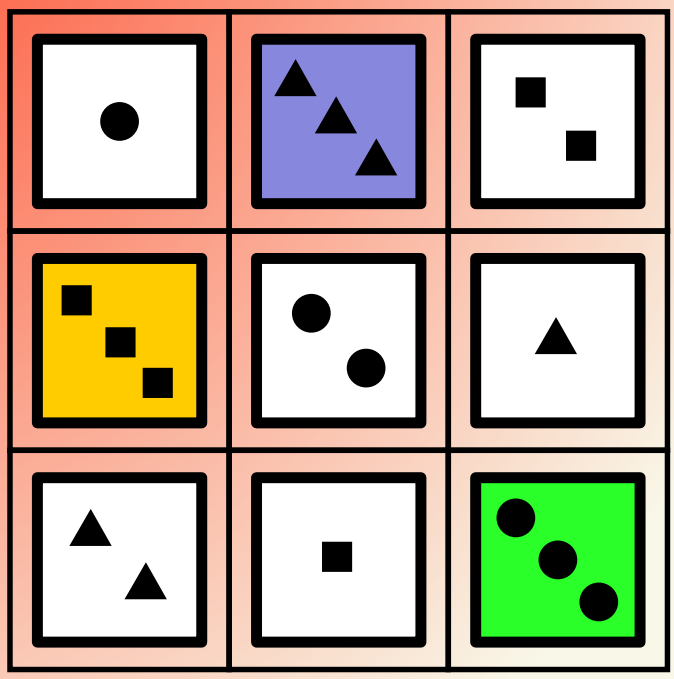
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA
Nykštukas



Užduotys ir sprendimai

2020

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2020. Nykštukas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Juozas Juvencijus Mačys, 2020
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2020

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **10**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 38700 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2020 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2020 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 1–2 klasių (*Nykštuko* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

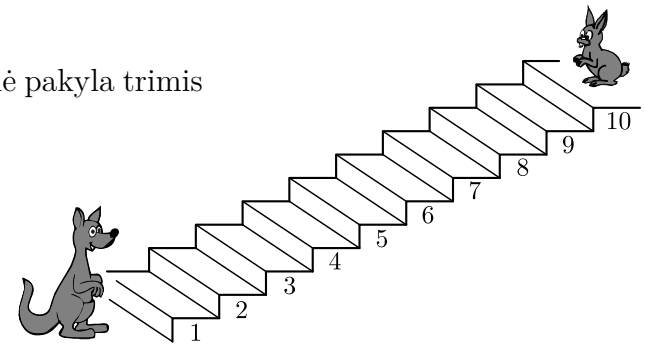
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

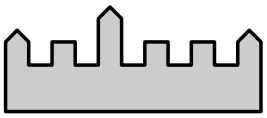
2020 m. *Nykštuko* užduočių sąlygos

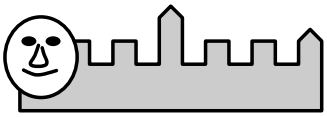
Klausimai po 3 taškus

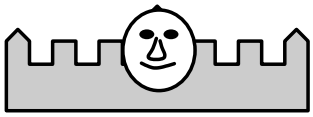
1. Kol triušis nusileidžia dviem laipteliais, kengūrėlė pakyla trimis laipteliais. Kelintame laiptelyje jie susitiks?

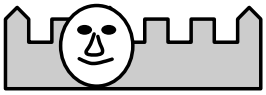


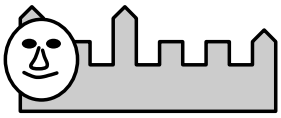
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

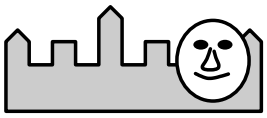
2. Morta padarė asmenukę priešais pilį  . Kuris iš šių paveikslėlių galėtų būti Mortos asmenukė?

A) 

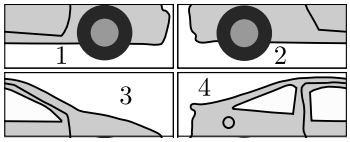
B) 

C) 

D) 

E) 

3. Emilija iš keturių kortelių sudėjo mašinos paveikslėlį. Kaip ji sudėjo korteles?



A)

4	3
2	1

B)

3	4
2	1

C)

2	1
4	3

D)

4	3
1	2

E)

3	4
1	2

4. Magas iš savo įstabiosios skrybėlės vieną po kito traukia žaislus, kurie kartojasi kas penki. Jis jau ištraukė tokius žaislus:

Kokius du žaislus magas ištrauks dabar?

A)

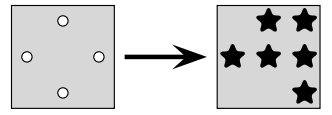
B)

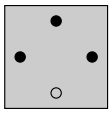
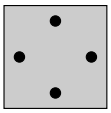
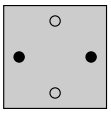
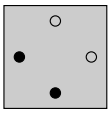
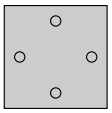
C)

D)

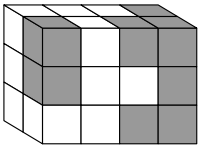
E)

5. Jonas turi dvi to paties dydžio korteles. Kortelėje A yra keturios skylutės. Jonas uždeda kortelę A ant kortelės B. Ką jis dabar mato?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

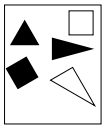
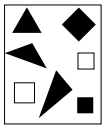
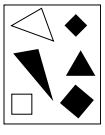
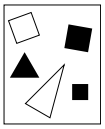
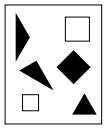
6. Jorė iš baltų ir juodų kubelių sudėjo statinį, kuriame yra 14 juodųjų kubelių. Kelių juodųjų kubelių nematome paveikslėlyje?



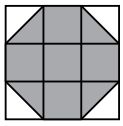
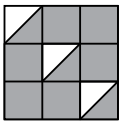
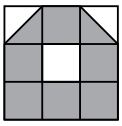
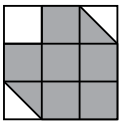
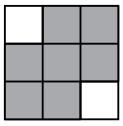
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

Klausimai po 4 taškus

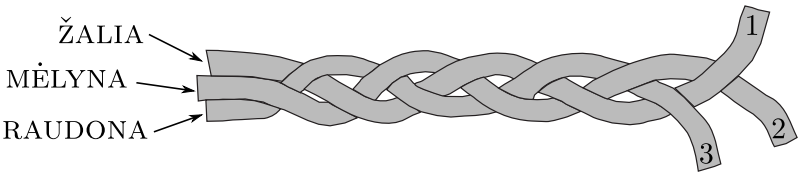
7. Ona popieriaus lape nupiešė 3 juodus trikampius ir mažiau kaip 4 kvadratus. Kuris paveikslėlis Onos?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

8. Kuriame iš paveikslėlių užtušuotasis plotas didžiausias?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

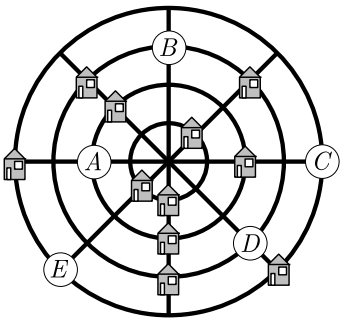
9. Pavaizduota kasa supinta iš trijų gijų. Viena gija yra žalia, viena – mėlyna ir viena – raudona. Kurios spalvos yra kiekviena gija?



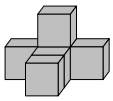
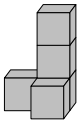
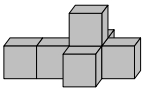
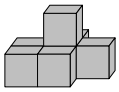
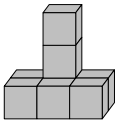
A) 1 – mėlyna, 2 – žalia, 3 – raudona
B) 1 – žalia, 2 – raudona, 3 – mėlyna
C) 1 – raudona, 2 – mėlyna, 3 – žalia
D) 1 – žalia, 2 – mėlyna, 3 – raudona
E) 1 – mėlyna, 2 – raudona, 3 – žalia

10. Gyvenvietėje 12 namų sujungti keturiais tiesiais takais ir keturiais žiediniais takais. Prie kiekvieno (tiesiojo ar žiedinio) tako yra 3 namai. Žemėlapyje matome vienuolika namų. Kurioje sankryžoje stovi dvyliktasis namas?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

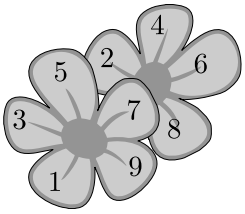


11. Pavaizduotosios penkios figūros padarytos suklijavus kubelius sienomis. Kurioje figūroje kubelių daugiausia?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

12. Ant dviejų gėlių kiekvieno žiedlapio parašytas skaičius. Vieno žiedlapio nematome. Kiekvienos gėlės skaičių suma yra ta pati. Koks skaičius parašytas ant pasislėpusio žiedlapio?

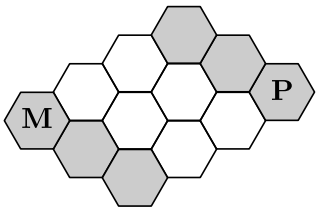
A) 0 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 1



Klausimai po 5 taškus

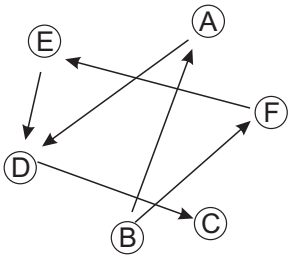
13. Bitė Maja gali vaikščioti tik pilkomis korio akutėmis. Keliais būdais galima pilkai nuspalvinti lygiai dvi baltąsias akutes, kad Maja galėtų iš **M** nueiti į **P**?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



14. Rodyklė, einanti nuo vieno mokinio į kitą, reiškia, kad pirmasis mokinys yra didesnis už antrąjį. Pavyzdžiui, mokinys B yra didesnis už mokinį A. Kuris mokinys yra mažiausias?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E



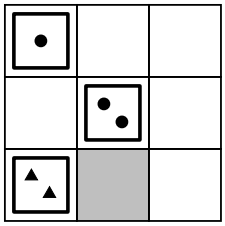
15. Krepšyje yra obuolių ir kriaušių, kiekvienas vaisius yra žalias arba geltonas. Kriaušių yra 8. Obuolių yra trimis daugiau negu visų žaliųjų vaisių. Geltonos yra 6 kriaušės. Kiek krepšyje yra geltonų obuolių?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

16. Močiutė jau iškepė 12 keksų. Ji nori, kad jos 5 anūkai gautų po lygiai keksų. Kelis keksus turi dar iškepti močiutė?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

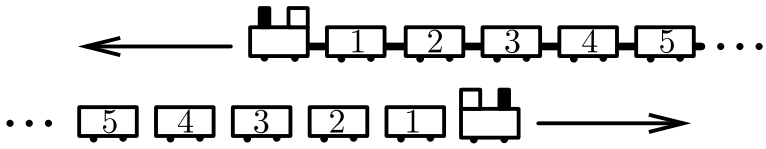
17. Tomas turi 9 korteles su trijų formų figūrėlėmis:



Jis nori sudėti korteles kvadratinėje 9 langelių lentoje taip, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio trijose kortelėse būtų visų trijų formų figūrėlių, bet figūrėlių skaičiai tose trijose kortelėse būtų skirtingi. Tomas jau padėjo tris korteles. Kurią kortelę jis turi padėti pilkajame langelyje?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

18. Du vienodi traukiniai važiuoja priešingomis kryptimis. Kiekvienas jų sudarytas iš 31 vagono. Dabar prieš vieno traukinio 19-tąjį vagoną yra kito traukinio 19-tasis vagonas. Koks vagonas yra prieš 12-tąjį vagoną?

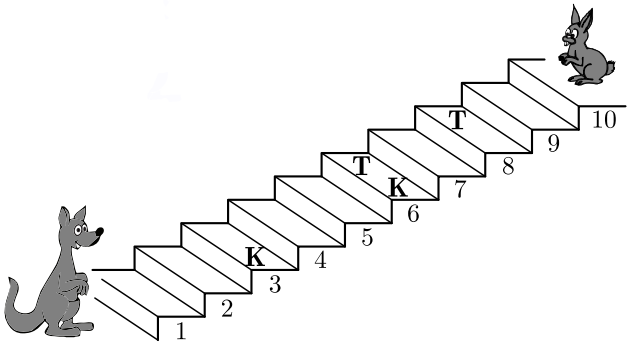


A) 7 **B)** 12 **C)** 21 **D)** 26 **E)** 31

Nykštuko užduočių sprendimai

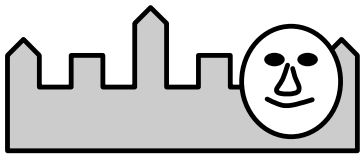
1. (D) 6

? Kai kengūrėlė bus užšokusi į 3 laiptelį, triušis atsidurs $10 - 2 = 8$ laiptelyje. Taigi jie dar nesusitiko.



Kai kengūrėlė padarys dar vieną šuolį, ji atsidurs $3+3 = 6$ laiptelyje, o triušis atsidurs $8-2 = 6$ laiptelyje. Taigi jie susitiks 6-tame laiptelyje.

! Laiką, per kurį triušis nusileidžia 2 laipteliais, o kengūrėlė pakyla 3 laipteliais, pavadinkime tarpsniu. Jiems kartu reikės įveikti $9 + 1 = 10$ laiptelių (laiptelį, kuriame jie susitiks, reikia įskaityti du kartus). Kartu jie per tarpsnį įveikia $2 + 3 = 5$ laiptelius. Iki susitikimo praeis $10 : 5 = 2$ tarpsniai. Kengūrėlė bus įveikusi $3 \cdot 2 = 6$ laiptelius ir atsidurs 6-tame laiptelyje. Žinoma, ten pat atsidurs ir kiškis – jis bus įveikęs $2 \cdot 2 = 4$ laiptelius, ir atsidurs $10 - 4 = 6$ laiptelyje.

2. (E) 

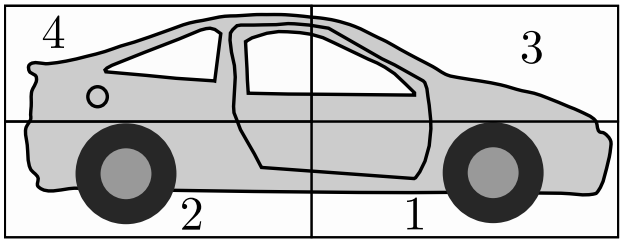
! Žiūrėkime į pilį. Kai Morta daro asmenukę, ji stovi nugara į pilį, o veidu į mus. Didžiausias pilies bokštelis iš kairės trečias, iš dešinės – ketvirtas, visi tarpeliai tarp bokštelių lygūs, tokie pat ir bokštelių pločiai. Vadinasi, Mortos asmenukė – tai ne **A** (nuo didžiausio bokštelio į kairę ne 2 bokšteliai, o ir pilis per plati). Netinka **B** (trečias iš kairės bokštelis per žemas, o ir pilis per plati), netinka **C** (trečias bokštelis turėtų išlįsti virš galvos), netinka **D** (pirmas bokštelis per aukštas – lygus trečiam). Lieka **E** – čia minėtų trūkumų nebėra.

3. (A)

4	3
2	1

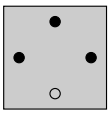
! 1 ir 2 kortelės – ratai, taigi kortelės bus apačioje. 3 kortelė – mašinos priekis, mašina „žiūri“ į dešinę, 4 kortelė – mašinos užpakalis. Vadinasi, 2 – užpakalinis ratas. Taigi sukeičiame 3 ir 4 korteles ir dedame jas į viršų, o sukeitę 1 ir 2 korteles dedame jas į apačią. Taip kortelės išdėstytos atsakyme **A**.

Beje, štai kaip atrodo iš kortelių sudėtoji mašina.



4. (E)

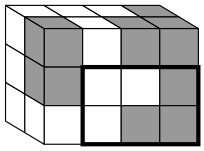
! Matome, kad po pelės eina sraigė ir paukščiukas. Taigi renkamės paskutinį atsakymą.

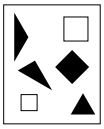
5. (A) 

! Per viršutines tris skylutes Jonas mato juodą spalvą – lieka atsakymai **A** ir **B**. Per apatinę skylutę jis mato baltą spalvą – vadinasi, lieka atsakymas **A**.

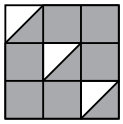
6. (D) 6

! Matome 7 priekinius juodus kubelius ir vieną užpakalinį – iš viso 8 juodus kubelius. Vadinasi, nematome $14 - 8 = 6$ juodų kubelių. Tai kubeliai, esantys už 6 priekinių kubelių, išskirtų paveikslėlyje (žr. pav.).



7. (E) 

! Tris juodus trikampius matome paveikslėliuose **B** ir **E**. Bet paveikslėlyje **B** yra 4 kvadratai. Lieka paveikslėlis **E** – jame trys kvadratai, o $3 < 4$.

8. (B) 

! Skaičiuojame juodąjį plotą visuose paveikslėliuose.
A – 5 kvadratėliai ir 4 puselės, t. y. $5 + 2 = 7$ kvadratėliai.
B – 6 kvadratėliai ir 3 puselės, arba 7 kvadratėliai ir 1 puselė.
C – 6 kvadratėliai ir 2 puselės, arba 7 kvadratėliai.
D – 6 kvadratėliai ir 2 puselės, arba 7 kvadratėliai.
E – 7 kvadratėliai.

Taigi didžiausias juodas plotas yra paveikslėlyje **B**.

!! Dar paprasčiau skaičiuoti, kur baltasis plotas mažiausias (tada juodas plotas didžiausias). **A** – 4 baltos puselės; **B** – 3 puselės; **C** – kvadratėlis ir 2 puselės, arba 4 puselės; **D** – tiek pat kaip ir **C**; **E** – 2 kvadratėliai, arba 4 puselės.

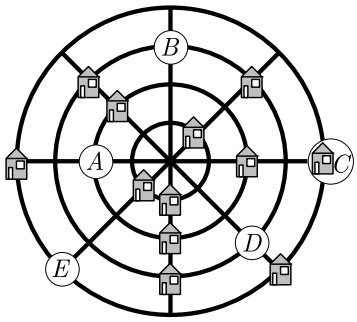
Taigi mažiausias baltas plotas – 3 puselės – yra paveikslėlyje **B**.

9. (D) 1 – žalia, 2 – mėlyna, 3 – raudona

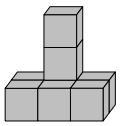
! Imame žalią giją, ir nepamesdami jos iš akių (arba neatitraukdami pieštuko) judame į dešinę; prieiname skaičių 1. Vadinasi, pirma gija yra žalia. Panašiai eidami mėlynąja gija prieiname numerį 2, o eidami raudonąja gija – numerį 3. Vadinasi, pirma gija yra žalia, antra – mėlyna, o trečia – raudona.

10. (C) C

! Prie tako AC matome tik 2 namus. Prie išorinio žiedo taip pat matome tik 2 namus. Vadinasi, dvyliktasis namas stovi tako AC ir išorinio žiedo sankryžoje.



Galime pasidžiaugti, kad dabar prie kiekvieno tako ir prie kiekvieno žiedo stovi 3 namai.

11. (E) 

! Paveikslėlyje **A** matome 5 kubelius, bet po viršutiniu kubeliu yra dar vienas kubelis (viršutinis kubelis juk suklijuotas siena su kitu kubeliu, taigi **A** yra 6 kubeliai (beje, jeigu už šio kubelio būtų dar vienas, tai jo kampuką matytume, panašiai kaip paveikslėliuose **C** ar **D**).

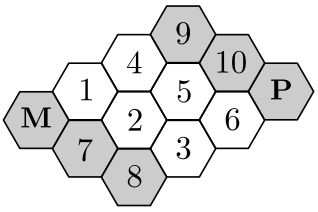
Paveikslėlyje **B** matome visus 6 kubelius. Paveikslėlyje **C** nematome vieno kubelio (kaip ir paveikslėlyje **A**) ir matome už jo esantį kubelį – iš viso $6 + 1 = 7$ kubeliai. Tas pats ir paveikslėlyje **D**, $6 + 1 = 7$ kubeliai. Ir pagaliau paveikslėlyje **E** matome 7 kubelius, o vieno nematome, iš viso 8 kubeliai. Taigi čia pavaizduotoje figūroje kubelių daugiausia.

12. (C) 5

! Pirmosios gėlės skaičių suma lygi $1+9+3+7+5 = 25$. Tokia ir antros gėlės skaičių suma. Bet matomų skaičių suma lygi $2 + 8 + 4 + 6 = 20$. Vadinasi, pasislėpęs skaičius yra $25 - 20 = 5$.

13. (C) 5

! Sunumeruokime baltąsias akutes kaip parodyta paveikslėlyje. Akutės **M**, 7 ir 8 sudaro pirmą eilę, akutės 1, 2, 3 – antrą eilę, 4, 5, 6 – trečią eilę, akutės 9, 10, **P** – ketvirtą eilę. Maja savo kelionę iš **M** į **P** gali pradėti bet kaip ir bet kiek vaikščiodama po pirmą eilę, bet kad pasiektų ketvirtą eilę, ji būtinai turi patekti iš pradžių į antrą eilę, o tada į trečią eilę. Vadinasi, iš pradžių ji turi nuspalvinti vieną antros eilės akutę, taigi ji turi nuspalvinti arba akutę 1, arba akutę 2, arba akutę 3 (tik vieną iš jų, nes antrą akutę jai reikės nuspalvinti iš trečios eilės).



Jeigu ji nuspalvino akutę 1, tai ji turi spalvinti jai gretimą trečios eilės akutę, o tokia vienintelė – tai akutė 4. Jeigu ji nuspalvino akutę 2, tai trečioje eilėje ji gali spalvinti akutę 4 arba akutę 5. O jeigu ji nuspalvino akutę 3, tai ji gali spalvinti akutę 5 arba akutę 6. Vadinasi, Maja gali penkiais būdais nuspalvinti dvi akutes: 1 ir 4, 2 ir 4, 2 ir 5, 3 ir 5, 3 ir 6. Taip ji patenka į ketvirtą eilę ir į akutę **P**.

14. (C) C

? Peržiūrėkime mokinius. A nėra mažiausias, nes iš A eina rodyklė į D, taigi D mažesnis už A. B nėra mažiausias, nes iš B eina rodyklė į D. Iš C rodyklė neina, todėl nurodyti mažesnį už jį nepavyksta.

! Be reikalo paskubėjome paskelbti C mažiausiu – o gal dar yra kitas toks pats mažas ar dar mažesnis, iš kurio neina rodyklės. Tęskime perranką. D nėra mažiausias, nes iš jo eina rodyklė į C. E nėra mažiausias, nes iš jo eina rodyklė į D. F nėra mažiausias, nes iš jo eina rodyklė į E.

Dabar jau aiškiau. Kiekvienoje mokinių grupėje yra mažiausias (gal net keli mažiausi, t. y. lygūs ūgiu ir mažesni už kitus). Bet kadangi už kiekvieną iš A, B, D, E, F yra mažesnis, tai jie nėra mažiausi. Vadinasi, mažiausias yra C.

!! Sprendimą galima padaryti dar aiškesnį. Eikime iš C priešinga rodyklėmis kryptimi. Taip galime eiti „keliu“ C ← D ← E ← F ← B (toliau kelio nebėra – į B rodyklė neateina) arba „keliu“ C ← D ← A ← B. Tai reiškia, kad ūgiu C < D < E < F < B ir C < D < A < B. Iš pirmos „nelygybės“ matome, kad C mažesnis už B, D, E, F, o iš antros – kad C mažesnis ir už A. Taigi C mažesnis už kiekvieną kitą. Uždavinys išspręstas.

Ir vis dėlto įdomu dar panagrinėti mūsų nelygybes. Pavyzdžiui, iš pirmos jų matome, kad B didesnis už C, D, E ir F, o iš antros – kad B didesnis ir už A, taigi jis didžiausias iš visų. Bet dar įdomiau, kad negalime nustatyti, kuris mokinys didesnis: A ar F (tam per mažai duomenų, t. y. rodyklių). Tiksliau kalbant, į rikiuotę B > F > E > D > C ūgio mažėjimo tvarka mokinys A gali pakliūti tiek tarp B ir F, tiek tarp F ir E, tiek tarp E ir D (bet ne žemiau!).

15. **B** 5

! Kadangi geltonos 6 kriaušės, tai žaliųjų kriaušių yra $8 - 2 = 6$. Dabar įsigilinkime į sakinį, kad obuolių yra trimis daugiau, negu visų žaliųjų vaisių. Jis reiškia, kad žaliųjų obuolių ir geltonųjų obuolių yra trimis daugiau, nei žaliųjų obuolių ir žaliųjų kriaušių. O tada aišku, kad geltonųjų obuolių yra trimis daugiau, negu geltonųjų kriaušių. Vadinasi, geltonųjų obuolių yra $2 + 3 = 5$.

!! Geltonųjų kriaušių yra 6, todėl žalių kriaušių yra 2. Sakykime, kad geltonų obuolių yra G, o žalių obuolių $\check{Z}$. Iš viso obuolių yra $G + \check{Z}$, ir tai yra trimis daugiau nei visų žaliųjų vaisių $2+\check{Z}$. Vadinasi, $G+\check{Z} = 2+\check{Z}+3$. Atmetę iš abiejų lygybės pusių $\check{Z}$, gauname $G = 2+3 = 5$.

Atkreipkite dėmesį, kad taip ir nesužinojome, kiek yra žaliųjų obuolių. Įtariame, kad uždavinio atsakymas nuo to nepriklauso. Iš tikrųjų, sakykime, kad žaliųjų obuolių yra 1. Tada žaliųjų vaisių yra $1 + 2 = 3$, todėl visų obuolių yra $3 + 3 = 6$. Vadinasi, geltonųjų obuolių yra $6 - 1 = 5$.

Dabar sakykime, kad žaliųjų obuolių yra 20. Tada žaliųjų vaisių yra $20 + 2 = 22$, obuolių yra $22 + 3 = 25$, geltonųjų obuolių yra $25 - 20 = 5$, vėl tiek pat.

Iš tikrųjų, jau pati lygybė $G + \check{Z} = 2 + \check{Z} + 3$ rodo, kad nuo $\check{Z}$ niekas nepriklauso.

? Dabar jau aišku, kad teisingą atsakymą lengva tiesiog atspėti. Duomenų mažoka, skaičiavimui reikėtų žaliųjų obuolių skaičiaus.

Spėkime, kad žaliųjų obuolių yra, pavyzdžiui, 10. Žaliųjų kriaušių yra 2, todėl žaliųjų vaisių yra $10 + 2 = 12$. Vadinasi, obuolių yra $12 + 3 = 15$, o geltonųjų obuolių $15 - 10 = 5$.

Pasitikriname, ar visos uždavinio sąlygos išpildytos. Kriaušių tikrai 8. Obuolių yra 15, ir tai tikrai trimis daugiau už žaliųjų vaisių skaičių $10 + 2$. Geltonųjų kriaušių 6. Vadinasi, visos uždavinio sąlygos išpildytos.

Mus gali neraminti mintis, kad gal pasirinkę kitą žaliųjų obuolių skaičių (ne 10), gausime kitą atsakymą. Bet galime į tai nekreipti dėmesio – *Kengūros* konkurso taisyklės garantuoja, kad teisingas atsakymas tik vienas. Taigi drąsiai renkamės atsakymą **B**.

16. (D) 3

! Galima tiesiog bandyti. Skaičius 12 iš 5 nesidalija, sekantis 13 – nesidalija, 14 – nesidalija, o štai 15 – dalijasi ($15 : 5 = 3$). Vadinasi, močiutė turi iškepti mažiausiai dar 3 keksus. Žinoma, ji galėtų iškepti ir 8 keksus, kad pasiektų kitą dalų iš 5 keksų skaičių 20.

Jeigu nebūtų pasirenkamųjų atsakymų, tai uždavinio atsakymas būtų:

Močiutė turi dar iškepti arba 3, arba 8, arba 13, arba 18 ir t.t. kas penki.

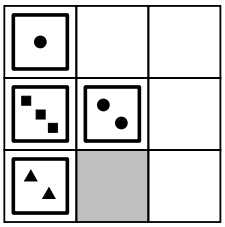
Bet kadangi reikia rinktis iš atsakymų (tai tam tikra prasme sąlygos tęsinys), tai renkamės skaičių 3.

Jeigu uždavinyje (be pasirenkamųjų atsakymų) būtų klausiama, kiek mažiausiai keksų turi iškepti močiutė, tai atsakymas būtų 3.

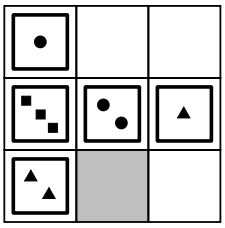
!! Bendras keksų skaičius turi dalytis iš 5. Žinome, kad mažiausias skaičius, didesnis už 12 ir dalus iš 5, yra 15. Vadinasi, močiutei užtenka iškepti $15 - 12 = 3$ keksus.

17. (D)

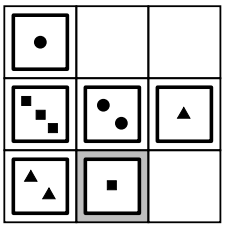
! Iš karto nelabai aišku, ką padėti pilkajame langelyje. Todėl užpildykime tuos langelius, su kuriais viskas aišku. Kadangi I stulpelio langeliuose jau yra 1 figūrėlė ir 2 figūrėlės, į laisvą jo langelį reikės 3 figūrėlių. Kadangi jame jau yra skrituliukų ir trikampiukų, tai teks dėti kvadratėlius. Taigi dedame kortelę :



Dabar antroje eilutėje jau dvi kortelės. Kadangi 3 ir 2 figūrėlės jau joje yra, tai reikės 1 figūrėlės. O kadangi kvadratukų ir skrituliukų jau yra, tai teks dėti trikampiuką :

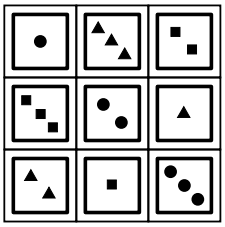


Deja, dabar jau nebeturime nei stulpelio, nei eilutės su dviem kortelėmis. Čia turi mums į galvą ateiti mintis, kad kiekvienas langelis priklauso ir tam tikrai eilutei, ir tam tikram stulpeliui. Todėl aišku, kad į pilkąjį langelį reikės kvadratukų, nes skrituliukų jau yra jo stulpelyje, o trikampiukų – jo eilutėje. Skaičius 2 jau užimtas, taigi tiktų dvi kortelės – 1 kvadratėlis ir 3 kvadratėliai. Bet kortelė su 3 kvadratėliais jau padėta, taigi lieka 1 kvadratėlis :



Taigi galime rinktis atsakymą **D**. Kad jis teisingas, garantuoja Kengūros konkurso taisyklės.

Šiaip jau reikėtų įsitikinti, kad galima reikalaujamu būdu užpildyti visą lentelę (maža ko atsitinka!). Bet tai jau paprasta: virš kvadratėlio ir dviejų skrituliukų turi būti trys trikampiukai, ir t.t. Užpildyta lentelė atrodo taip:



Matome, kad tikrai kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje figūrėlių skaičiai skiriasi ir jų forma skiriasi, kaip ir reikalauja uždavinio sąlyga.

!! Trumpiausias sprendimas būtų bene toks. Antro stulpelio viršuje bus 3 figūrėlės (nes 1 ir 2 greta jo ir po juo jau yra). Vadinasi, to stulpelio apačioje bus 1 figūrėlė. Bet tai bus kvadratukas, nes šalia jo ir virš jo yra trikampiukų ir skrituliukų.

Žinoma, užpildyti lentelę vistiek reikėtų.

18. (D) 26

! Kadangi prieš 19 vagoną yra 19 vagonas, tai prieš 18 vagoną yra 20 vagonas, prieš 17 – 21, prieš 16 – 22, prieš 15 – 23, prieš 14 – 24, prieš 13 – 25, taigi prieš 12 vagoną yra 26 vagonas.

!! Įdomu, kad jeigu prieš „pirmojo“ traukinio 12 vagoną yra antrojo traukinio 26 vagonas, tai ir prieš antrojo traukinio 12 vagoną yra pirmojo traukinio 26 vagonas. Iš tikrųjų, tuo momentu, kai vieno traukinio 19 vagonas yra prieš kito traukinio 19 vagoną, jų numerių suma yra $19 + 19 = 38$. Prieš 18 vagoną yra 20 vagonas (vienas numeris vienetu sumažėja, kitas vienetu padidėja), taigi suma 38 nekinta. Todėl prieš 12 vagoną esančio vagono numeris yra $38 - 12 = 26$, o prieš 26 vagoną – numeris 12.

Ir vis tik niekada nereikia skubėti – taip mes ir elgėmės ankstesniame **!** sprendime. Paklauskime savęs: o koks gi vagonas yra prieš 1 vagoną? Išeitų, kad $38 - 1 = 37$. Bet juk tokio vagono nėra! Iš tikrųjų, prieš 8 vagoną yra 30 vagonas, prieš 7 – 31 vagonas, o prieš 6 vagoną – tikriausiai jau nieko.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	E
3	A
4	E
5	A
6	D
7	E
8	B
9	D
10	C
11	E
12	C
13	C
14	C
15	B
16	D
17	D
18	D