintą statųjį trikampį (žr. pav.). Jo statinių ir įžambinės ilgiai atitinkamai lygūs 3, $9-x$ ir x. Todėl

$$3^2 + (9-x)^2 = x^2, \qquad 9 + 81 - 18x + x^2 = x^2, \qquad 18x = 90, \qquad x = 5.$$

Vadinasi, rombo plotas lygus $3 \cdot 5 = 15$.



!! Kaip ir **!** dalyje, pastebėkime, kad dviejų stačiakampių bendra dalis yra rombas. Jo įstrižainės dalija jį į keturis lygius stačiuosius trikampius. Nubrėžkime tas įstrižaines, ilgesnės iš jų ilgį pažymėkime $2a$, trumpesnės – $2b$, ir nagrinėkime du paryškintus stačiuosius trikampius (žr. pav.). Kadangi tie trikampiai statieji ir turi bendrą smailųjį kampą α, tai jie panašūs. Šių trikampių atitinkamų statinių santykiai lygūs: $b : a = 3 : 9$ ir $b = \frac{a}{3}$. Didesniajam paryškintam trikampiui galioja Pitagoro teorema: $4a^2 = (2a)^2 = 3^2 + 9^2 = 90$. Vadinasi, ieškomas rombo plotas lygus

$$4 \cdot \frac{ab}{2} = \frac{2a^2}{3} = \frac{4a^2}{6} = \frac{90}{6} = 15.$$

25. Ⓒ 5

! Pamėginkime gauti kuo mažesnį Untės miegančių galvų skaičių, eksperimentuodami ir konstruodami pavyzdį:

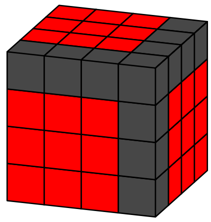
$$71 \Rightarrow 41 \Rightarrow 11 \Rightarrow 29 \Rightarrow 47 \Rightarrow 17 \Rightarrow 35 \Rightarrow 5.$$

Jei bandysime pratęsti gautąją skaičių seką arba perkurti ją, tai mažiau nei 5 galvų niekaip negausime. Bet kaip galime būti tikri, kad nepraleidome kokios nors galimybės?

Čia gali padėti skaičių dalumo savybės. Kadangi skaičiai 30 ir 18 abu dalijasi iš 6 (tai yra jų didžiausias bendrasis daliklis), tai Untės miegančių galvų skaičius visą laiką keičiasi (nesvarbu ar didėja, ar mažėja) per skaičiaus 6 kartotinį. Todėl miegančių galvų skaičiaus dalybos iš 6 liekana niekada nesikeičia. Ta liekana lygi 5, nes $71 = 66 + 5 = 6 \cdot 11 + 5$. Mažiausias neneigiamas sveikasis skaičius, kuris dalijasi iš 6 su liekana 5, yra pats skaičius 5. Vadinasi, visada miega mažiausiai penkios Untės galvos.

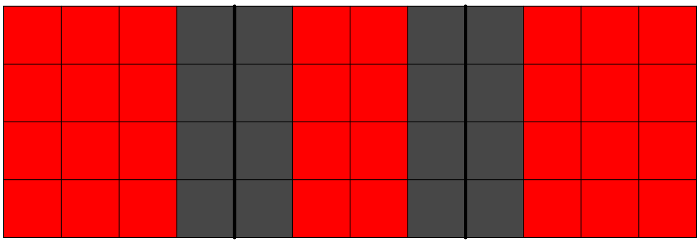
Kartu įrodėme, kad negali likti 1, 3 ar 7 miegančios Untės galvos. Tačiau **E)** $11 = 5 + 6$ miegančių galvų įmanoma gauti. Nenuostabu, kad šis atsakymas tarp konkurso dalyvių buvo antras populiariausias.

26. Ⓒ 32



? Kubas supjaustytas į $4 \times 4 \times 4$ kubelių. Nudažytos jo sienos gali turėti bendrą viršūnę. Tada kiekvienoje iš trijų sienų kubeliai, turintys po lygiai vieną nudažytą sienelę, sudaro 3×3 blokus (žr. pav.). Šių kubelių gauname $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Nenuostabu, kad atsakymas **A** tarp konkurso dalyvių buvo antras populiariausias.

Tačiau sienas galima nudažyti ir kitaip. Gal tada reikiamų kubelių skaičius gali būti didesnis? Tarkime, kad dvi iš trijų nudažytų sienų yra priešingos. Tada trečioji nudažyta siena turi po bendrą kraštinę su tomis priešingomis sienomis. Kubo išklotinėje trys sienos atrodytų taip:



Jose kubeliai, turintys po lygiai vieną nudažytą sienelę, sudaro tokius blokus: priešingose sienose 4×3, o likusioje sienoje – 4×2. Vadinasi, čia gauname $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 32 > 27$ reikiamus kubelius. Kad ir kaip kitaip besirinktume tris nudažytas kubo sienas, kitokių atvejų nerasime.

Renkamės atsakymą **C**.

! Pamėginkime perrinkti visus atvejus, kaip galima pasirinkti tris kubo sienas. Pirmiausiai pasirinkime bet kurią vieną kubo sieną S_1. Kubas turi dar 5 sienas: viena iš jų priešinga S_1, o keturios turi bendrą kraštinę su S_1. Todėl bent viena iš likusių dviejų sienų, kurias dar turime pasirinkti, turi bendrą kraštinę su S_1 – pasirinkime bet kurią tokią sieną S_2. Liko pasirinkti dar vieną sieną iš likusių keturių. Dvi iš jų turi bendrą viršūnę su S_1 ir S_2, o likusios dvi yra priešingos S_1 arba S_2. Vadinasi, bet kurios trys kubo sienos arba turi bendrą viršūnę, arba dvi iš jų yra priešingos. Abu šiuos atvejus jau išnagrinėjome **?** dalyje.

27. (C) 7

1	a	6	3
	2	2	8
	7		4
b	c	7	d

! Galima bandyti tiesiog užpildyti lentelę, bet tai nebūtina.

Tarkime, lentelė užpildyta, kad visų eilučių ir stulpelių skaičių sumos būtų lygios tam pačiam skaičiui s, o skaičiai a, b, c, d joje įrašyti, kaip parodyta paveikslėlyje. Atkreipkime dėmesį į skaičius viršutinėje eilutėje ir antrajame iš kairės stulpelyje:

$$s = 1 + a + 6 + 3 = a + 2 + 7 + c, \qquad 1 + 6 + 3 = 2 + 7 + c, \qquad c = 1.$$

Dabar liko analogiškai pasinaudoti apatine eilute ir dešiniuoju stulpeliu:

$$b + c + 7 = 3 + 8 + 4, \qquad b = 7.$$

Taigi norint rasti b, pakanka užpildyti tik dar vieną langelį.

Beje, lentelę galima užpildyti be galo daug būdų. Skaičius d gali būti bet koks, o jį pasirinkus lentelė užpildoma vienareikšmiškai:

1	$d+5$	6	3
$d+3$	2	2	8
4	7	d	4
7	1	7	d

28. (A) Agnė

! Kiekvieną dvikovą žymėkime I, II arba III, jei varžėsi atitinkamai Agnė ir Ignė, Agnė ir Ugnė arba Ignė ir Ugnė. Merginų varžybų visą raidą atitinka skaičių I, II ir III seka, apibūdinanti dvikovų eiliškumą. Kadangi kaskart po rankų lenkimo jo pralaimėtoja pasitraukia, tai šioje sekoje bet kurie du gretimi nariai skirtingi. Be to, ši seka vienareikšmiškai nusako, kas laimėjo kiekvieną dvikovą, išskyrus paskutiniąją. Pavyzdžiui, jei sekoje iš eilės eina I ir II, tai dvikovoje II nedalyvavusi Ignė pralaimėjo I, o tada Agnė dvikovą I laimėjo.

Tarkime, kad sekoje narių I, II ir III yra atitinkamai po x_1, x_2 ir x_3. Tada

$$x_1 + x_2 = 10, \qquad x_1 + x_3 = 15, \qquad x_2 + x_3 = 17.$$

Šios lygtys leidžia rasti x_1, x_2 ir x_3, bet svarbu rasti x_3:

$$2x_3 = (x_1 + x_3) + (x_2 + x_3) - (x_1 + x_2) = 15 + 17 - 10 = 22, \qquad x_3 = 11.$$

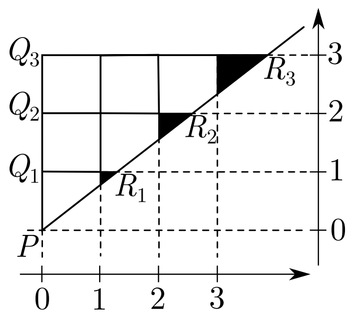
Analogiškai galime rasti $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, bet kuo svarbi būtent x_3 reikšmė 11? Ji parodo: Ignės ir Ugnės dvikova III vyko taip dažnai, kad visų kitų dvikovų I ir II net kartu sudėjus buvo mažiau: $10 < 11$. Prisiminkime, kad sekoje negali būti dviejų narių III, einančių iš eilės. Taip gali būti, tik jei seka atrodo taip:

$$\text{III, ?, III, ?, III, ?}, \ldots, \text{III, ?, III}.$$

Čia vietoj 10 klaustukų reikia įrašyti 4 narius I ir 6 narius II. Pastebėkime, kad bet kuri tokia seka jau tenkina uždavinio sąlygą, t. y. varžybų raida nėra nustatoma vienareikšmiškai. Bet to ir nereikia. Gavome, kad trečiojoje dvikovoje nedalyvavo Agnė, o tai reiškia, kad antrosios dvikovos (galbūt prieš Ignę, o galbūt prieš Ugnę) pralaimėtoja tegali būti Agnė.

29. (E) Kitas atsakymas

! Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad kvadratiniai langeliai yra vienetiniai. Nagrinėkime trikampius PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3 (žr. pav.). Užtušuotus trikampius atitinkamai pažymėkime T_1, T_2, T_3.



Visų šešių stačiųjų trikampių PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3, T_1, T_2, T_3 atitinkamos kraštinės yra arba lygiagrečios, arba vienoje tiesėje. Todėl šių trikampių atitinkami kampai lygūs, ir visi šeši trikampiai yra panašūs.

Pažymėkime $Q_1R_1 = a$. Kadangi $PQ_1 : PQ_2 : PQ_3 = 1 : 2 : 3$, tai $Q_1R_1 : Q_2R_2 : Q_3R_3 = 1 : 2 : 3$ ir $Q_2R_2 = 2a$, $Q_3R_3 = 3a$. Tada statieji trikampiai T_1, T_2, T_3 atitinkamai turi statinius $Q_1R_1 - 1 = a - 1$, $Q_2R_2 - 2 = 2(a - 1)$, $Q_3R_3 - 3 = 3(a - 1)$. Vadinasi, panašiųjų trikampių T_1, T_2, T_3 tų statinių, o todėl ir kitų atitinkamų statinių santykis lygus

$$(a - 1) : 2(a - 1) : 3(a - 1) = 1 : 2 : 3.$$

Tada šių trikampių plotų santykis lygus $1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9$.

30. (D) 13

! Pakaktų atspėti skaičių aštuonetą, tenkinantį sąlygą. Bet kaip tokį gauti? Bandykime analizuoti situaciją.

Turime aštuonių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių seką. Jei jų pirmieji du skaitmenys keistųsi, tai sekos vietoje, kur tie skaitmenys pakinta, būtų gretimi skaičiai, kurių vienas baigiasi devynetu, o tolimesnis – nuliu. Tokiu atveju tas tolimesnis skaičius turėtų dalytis iš 0. Vadinasi, visi aštuoni skaičiai prasideda tuo pačiu dviženkliu skaičiumi N. Tai skaičiai $\overline{N1}$, $\overline{N2}$, …, $\overline{N8}$ arba skaičiai $\overline{N2}$, $\overline{N3}$, …, $\overline{N9}$.

Bet kuriuo iš dviejų atvejų skaičius $\overline{N2} = 10N + 2$ dalijasi iš 2, $\overline{N3} = 10N + 3$ dalijasi iš 3, …, $\overline{N8} = 10N + 8$ dalijasi iš 8. Vadinasi, $10N$ dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Kadangi $10 = 2 \cdot 5$, tai dalumas iš 2 ir 5 nieko nepasako apie N. Jei $10N$ dalijasi iš 8 ir 3, tai dalijasi ir iš 4, ir iš 6. Taigi daliklių sąrašą galime sutrumpinti: $10N$ turi dalytis iš 3, 7 ir 8. Skaičius 10 nesidalija iš pirminių 3 ir 7, todėl iš jų turi dalytis pats N. Taip pat jei $10N : 8 = 5N : 4$ yra sveikasis skaičius, tai N dalijasi iš 4. Skaičiai 3, 4 ir 7 yra poromis tarpusavyje pirminiai, todėl N dalijasi ne tik iš kiekvieno iš jų, bet ir iš jų sandaugos 84. Tačiau vienintelis dviženklis skaičiaus 84 kartotinis yra 84. Taigi vienintelė galimybė yra $N = 84$. Kadangi 849 iš 9 nesidalija, tai aštuoni skaičiai yra 841, 842, …, 848 – jie iš tiesų tenkina uždavinio sąlygą.

Gauname atsakymą $8 + 4 + 1 = 13$.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	B
2	D
3	E
4	A
5	B
6	C
7	C
8	B
9	E
10	D
11	D
12	A
13	B
14	B
15	A
16	C
17	E
18	B
19	A
20	D
21	B
22	C
23	E
24	D
25	C
26	C
27	C
28	A
29	E
30	D