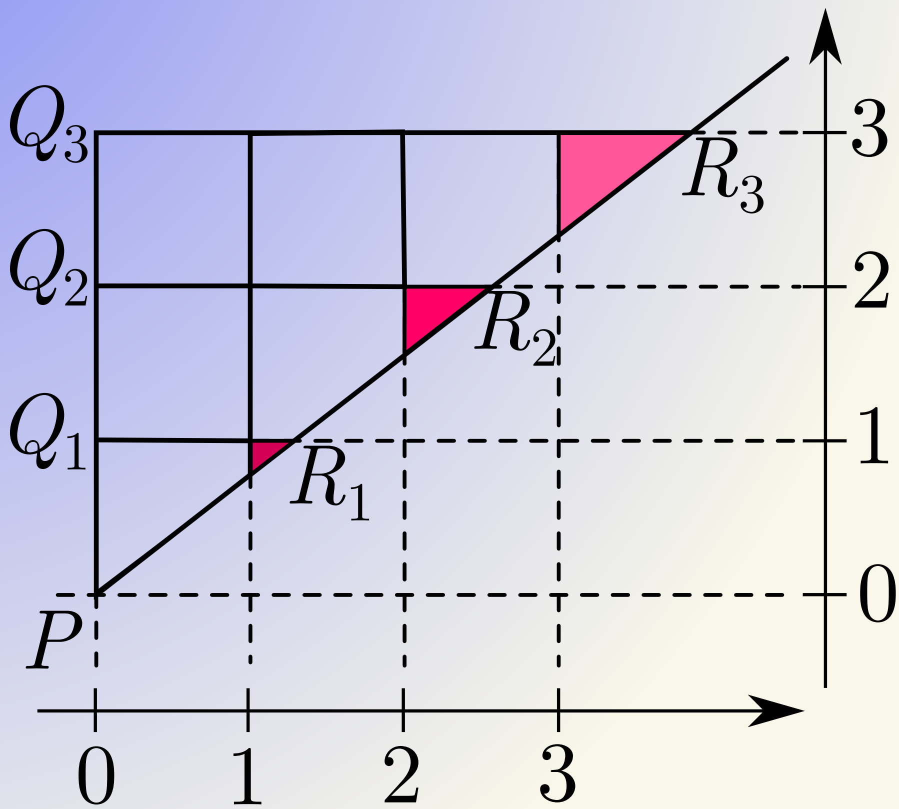
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Senjoras



Užduotys ir sprendimai

2020

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2020. Senjoras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

Turinys

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 38700 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2020 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2020 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

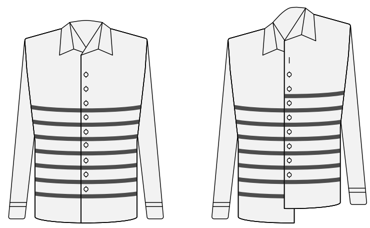
Organizatoriai

2020 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

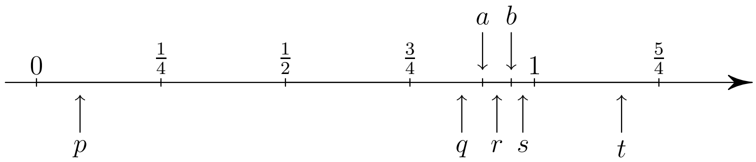
Klausimai po 3 taškus

1. Kokia yra skaičiaus $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ paskutinių dviejų skaitmenų suma?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 16

2. Kai Kazys užsagsto savo dryžuotus marškinius teisingai, jo liemenį juosia 7 uždari žiedai, kaip parodyta paveikslėlio kairėje. Šįryt Kazys blogai užsisegė marškinius, kaip parodyta paveikslėlio dešinėje. Kiek uždarų žiedų, juosiančių liemenį, dabar sudaro marškinių dryžiai?
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 7

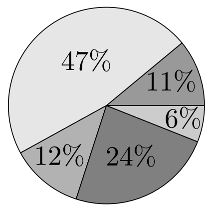


3. Skaičių tiesėje pažymėti skaičiai a ir b (žr. pav.). Kuris iš skaičių p, q, r, s, t mažiausiai skiriasi nuo sandaugos ab?



A) p **B)** q **C)** r **D)** s **E)** t

4. Skritulinė diagrama parodo, kaip į vieną mokyklą keliauja jos mokiniai. Dviratį renkasi apytiksliai dvigubai tiek mokinių, kiek viešąjį transportą. Automobiliu atvažiuojančių ir pėsčiomis ateinančių skaičiai apytiksliai sutampa. Visi kiti mokiniai atvažiuoja paspirtukais. Kuri mokinių dalis į mokyklą važiuoja paspirtukais?
A) 6% **B)** 11% **C)** 12% **D)** 24% **E)** 47%



5. Penkių triženklių skaičių $\overline{ABC}$, $\overline{BCD}$, $\overline{CDE}$, $\overline{DEA}$ ir $\overline{EAB}$ suma lygi 2664. Kam lygi skaitmenų suma $A + B + C + D + E$?
A) 4 **B)** 14 **C)** 24 **D)** 34 **E)** 44

6. $\dfrac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020} =$
A) 2020 **B)** 3030 **C)** 4040 **D)** 6060 **E)** 7070

7. Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygas $a \leqslant b \leqslant c$ ir $abc = 1\,000\,000$. Kokia yra didžiausia galima skaičiaus b reikšmė?
A) 100 **B)** 250 **C)** 500 **D)** 1000 **E)** 2000

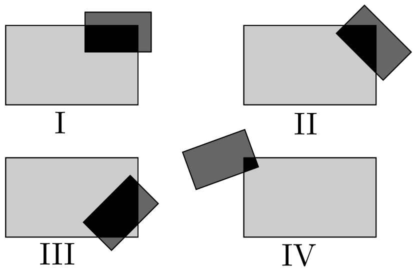
8. Vilija turėjo 10 popierėlių. Kai kurie popierėliai buvo kvadratiniai, o likusieji – trikampiai. Vilija tris kvadratus perkirpo į dvi dalis išilgai įstrižainės. Dabar Vilijos 13 popierėlių turi iš viso 42 viršūnes. Kiek trikampių popierėlių Vilija turėjo pradžioje?
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

9. Kiek kilogramų sveria vienas dramblys, jei P pelių sveria K kilogramų, o D dramblių sveria tiek pat, kiek M pelių?
A) $PKDM$ **B)** $\frac{PK}{DM}$ **C)** $\frac{KD}{PM}$ **D)** $\frac{KM}{PD}$ **E)** $\frac{PM}{KD}$

10. Morta parideno du vienodus lošimo kauliukus, turinčius po dvi raudonas, dvi žalias ir dvi mėlynas sieneles. Kokia tikimybė, kad kauliukai atvirto ta pačia spalva?
A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{1}{3}$

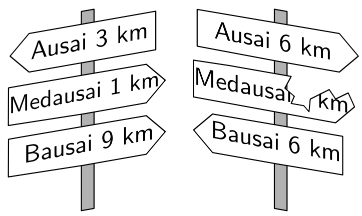
Klausimai po 4 taškus

11. Didelis ir mažas stačiakampiai kertasi. Didžiojo stačiakampio dalies, nepriklausančios mažajam, plotas lygus D, o mažojo stačiakampio dalies, nepriklausančios didžiajam, plotas lygus M. Kuriuo atveju (žr. pav.) skirtumas $D-M$ yra didžiausias?
A) I **B)** II **C)** III **D)** IV
E) Visais atvejais I-IV skirtumas $D-M$ yra toks pat



12. Ant stalo guli penkios monetos, atverstos skaičiumi. Kiekvieno ėjimo metu reikia pasirinkti bet kurias tris monetas ir apversti jas kita puse. Per kiek mažiausiai ėjimų galima visas monetas atversti herbu?
A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** To padaryti neįmanoma

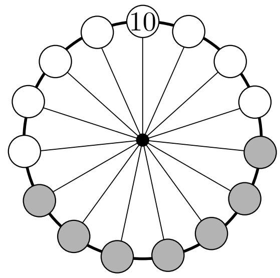
13. Trumpiausias kelias iš Ausų į Bausus eina per Medausus. Eidama iš Ausų tuo keliu, Austėja pamatė pakelės stulpą, pavaizduotą paveikslėlio kairėje, o vėliau – pakelės stulpą, pavaizduotą paveikslėlio dešinėje. Koks atstumas buvo užrašytas ant sulaužytos rodyklės?
A) 1 km **B)** 2 km **C)** 3 km **D)** 4 km **E)** 5 km



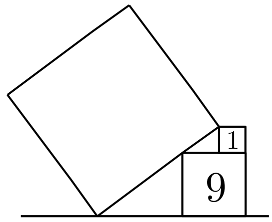
14. Kuris skaičius negali būti reiškinio $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ reikšme, kai a, b ir c yra sveikieji skaičiai?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 6 **E)** 8

15. Šimtaženklis natūralusis skaičius a prasideda skaitmenimis 29. Kiek skaitmenų turi skaičius a^2?
A) 101 **B)** 199 **C)** 200 **D)** 201 **E)** Nustatyti neįmanoma

16. Ratu surašyti 15 skaičių. Paveikslėlyje matome vieną iš jų – skaičių 10. Bet kurių 7 gretimų šio rato skaičių (taigi ir skaičių pilkuose skrituliuose) suma yra tokia pati. Keli iš skaičių 75, 216, 365 ir 2020 gali būti visų 15 skaičių suma?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

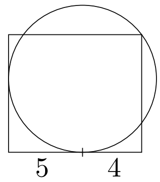


17. Paveikslėlyje pavaizduoti trys kvadratai ir tiesė bei nurodyti dviejų kvadratų plotai. Koks yra didžiojo kvadrato plotas?
A) 49 **B)** 80 **C)** 81 **D)** 82 **E)** 100

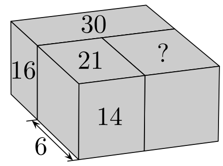


18. Kuris skaičius nesidalija iš 3 jokiam sveikajam n?
A) $n^{12}+2n^{11}+1$ **B)** $5n^{12}-n^{11}+2$ **C)** $5n+2$ **D)** n^2+2n+5 **E)** $2n^3+5$

19. Apskritimas liečia dvi stačiakampio kraštines ir eina per jo viršūnę. Vienas lietimosi taškas dalija stačiakampio kraštinę į atkarpas, kurių ilgiai yra 4 ir 5, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra stačiakampio plotas?
A) 27π **B)** 25π **C)** 72 **D)** 63 **E)** Kitas atsakymas

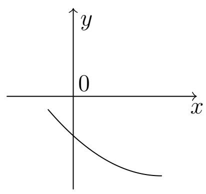


20. Stačiakampis gretasienis padalytas į tris mažesnius. Paveikslėlyje nurodyti tų mažesnių gretasienių kai kurių sienų plotai bei vienos briaunos ilgis. Koks yra klaustuku pažymėtos sienos plotas?
A) 18 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 30 **E)** Nustatyti neįmanoma



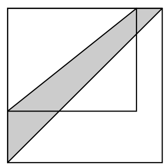
Klausimai po 5 taškus

21. Paveikslėlyje pavaizduota parabolės $y=ax^2+bx+c$ atkarpa. Kuris skaičius yra teigiamas?
A) c **B)** $b+c$ **C)** ac **D)** bc **E)** ab



22. Untė yra 71-galvis slibinas. Kartą užmigo visos Untės galvos. Bet kuriuo metu gali pabusti bet kurios lygiai 30 iš tuo metu miegančių Untės galvų. Bet kuriuo metu gali užmigti bet kurios lygiai 18 iš tuo metu nemiegančių Untės galvų. Kiek mažiausiai Untės galvų gali vienu metu miegoti po kurio laiko?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

23. Ponia Rozalija išplėtė stačiakam̃pį sodo sklypą, dvi priešingas sklypo kraštines pailgindama 20%, o kitas dvi pailgindama 50%. Sklypas tapo kvadratinis. Jo dalį, ribojamą stačiãkampio ir kvadrato įstrižainių (žr. pav.), Rozalija užsodino rožėmis. Koks buvo pradinis sklypo plotas, jei rožėmis užsodinta $30\,\mathrm{m}^2$?
A) $60\,\mathrm{m}^2$ **B)** $65\,\mathrm{m}^2$ **C)** $70\,\mathrm{m}^2$ **D)** $75\,\mathrm{m}^2$ **E)** $80\,\mathrm{m}^2$

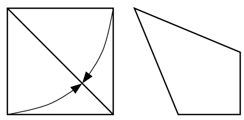


24. Seką $L_1, L_2, L_3, \ldots$ apibrėžia lygybės: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ bei $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$, kai $n = 1, 2, \ldots$ Keli iš 2020 pirmųjų sekos narių yra lyginiai?
A) 673 **B)** 674 **C)** 1010 **D)** 1011 **E)** 1347

25. Kubo formos ledkalnio lygiai 90% yra po vandeniu, o virš vandens kyšo tik viena ledkalnio viršūnė ir nepilnai matomos trys jo briaunos. Tų briaunų matomų dalių ilgiai yra 24 m, 25 m ir 27 m. Koks yra ledkalnio briaunos ilgis?
A) 30 m **B)** 33 m **C)** 34 m **D)** 35 m **E)** 39 m

26. Auksė ryte užsuko į ledainę, siūlančią 16 ledų rūšių, ir rinkosi, kurių dviejų rūšių ledų nori. Vakare Auksė vėl užsuko į ledainę ir rinkosi, kurių trijų rūšių ledų nori. Iki vakaro kai kurių rūšių ledų ledainėje neliko, bet Auksė ryte ir vakare turėjo po tiek pat būdų pasirinkti. Kelių rūšių ledų neliko ledainėje iki antrojo Auksės apsilankymo?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

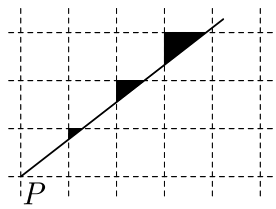
27. Tomas taip perlenkė kvadratinį popieriaus lapą, kurio kraštinė yra 1 dm, dviejose vietose, kad dvi kvadrato kraštinės sutapo to kvadrato įstrižainėje (žr. pav.). Koks yra gautojo keturkampio plotas (dm^2)?



A) $2 - \sqrt{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\sqrt{2} - 1$ **D)** $\frac{7}{10}$ **E)** $\frac{3}{5}$

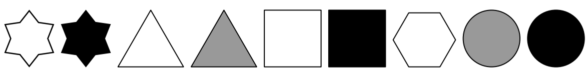
28. Iš dešimties skaičių $2, 3, \ldots, 11$ lygiai aštuoni yra natūraliojo skaičiaus N dalikliai. Kokie gali būti tie du iš 10 skaičių, iš kurių skaičius N nesidalija?
A) 2 ir 3 **B)** 4 ir 5 **C)** 6 ir 7 **D)** 7 ir 8 **E)** 10 ir 11

29. Plokštuma padalyta į kvadratinius langelius. Tiesė, nubrėžta per langelio viršūnę P, ir langelių kraštinės riboja tris užtušuotus trikampius, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra šių trikampių plotų santykis?

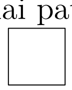
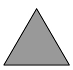
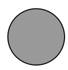


A) 1 : 2 : 3 **B)** 1 : 2 : 4 **C)** 1 : 3 : 9 **D)** 1 : 4 : 8 **E)** Kitas atsakymas

30. Gervazas ir Protazas nori sužinoti, kuri iš pavaizduotųjų figūrų labiausiai patinka Ambraziejui.



Gervazas žino, kad Ambraziejus atskleidė Protazui tos figūros formą. Protazas žino, kad Ambraziejus atskleidė Gervazui tos figūros spalvą. Gervazas pasakė Protazui: „Nežinau Ambraziejaus mėgstamiausios figūros, bet žinau, kad ir tu nežinai.” Protazas atsakė: „Ką tik aš nežinojau, kokia tai figūra, bet dabar jau žinau.” Į tai Gervazas atsakė: „Dabar jau žinau ir aš.” Kuri figūra labiausiai patinka Ambraziejui?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Senjoro užduočių sprendimai

1. (D) 8

! Duotojo reiškinio reikšmė dalijasi iš $2 \cdot 5 = 10$. Todėl ji baigiasi nuliu. Norint rasti jos priešpaskutinį skaitmenį, patogu daugiklius 2 ir 5 atskirti:

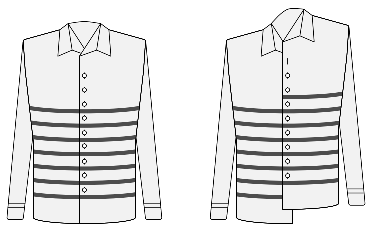
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (2 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 10 \cdot 12 \cdot 24 = 10 \cdot \ldots 8 = \ldots 80.$$

Sandaugos $12 \cdot 24$ paskutinį skaitmenį 8 galima nustatyti, žiūrint tik į dauginamųjų paskutinius skaitmenis: $2 \cdot 4 = 8$. Nėra sunku ir tiksliai rasti šios bei pradinės sandaugos reikšmes: $12 \cdot 24 = 12 \cdot 12 \cdot 2 = 144 \cdot 2 = 288$ ir $10 \cdot 288 = 2880$.

Vadinasi, ieškomas skaičius lygus $8 + 0 = 8$.

2. (A) 0

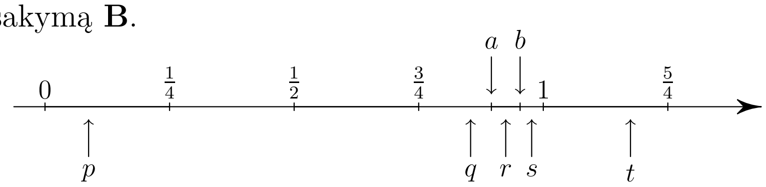
! Daug konkurso dalyvių rinkosi atsakymą **D**, greičiausiai tiesiogiai remdamiesi paveikslėliu. Bet pastebėkime, kad marškinių raštą sudaro 7 dryžiai. Blogai užsagsčius marškinius, pirmojo nuo apačios dryžio vienas galas liko laisvas, o kitas sutapo su antrojo dryžio vienu galu. Antrojo dryžio kitas galas sutapo su vienu trečiojo galu, ir t. t. Vadinasi, dryžiai nesudarė jokių uždarų žiedų, bet vientisą liniją – spiralę – su dviem laisvais galais marškinių viršuje ir apačioje.



3. (B) q

? Kadangi $a > 0$ ir $b < 1$, tai $ab < a$. Kita vertus, b yra pakankamai arti vieneto, todėl ab turėtų būti pakankamai arti a. Tai galima išreikšti ir tiksliau: intervalas (ab, a) sudaro tokią pačią intervalo $(0, a)$ dalį, kokią intervalas $(b, 1)$ sudaro intervale $(0, 1)$. „Iš akies“ ab galėtų sutapti su q.

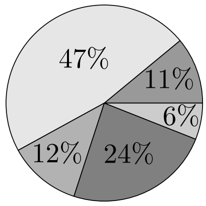
Renkamės atsakymą **B**.



! Remiantis **?** dalimi akivaizdu, kad p yra gerokai toliau nuo ab nei q, o s ir t – toliau nuo ab nei r. Tačiau būkime atsargesni, atmesdami r. Gal nors $ab < a$ ir $q < a$, yra įmanoma situacija, kad skaičius $ab \in (q, a)$ yra arčiau skaičiaus r nei skaičiaus q, t. y. dešinėje nuo $\frac{q+r}{2}$? Tačiau paveikslėlyje galima įžiūrėti, kad $\frac{q+r}{2}$ (vidurys tarp q bei r) yra kairėje nuo a, bet taip arti nuo a, kad intervalas $\left(\frac{q+r}{2}, a\right)$ yra gerokai – bent kelis kartus – mažesnis net už ir taip mažą intervalą $(b, 1)$. Tai reiškia, kad jei $ab \in \left[\frac{q+r}{2}, a\right)$, tai skaičių 1 padauginus iš b jis sumažėja labiau (kartais) nei iš b padaugintas skaičius a. Vadinasi, galime atmesti r ir užtikrintai pasirinkti q.

4. (A) 6%

! Pradėjus nuo informacijos apie mokinius dviratininkus ir važiuojančiuosius viešuoju transportu, galima ir pasimesti: lieka per daug galimybių. Tačiau diagramoje tik apie du skaičius galima būtų pasakyti, kad jie apytiksliai sutampa: 11% ir 12%. Tada mokiniams, važiuojantiems dviračiu, viešuoju transportu bei paspirtukais, lieka skaičiai 6%, 24%, 47%. Tik vienas iš jų yra apytiksliai dvigubai didesnis už kitą: 47 už 24. Paspirtukininkams lieka skaičius 6%.



5. (C) 24

? Tikrinkime duotuosius atsakymus.

Jei $A+B+C+D+E \leqslant 14$, tai $\overline{A00}+\overline{B00}+\overline{C00}+\overline{D00}+\overline{E00} \leqslant 1400$. Pereidami nuo $\overline{A00}$ prie $\overline{ABC}$, nuo $\overline{B00}$ prie $\overline{BCD}$, ir t. t., kiekvieną skaičių padidinsime mažiau nei 100. Todėl

$$\overline{ABC}+\overline{BCD}+\overline{CDE}+\overline{DEA}+\overline{EAB} \leqslant 1400+500 < 2664.$$

Jei $A+B+C+D+E \geqslant 34$, tai

$$\overline{ABC}+\overline{BCD}+\overline{CDE}+\overline{DEA}+\overline{EAB} \geqslant$$

$$\geqslant \overline{A00}+\overline{B00}+\overline{C00}+\overline{D00}+\overline{E00} \geqslant 3400 > 2664.$$

Liko vienintelė galimybė $A+B+C+D+E=24$.

Renkamės atsakymą **C**.

! Patogu užrašyti $\overline{ABC}=100A+10B+C$. Analogiškai per skaitmenis išreiškę ir kitus triženklius skaičius, visų penkių skaičių sumą galime užrašyti taip:

$$2664 = \overline{ABC}+\overline{BCD}+\overline{CDE}+\overline{DEA}+\overline{EAB} =$$

$$= 100(A+B+C+D+E)+10(B+C+D+E+A)+(C+D+E+A+B) =$$

$$= (A+B+C+D+E)(100+10+1) = 111(A+B+C+D+E),$$

$$A+B+C+D+E = 2664:111 = (2220+444):111 = 20+4 = 24.$$

!! Įsivaizduokime, kad penki triženkliai skaičiai sumuojami stulpeliu. Pagal vienetų (dešinįjį) stulpelį gauname, kad $A+B+C+D+E=\ldots 4$. Čia vietoj daugtaškio turi būti skaičius x (galbūt 0), kurį paliekame mintyse. Tada pagal dešimčių stulpelį gauname, kad

$$\begin{array}{r} A\;B\;C \\ +\;B\;C\;D \\ C\;D\;E \\ E\;D\;A \\ D\;A\;B \\ \hline 2\;6\;6\;4 \end{array}$$

$$A+B+C+D+E+x=\ldots 6, \qquad \ldots 4+x=\ldots 6,$$

$$0 \leqslant x = \ldots 6 - \ldots 4 = \ldots 2, \qquad A+B+C+D+E=\ldots 24.$$

Kadangi $A+B+C+D+E \leqslant 9\cdot 5 = 45$, tai $A+B+C+D+E=24$.

6. (E) 7070

! Duotosios trupmenos skaitiklio visi trys nariai 1010, 2020, 3030, nepakelti kvadratu, dalijasi iš 1010, o pakelti kvadratu – iš 1010^2. Trupmenos vardiklis dalijasi iš 1010. Prastinant trupmeną šiuos daugiklius verta iškelti. Nors tai nebūtina, dėl patogumo pažymėkime $a = 1010$. Gauname:

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020} = \frac{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2}{2a} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot (1 + 2^2 + 3^2)}{2a} = \frac{14a^2}{2a} = 7a = 7070.$$

7. (D) 1000

? Jei turėtume ne trijų, o dviejų natūraliųjų skaičių $a \leqslant b$ sandaugą, pavyzdžiui, $ab = 100$, ir reiktų rasti didžiausią galimą a reikšmę, tai ją gautume, kai a ir b skirtumas yra mažiausias, ir, jei tai iš viso įmanoma, kai $a = b$. Pavyzdyje tai $a = 10$: jei $a > 10$, tai $ab \geqslant a^2 > > 100$. Todėl pastebėjus, kad uždavinio sąlygą tenkina $a = b = c = 100$, būtų galima spėti, kad taip analogiškai gauname didžiausią b reikšmę 100. Beveik penktadalis sprendusiųjų šį atsakymą ir pasirinko. Taip iš tiesų (ir dėl pakankamai analogiškų priežasčių) gauname didžiausią skaičiaus a reikšmę – bet ne viduriniojo skaičiaus b.

Tikrinkime duotus atsakymus, pradėdami nuo didžiausio **E)** 2000. Jei $b = 2000$, tai $c \geqslant 2000$ ir

$$abc \geqslant 1 \cdot 2000 \cdot 2000 = 2000^2 = 4\,000\,000 > 1\,000\,000.$$

Todėl $b \neq 2000$.

Jei **D)** $b = 1000$, tai analogiškos nelygybės

$$abc \geqslant 1 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1000^2 = 1\,000\,000$$

uždavinio sąlygai jau neprieštarauja, bet leidžia suvokti, kad reikiamą lygybę gausime, tik jei $a = 1$, $c = 1000$. Taip gauname trejetą $(a, b, c) = (1, 1000, 1000)$. Jis tenkina uždavinio sąlygą. Kitų atsakymų jau galime netikrinti, nes jie mažesni.

Renkamės atsakymą **D**.

! Kad gautume kuo didesnį b, atsižvelkime į mažiausias galimas a ir c reikšmes:

$$a \geqslant 1, \qquad c \geqslant b, \qquad 1\,000\,000 = abc \geqslant 1 \cdot b \cdot b = b^2,$$

$$b \leqslant \sqrt{1\,000\,000} = 1000.$$

Kad paskutinė nelygybė virstų lygybe, imkime $a = 1$ ir $c = b$. Taip gauname tinkamą skaičių trejetą $(a, b, c) = (1, 1000, 1000)$. Vadinasi, didžiausia b reikšmė yra 1000.

8. (E) 4

! Pradinius kvadratinių ir trikampių popierėlių skaičius atitinkamai pažymėkime k ir t. Tada $k + t = 10$. Perkirpus tris kvadratus, kvadratų skaičius sumažėjo 3, o trikampių – padidėjo $3 \cdot 2 = 6$. Bendras gautųjų figūrų viršūnių skaičius lygus

$$42 = 4(k - 3) + 3(t + 6) = 4k + 3t + 6 = 4(10 - t) + 3t + 6 = 46 - t,$$

$$t = 46 - 42 = 4.$$

!! Kiekvienas iš 13 popierėlių turi tris viršūnes, o jei yra kvadratinis, tai turi dar vieną papildomą viršūnę. Todėl bendras viršūnių skaičius 42 lygus $13 \cdot 3 = 39$ plius tokių papildomų viršūnių skaičius. Papildomų viršūnių, o todėl ir kvadratinių popierėlių yra $42 - 39 = 3$. Vadinasi, iki sukarpymo jų buvo $3 + 3 = 6$, o trikampių popierėlių buvo $10 - 6 = 4$.

9. (D) $\frac{KM}{PD}$

! Kad nesusipainiotume, išskaidykime sprendimą į žingsnelius:

1) P pelių sveria K kg;

2) viena pelė sveria $K : P$ kg;

3) M pelių sveria $K : P \cdot M$ kg;

4) D dramblių sveria $K : P \cdot M$ kg;

5) vienas dramblys sveria $K : P \cdot M : D = \frac{KM}{PD}$ (kg).

10. (E) $\frac{1}{3}$

! Kiekvienas kauliukas gali atvirsti bet kuria iš 6 savo sienelių, todėl galime sudaryti $6 \cdot 6 = 36$ (vienodai galimų) baigčių aibę. Suskaičiuokime palankias baigtis. Kadangi kauliukai turi po dvi raudonas sieneles, tai įvykiui, kad kauliukai atvirto ta pačia raudona spalva, palankios $2 \cdot 2 = 4$ baigtys. Taip pat po 4 baigtis yra palankios įvykiams, kad abu kauliukai atvirto žalia arba mėlyna spalva. Iš viso gauname $4 + 4 + 4 = 12$ įvykiui, kad kauliukai atvirto ta pačia spalva, palankių baigčių ir tikimybę

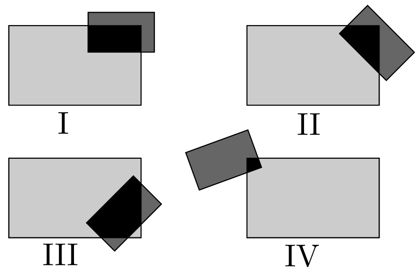
$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

!! Kiekvienai iš trijų duotųjų spalvų tikimybė, kad vienas kauliukas atvirto ta spalva, lygi $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (6 sienelės – 6 baigtys, dvi tos spalvos sienelės – dvi palankios baigtys). Kiekvienai iš trijų duotųjų spalvų du įvykiai, kad vienas kauliukas atvirto ta spalva ir kad kitas kauliukas atvirto ta spalva, yra nepriklausomi, todėl tikimybė, kad ta spalva atvirto abu kauliukai, lygi $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Konkurso dalyviai atsakymą $\frac{1}{9}$ rinkosi dažniau nei teisingąjį. Galbūt jie neatkreipė dėmesio, kad taip suskaičiuota tikimybė apibūdina įvykį, kad kauliukai atvirto ta pačia *duota* (konkrečia) spalva, o ne kad jie atvirto ta pačia *bet kuria* (nefiksuota) spalva.

Kadangi kiekvienai iš trijų spalvų tikimybė, kad kauliukai atvirto ta spalva, yra $\frac{1}{9}$, tai tikimybė, kad kauliukai atvirto ta pačia (bet kuria) spalva, lygi $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

11. E Visais atvejais I-IV skirtumas $D - M$ yra toks pat



! Daugiau nei trečdalis sprendusiųjų pasirinko atsakymus **C** ir **D**. Šie atsakymai atitinka atvejus III ir IV: čia stačiakampių bendros dalies plotas yra atitinkamai didžiausias ir mažiausias. Galima įsitikinti, kad tada $D + M$ reikšmė yra atitinkamai mažiausia ir didžiausia. Tačiau uždavinyje klausiama apie skirtumą $D - M$, o ne sumą.

Kad būtų aiškiau, pažymėkime nežinomas reikšmes. Didžiojo ir mažojo stačiakampio plotus atitinkamai pažymėkime D_0 ir M_0, o stačiakampių bendros dalies plotą – B. Visais atvejais I-IV skaičiai D_0 ir M_0 yra tie patys, o B reikšmės skiriasi. Visais keturiais atvejais

$$D = D_0 - B, \qquad M = M_0 - B, \qquad D - M = (D_0 - B) - (M_0 - B) = D_0 - M_0.$$

Skirtumas $D - M$ nepriklauso nuo B, bet tik nuo stačiakampių fiksuotų plotų. Vadinasi, skirtumo $D - M$ reikšmė visais keturiais atvejais I-IV yra ta pati.

12. C 3

! Atverstą skaičiumi ar herbu monetą žymėkime atitinkamai S ir H. Turime pradinę monetų padėtį $SSSSS$, o po pirmojo ėjimo neišvengiamai turėsime padėtį $HHHSS$ (monetų tvarkos kol kas galime nepaisyti). Po antrojo ėjimo jau gali būti visaip, bet galimybes dar nesunku perrinkti: jei apversime abi monetas S ir vieną H, tai gausime keturias H ir vieną S; jei apversime tik vieną S ir dvi H, tai gausime dvi H ir tris S; o jei neapversime nė vienos S, tai gausime padėtį $SSSSS$. Šia perranka ne tik įsitikinome, kad dviejų ėjimų tikrai nepakanka, bet ir aptikome būdą, kaip atversti herbu visas monetas trimis ėjimais. Aptikome, kad po antrojo ėjimo galime gauti lygiai tris monetas S, o trečiuoju ėjimu belieka jas ir apversti:

$$\boldsymbol{SSS}SS \longrightarrow H\boldsymbol{HHS}S \longrightarrow H\boldsymbol{SS}H\boldsymbol{S} \longrightarrow HHHHH$$

Vadinasi, ieškomas mažiausias ėjimų skaičius yra 3.

Įdomu, kad konkurso dalyviai daug dažniau rinkosi klaidingą atsakymą 5 nei klaidingą atsakymą 4. Tai susiję su galimybe monetas apversti herbu ne tik trimis, bet ir penkiais ėjimais, kai lygiai keturiais ėjimais to padaryti niekaip nepavyks. Tai galima įrodyti be perrankos, pastebėjus, kad kaskart apvertus tris monetas, tarp kurių yra x monetų H, monetų H skaičius pakinta nelyginiu skaičiumi $(3 - x) - x = 3 - 2x$. Taigi monetų H kiekio lyginumas, atliekant ėjimus, visą laiką kaitaliojasi, ir tas kiekis gali būti 5 tik po nelyginio ėjimų skaičiaus.

13. (B) 2 km

! Atstumas iki Ausų ties pirmuoju stulpu yra 3 km, o ties antruoju – 6 km. Todėl nuo vieno stulpo iki kito yra $6 - 3 = 3$ (km). Tokią pačią išvadą galima padaryti ir žiūrint į rodykles, nukreiptas į Bausus. Žinoma, ir atstumas iki Medausų, keliaujant nuo vieno stulpo iki kito, turi pakisti tiek pat, t. y. 3 km. Kadangi vienoje rodyklėje tas atstumas yra 1 km, tai kitoje turėtų būti arba 4 km (pagal $1 + 3 = 4$), arba 2 km (pagal $1 - 3 = -2$).

Kurį variantą pasirinkti? Pirmasis variantas (atsakymas **D**, kuris tarp konkurso dalyvių buvo antras populiariausias) reikštų, kad, einant nuo pirmojo stulpo prie antrojo, atstumas nuo Ausų ir Medausų kinta vienodai – visą laiką didėja. Tačiau pirmojo stulpo rodyklės rodo į Ausus ir Medausus priešingomis kryptimis. Taigi einant nuo pirmojo stulpo ir tolstant nuo Ausų pradžioje yra artėjama link Medausų. Vadinasi, nuo antrojo stulpo iki Medausų yra 2 km.

!! Pakanka pasinaudoti trijų rodyklių informacija:

1) nuo Ausų iki pirmojo stulpo yra 3 km;

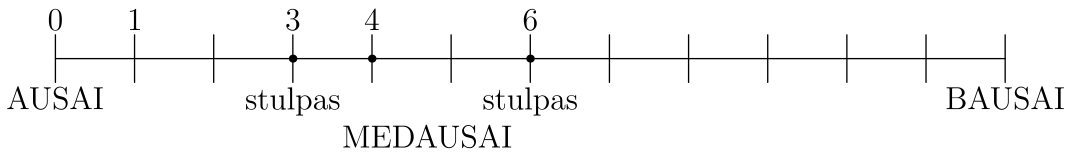
2) Ausai ir Medausai yra skirtingose pusėse nuo pirmojo stulpo;

3) nuo pirmojo stulpo iki Medausų yra 1 km;

4) nuo Ausų iki antrojo stulpo yra 6 km.

Vadinasi, einant keliu iš Ausų pirmasis stulpas pasirodo už 3 km, Medausai – dar už 1 km, o antrasis stulpas pasirodo už 6 km nuo Ausų, t. y. už $6 - 3 - 1 = 2$ km nuo Medausų.

Kad būtų aiškiau, situaciją galima pavaizduoti tiesėje:



14. (B) 1

? Spėliodami trejetus (a, b, c), galime atmesti klaidingus atsakymus.

Atrodytų, lengviausia atmesti klaidingą atsakymą **A**. Duotasis reiškinys virsta 0, kai $a = b = c$. Nepaisant to, konkurso dalyviai dažniausiai rinkosi būtent šį atsakymą. Greičiausiai jie prisiminė, kad skaičiaus kvadratas yra teigiamas skaičius, bet pamiršo, kad jis gali būti lygus ir nuliui. Ar bent nepatikrino šios galimybės, nepatikėję, kad visi trys duotojo reiškinio nariai gali virsti nuliais vienu metu.

Jei imsime $b = a$ ir $c = 0$, tai gausime $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2a^2$. Pasirinkimai $a = 1$ ir $a = 2$ leidžia atmesti atsakymus **C** ir **E**.

Atsakymą **D** leidžia atmesti $(a, b, c) = (0, 1, 2)$.

Renkamės atsakymą **B**.

! Įrodykime, kad kai skaičių trejetas (a, b, c) sveikasis, tai $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \neq 1$. Tarkime, kad yra priešingai: trejetas (a, b, c) sveikasis ir $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 1$.

Yra vienintelis būdas (dėmenų tvarkos tikslumu) užrašyti skaičių 1 kaip trijų tiksliųjų kvadratų sumą: $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$. Taigi du iš skaičių $a - b$, $b - c$ ir $c - a$ lygūs 0. Tačiau visų trijų skaičių suma lygi $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$. Todėl ir trečiasis iš šių skaičių lygus 0, o tada $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 \neq 1$. Gavome prieštarą. Vadinasi, atsakymas **B** teisingas.

Sujungę šį sprendimą su **?** dalimi, gausime pilną uždavinio sprendimą.

15. (**B**) 199

! Konkurso dalyviai gana dažnai rinkosi atsakymą **E**. Jis iš tiesų vertas dėmesio. Juk jei a būtų, pavyzdžiui, dviženklis, tai negalėtume nustatyti, keliaženklis yra a^2 – triženklis ($10^2 = 100$) ar keturženklis ($90^2 = 8100$). Ir net jei žinotume a pirmąjį skaitmenį, o tas skaitmuo būtų 3, tai informacijos nepakaktų: skaičius $30^2 = 900$ triženklis, o skaičius $32^2 = 2^{10} = 1024$ jau keturženklis. Todėl stenkimės mąstyti griežtai.

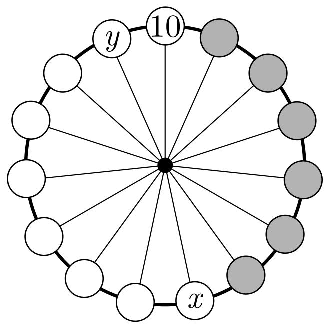
Pirmiausiai nagrinėkime tik skaičiaus a skaitmenų skaičių. Mažiausias šimtaženklis skaičius yra skaičius $m = 100\ldots0$ su 99 nuliais, o didžiausias – skaičius $n = 99\ldots9$ su 100 devynetų. Juos patogu užrašyti kitaip: $m = 10^{99}$ ir $n = 10^{100} - 1$. Tada a^2 yra tarp skaičių $m^2 = 10^{99\cdot2} = 10^{198}$ ir $n^2 < (n+1)^2 = 10^{200}$. Skaičius $m^2 = 100\ldots0$ turi 199 skaitmenis, o $(n+1)^2 = 100\ldots0$ yra mažiausias natūralusis skaičius, turintis 201 skaitmenį. Vadinasi, a^2 gali turėti tik 199 arba 200 skaitmenis. T. y. vienas iš atsakymų **B**, **C** ir **E** yra teisingas.

Pirmieji du skaičiaus a skaitmenys 29 reiškia, kad a yra arba pakankamai mažas, kad būtų teisingas atsakymas **B**, arba pakankamai didelis, kad būtų teisingas atsakymas **C**, arba šios informacijos vis tiek nepakanka. Teisingas pirmasis variantas, nes $a = 29\ldots$ yra mažesnis už skaičių $300\ldots0$ su 99 nuliais, todėl $a^2 < (3\cdot10^{99})^2 = 9\cdot10^{198} = 900\ldots0$, kur pastarasis skaičius baigiasi 198 nuliai, todėl turi 199 skaitmenis. Vadinasi, a^2 garantuotai turi 199 skaitmenis.

Trumpas, formalus sprendimas atrodytų taip:

$$10^{99} < a < 3\cdot10^{99} \implies 10^{198} < a^2 < 9\cdot10^{198} < 10^{199}.$$

16. (**A**) 0



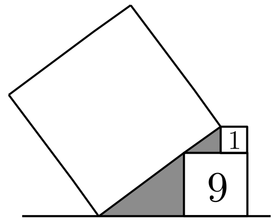
! Šis uždavinys buvo sunkus konkurso dalyviams: teisingas atsakymas nebuvo populiarus. Spėliojant galima dėlioti rate konkrečius skaičius ir mėginti gauti visų skaičių sumą, lygią 75, 216, 365 arba 2020. Bet tai nepavyks. Yra viena triviali galimybė: kai visi rato skaičiai lygūs 10. Tada uždavinio sąlyga tenkinama, tačiau visų skaičių suma lygi $10\cdot15 = 150$. Tai nėra vienas iš 4 skaičių, kuriuos reikia gauti. Užuot spėlioję, pamėginkime kuo daugiau sužinoti apie skaičių ratą, pasitelkę logiką.

Pastebėkime, kad be žinomo skaičiaus 10 galime vienareikšmiškai nustatyti ir kitus užrašytus skaičius. Du iš jų pažymėkime x ir y, kaip parodyta paveikslėlyje. Šešių skaičių, esančių tarp skaičių 10 ir x pilkuose skrituliuose, sumą pažymėkime s. Tada septynių skaičių suma $10 + s$ yra lygi septynių skaičių sumai $s + x$. Vadinasi, $x = 10$.

Samprotaujant analogiškai, galima pasirinkti bet kuriuos du skritulius, kuriuos skiria lygiai šeši skrituliai, ir įrodyti, kad juose įrašyti skaičiai lygūs. Taigi $y = x$. Gavome, kad gretimi skaičiai y ir 10 lygūs. Vėlgi, analogiškai samprotaujant, galima įrodyti, kad bet kurie du gretimi rato skaičiai lygūs. Vadinasi, visi rato skaičiai lygūs. Jau minėjome, kad tokiu atveju visų skaičių suma lygi 150. Sumos reikšmių 75, 216, 365 ir 2020 gauti neįmanoma.

Įrodėme, kad visi rato skaičiai lygūs. Įdomu, kad šį teiginį galima apibendrinti: pakeitus uždavinio duomenis 15 (bendras skaičių kiekis) ir 7 (gretimų skaičių kiekis) bet kuriais dviem natūraliaisiais skaičiais m ir n, kur $n < m$, visi rato skaičiai vis tiek turėtų būti lygūs, jei tik m ir n būtų tarpusavyje pirminiai.

17. (B) 80



! Norėtųsi tikėtis, kad didžiojo kvadrato kraštinės ilgis yra sveikasis skaičius. Tada tiktų tik atsakymai **A**, **C** ir **E**. Galbūt todėl šiuos atsakymus pasirinko beveik pusė sprendusiųjų. Bet pamėginkime mąstyti griežtai.

Mažesniųjų kvadratų kraštinių ilgiai yra $\sqrt{1} = 1$ ir $\sqrt{9} = 3$. Nagrinėkime du pilkus stačiuosius trikampius (žr. pav.). Paveikslėlyje nesunku pastebėti, kad šie trikampiai panašūs. Tuo nesunku ir įsitikinti: trikampių atitinkami statiniai lygiagretūs, nes tokios yra atitinkamos mažesniųjų kvadratų kraštinės, o įžambinės apskritai yra vienoje tiesėje. Todėl pilkųjų trikampių atitinkami kampai lygūs, o trikampiai yra panašūs.

Pilkųjų trikampių vertikalių statinių ilgiai yra 1 ir 3, todėl panašumo koeficientas yra $3 : 1 = 3$. Mažesniojo trikampio kito statinio ilgis yra $3 - 1 = 2$, o įžambinės ilgis yra $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Vadinasi, didesniojo trikampio įžambinės ilgis yra $3\sqrt{5}$. Abi įžambinės sudaro didžiojo kvadrato kraštinę, todėl jos ilgis yra $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, o kvadrato plotas lygus $(4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 = 80$.

18. (D) $n^2 + 2n + 5$

? Tikrinkime atsakymus. Gal su maža n reikšme, pavyzdžiui, $n = 0, 1, 2$, vienas ar kitas reiškinys dalijasi iš 3 – tada jį galima atmesti. Taip nesunkiai gaunama, kad kai $n = 2$, tai **C)** $5n + 2 = 12$ ir **E)** $2n^3 + 5 = 21$ dalijasi iš 3.

Atsakymai **A** ir **B** atrodo grėsmingiau. Galbūt todėl konkurso dalyviai rinkosi juos dažniau nei **C** ir **E**. Tačiau lengva apskaičiuoti reiškinio **B)** $5n^{12} - n^{11} + 2$ reikšmę 6, kai $n = 1$. Ši reikšmė dalijasi iš 3. Reiškinio **A)** $n^{12} + 2n^{11} + 1$ reikšmės nesidalija iš 3, kai $n = 0$ ir $n = 1$. Kai $n = 2$, reikšmę suskaičiuoti jau sunkiau, atsiranda didesni skaičiai. Taupydami laiką nepamirškime, kad yra dar viena n reikšmė, su kuria aritmetiniai veiksmai itin paprasti. Tai $n = -1$. Su ja atsakymas **A** įgyja reikšmę 0, kuri dalijasi iš 3.

Vadinasi, atsakymai **A**, **B**, **C**, **E** netinka. Renkamės atsakymą **D**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, įrodykime, kad $f(n) = n^2 + 2n + 5$ nesidalija iš 3 jokiam sveikajam n. Pastebėkime, kad $f(n)$ nesidalija iš 3, kai $n = 0, 1, 2$. To iš esmės ir pakanka, nes 0, 1 ir 2 yra visos įmanomos bet kurio sveikojo skaičiaus dalybos iš 3 liekanos. Įsitikinkime tuo.

Kiekvieną sveikąjį skaičių n galima užrašyti pavidalu $3k + r$, kur skaičius k sveikasis, o r – skaičiaus n dalybos iš 3 liekana. Tada

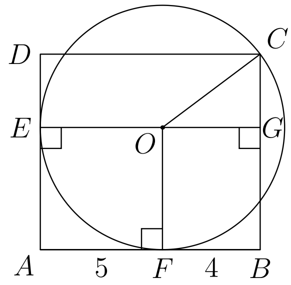
$$f(n) = (3k + r)^2 + 2(3k + r) + 5 = 9k^2 + 6kr + 6k + f(r).$$

Skaičius $9k^2 + 6kr + 6k$ neišvengiamai dalijasi iš 3. Todėl $f(n)$ dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai $f(r)$ dalijasi iš 3. Tačiau jau patikrinome, kad $f(r)$ iš 3 nesidalija visoms galimoms r reikšmėms 0, 1, 2.

Taip įrodėme, kad tikrinant $f(n)$ dalumą iš $m = 3$ galima vietoj skaičiaus n imti jo dalybos iš m liekaną. Šis teiginys teisingas bet kokiam daugianariui f su sveikaisiais koeficientais ir bet kokiam natūraliajam m. Taigi patikrinus, kad $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ nesidalija iš 3, galima daryti išvadą, kad $f(n)$ nesidalija iš 3 jokiam sveikajam n.

19. (**C**) 72

! Kad rastume stačiakampio plotą, rasime jo kraštinių ilgius. Tam stačiakampį padalykime į parankių savybių turinčias mažesnes figūras. Pažymėkime apskritimo centrą O ir sujunkime jį su apskritimo ir stačiakampio bendrais taškais. Iš O išveskime statmenį į stačiakampio kraštinę BC (žr. pav.).



Kadangi apskritimo spinduliai statmeni atitinkamoms apskritimo liestinėms, tai keturkampis $AEOF$ turi tris stačiuosius kampus. Tada jo ketvirtas kampas EOF taip pat statusis, o šis keturkampis yra stačiakampis. Analogiškai ir keturkampis $BFOG$ yra stačiakampis.

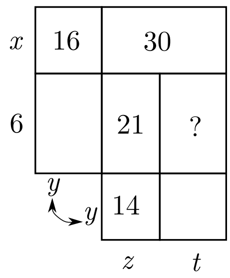
Vadinasi, apskritimo spindulio ilgis lygus $OE = AF = 5$. Gauname $OF = OC = 5$. Taip pat $OG = BF = 4$ ir $BG = OF = 5$. Pritaikykime Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui CGO:

$$5^2 = OC^2 = OG^2 + CG^2 = 4^2 + CG^2, \qquad CG = \sqrt{25-16} = 3.$$

Taigi stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai yra $AB = AF+FB = 5+4 = 9$ ir $BC = BG+GC = $ $= 5+3 = 8$, o jo plotas lygus $9 \cdot 8 = 72$.

20. (**B**) 24

! Didžiojo stačiakampio gretasienio išklotinėje pažymėkime atkarpų ilgius x, y, z, t (žr. pav.). Tada



$$xy = 16, \qquad x(z+t) = 30, \qquad 6z = 21, \qquad yz = 14 \qquad 6t = ?.$$

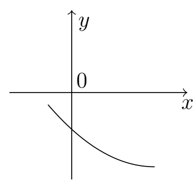
Vieną po kito galime rasti nežinomuosius: $z = 21 : 6 = \frac{7}{2}$, $y = 14 : z = 4$, $x = 16 : y = 4$, $t = 30 : x - z = 4$, $? = 6t = 24$. Sprendimą galima užrašyti ir kitaip:

$$6x = \frac{xy \cdot 6z}{yz} = \frac{16 \cdot 21}{14} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 7)}{2 \cdot 7} = (2 \cdot 3) \cdot 4, \qquad x = 4,$$

$$z + t = \frac{30}{x} = \frac{15}{2}, \qquad 6z + 6t = 6 \cdot \frac{15}{2} = 3 \cdot 15 = 45,$$

$$? = 6t = 45 - 6z = 45 - 21 = 24.$$

21. (D) bc



? Nesunku įsivaizduoti, kaip atrodo parabolė: jos šakos nukreiptos aukštyn (todėl $a > 0$) ir kiekviena kerta abscisių ašį, kildama nuo parabolės viršūnės, kuri yra IV ketvirtyje ($x > 0$, $y < 0$). Sankirtos su abscisių ašimi yra $(x_1, 0)$ ir $(x_2, 0)$, kur $x_1 < 0$ ir $x_2 > 0$. Be to, x_1 yra arčiau nulio nei x_2 (todėl $x_1 + x_2 > 0$). Taip galėtų atrodyti, pavyzdžiui, parabolė $y = x^2$, tik pastumta dešinėn ir žemyn.

Nors negalime tiksliai nustatyti a, b, c, x_1, x_2, bet galime pamėginti pasirinkti juos taip, kad parabolės $y = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2+bx+c$ padėtis primintų pavaizduotąją. Pavyzdžiui, imkime $a = 1$ (parabolės šakos nukreiptos aukštyn), $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (eidamos per taškus $(-1, 0)$ ir $(2, 0)$, šakos atrodo panašiai kaip pavaizduotosios parabolės šakos). Gauname

$$ax^2 + bx + c = (x - (-1))(x - 2) = x^2 - x - 2, \qquad bc = (-1) \cdot (-2) = 2 > 0.$$

Galima išnagrinėti ir bendrą atvejį: tada $a > 0$, $b = -a(x_1 + x_2) < 0$, $c = ax_1x_2 < 0$, $b + c < 0$, $ac < 0$, $bc > 0$, $ab < 0$.

Konkrečią parabolę galima pasirinkti ir kitaip: imkime $y = x^2$, pastumtą per 1 dešinėn (taip gauname $y = (x - 1)^2$), o tada pastumtą žemyn tiek, kad jos sankirta su ordinačių ašimi atsidurtų žemiau koordinačių pradžios. Taip gauname, pavyzdžiui, $y = (x - 1)^2 - 10 = x^2 - 2x - 9$ ir $bc = (-2)(-9) > 0$.

Renkamės atsakymą **D**.

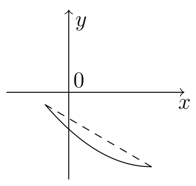
?? Norint pasirinkti atsakymą, pakanka nagrinėti parabolės ir Oy ašies sankirtos tašką $(0, y_0)$. Jis priklauso Oy ašies apatinei daliai, todėl $y_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c < 0$. Jame funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ yra mažėjanti, todėl $f'(0) = 2a \cdot 0 + b = b < 0$. Vadinasi, skaičius bc yra teigiamas kaip dviejų neigiamų skaičių sandauga.

Renkamės atsakymą **D**.

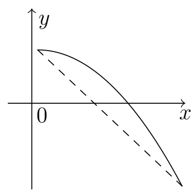
! Pamėginkime nustatyti skaičių a, b, c ženklus. Bene lengviausia pastebėti, kad $c < 0$: žr. **??** dalį.

Skaičiaus a ženklas priklauso nuo to, aukštyn ar žemyn nukreiptos parabolės šakos. Nesunku įsivaizduoti reikiamą parabolę su šakomis, nukreiptomis aukštyn. Tada $a > 0$.

Bet ar galime būti tikri, kad nėra parabolės su šakomis, nukreiptomis žemyn, kurios dalis būtų duotoji atkarpa? Einant iš kairės į dešinę, atkarpa leidžiasi, o ne kyla, todėl ji priklauso arba kairiajai šakai, nukreiptai aukštyn, arba dešiniajai, nukreiptai žemyn. Pastarąjį atvejį galime atmesti, nes šakos atkarpa būtų kitokios formos. Ji būtų išlinkusi į viršų, o ne į apačią, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Šią savybę galima tiksliau apibūdinti taip: sujungus bet kuriuos du pavaizduotosios parabolės atkarpos taškus tiesės atkarpa, ta tiesės atkarpa yra virš parabolės, o parabolei su šakomis, nukreiptomis žemyn, ta tiesės atkarpa būtų po parabole. Matematikoje vartojamos iškilosios funkcijos ir įgaubtosios funkcijos sąvokos. Pavaizduotoji parabolės atkarpa yra iškilosios funkcijos grafikas, o parabolė su šakomis, nukreiptomis žemyn, – įgaubtosios. Vadinasi, garantuotai $a > 0$.



Iškilosios funkcijos grafikas



Įgaubtosios funkcijos grafikas

Kad $b < 0$, galima įsitikinti kaip **??** dalyje. Kitas būdas yra pastebėti, kad parabolės viršūnės x koordinatė $-\frac{b}{2a}$, randama iš lygties $(ax^2 + bx + c)' = 0$, yra teigiama.

Vadinasi, $a > 0$, $b, c < 0$, $b + c < 0$, $ac < 0$, $bc > 0$, $ab < 0$.

22. (C) 5

! Pamėginkime gauti kuo mažesnį Untės miegančių galvų skaičių, eksperimentuodami ir konstruodami pavyzdį:

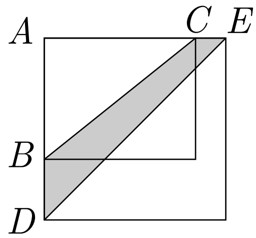
$$71 \Rightarrow 41 \Rightarrow 11 \Rightarrow 29 \Rightarrow 47 \Rightarrow 17 \Rightarrow 35 \Rightarrow 5.$$

Jei bandysime pratęsti gautąją skaičių seką arba perkurti ją, tai mažiau nei 5 galvų niekaip negausime. Bet kaip galime būti tikri, kad nepraleidome kokios nors galimybės?

Čia gali padėti skaičių dalumo savybės. Kadangi skaičiai 30 ir 18 abu dalijasi iš 6 (tai yra jų didžiausias bendrasis daliklis), tai Untės miegančių galvų skaičius visą laiką keičiasi (nesvarbu ar didėja, ar mažėja) per skaičiaus 6 kartotinį. Todėl miegančių galvų skaičiaus dalybos iš 6 liekana niekada nesikeičia. Ta liekana lygi 5, nes $71 = 66 + 5 = 6 \cdot 11 + 5$. Mažiausias neneigiamas sveikasis skaičius, kuris dalijasi iš 6 su liekana 5, yra pats skaičius 5. Vadinasi, visada miega mažiausiai penkios Untės galvos.

Kartu įrodėme, kad negali likti 1, 3 ar 7 miegančios Untės galvos. Tačiau **E)** $11 = 5 + 6$ miegančių galvų įmanoma gauti. Nenuostabu, kad šis atsakymas tarp konkurso dalyvių buvo antras populiariausias.

23. (D) $75\,\mathrm{m}^2$



! Pradinio sklypo kraštinių ilgius metrais pažymėkime a ir b. Reikia rasti ab. Išplėstojo sklypo kraštinių ilgius galima užrašyti taip: $a + 0{,}2a = 1{,}2a = \frac{6a}{5}$ ir $b+0{,}5b = 1{,}5b = \frac{3b}{2}$. Kadangi naujasis sklypas kvadratinis, tai $1{,}2a = 1{,}5b$, tačiau sprendime ši informacija nesvarbi.

Duotas keturkampio $BCED$ plotas (žr. pav.), bet kaip jį susieti su ab? Tam patogu nagrinėti trikampius ABC ir ADE. Keturkampio $BCED$ plotas lygus šių stačiųjų trikampių plotų skirtumui:

$$30 = \frac{AD \cdot AE}{2} - \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6a}{5} \cdot \frac{3b}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{9ab}{10} - \frac{ab}{2} = \frac{4ab}{10} = \frac{2ab}{5},$$

$$ab = 30 \cdot \frac{5}{2} = 75.$$

24. (A) 673

! Galima būtų skaičiuoti konkrečias sekos narių reikšmes: $L_3 = 1 + 3 = 4$, $L_4 = 3 + 4 = 7$, $L_5 = 4 + 7 = 11$, …, tačiau tai visai nebūtina. Pakanka prisiminti paprastą taisyklę: dviejų lyginių arba dviejų nelyginių skaičių suma visada lyginė, o lyginio ir nelyginio skaičių suma visada nelyginė. Simboliškai galima užrašyti:

$$L + L = L, \qquad N + N = L, \qquad N + L = N, \qquad L + N = N.$$

Vietoj lyginių ir nelyginių sekos narių L_n atitinkamai rašykime L ir N. Gauname tokią raidžių L ir N seką:

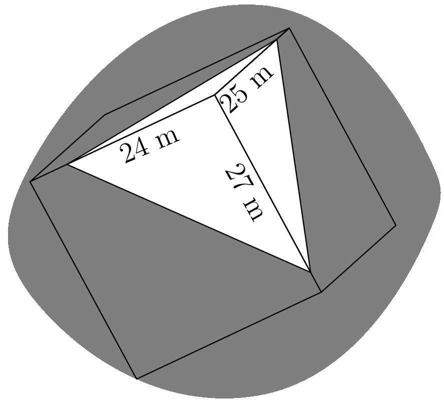
$$N, \quad N, \quad N + N = L, \quad N + L = N, \quad L + N = N, \quad N + N = L, \quad N + L = N, \quad \ldots$$

Kiekviena nauja raidė priklauso tik nuo dviejų ankstesnių. Todėl galime sustoti jau ties ketvirtuoju ir penktuoju nariais N ir N, pastebėję, kad jie tokie patys kaip pirmasis ir antrasis. Tada šeštasis narys sutampa su trečiuoju, septintasis – su ketvirtuoju, ir t. t. Taigi sekos nariai kartojasi kas tris: pirmieji trys yra N, N, L, tada vėl eina N, N, L, ir t. t. Moksliškiau galima pasakyti, kad seka periodinė, o jos periodas yra 3.

Skaičius 2019 dalijasi iš 3 (nes jo skaitmenų suma dalijasi iš 3), todėl raidžių sekos pirmus 2019 narių galima padalyti į $2019 : 3 = 673$ trejetus N, N, L. Taip gauname 673 raides L, o 2020-oji sekos raidė yra dar vieno trejeto N, N, L pirmoji raidė N. Vadinasi, raidžių sekoje tarp pirmųjų 2020 narių yra 673 raidės L, o baigtinėje sekoje $L_1, L_2, \ldots, L_{2020}$ atitinkamai yra 673 lyginiai nariai.

Paminėsime, kad skaičiai $L_1, L_2, \ldots$ matematikoje vadinami Liuka skaičiais. Jie susiję su garsesniais Fibonačio skaičiais $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

25. (A) 30 m



! Kubo briaunos ilgį pažymėkime a m. Virš vandens kyšanti ledkalnio dalis yra trikampė piramidė, kurios pagrindo trijų kraštinių ilgiai neduoti, o trijų šoninių briaunų ilgiai yra 24 m, 25 m ir 27 m. Piramidės tūris V sudaro $100\% - 90\% = 10\%$ (dešimtadalį) kubo tūrio a^3 m^3, t. y. $10V = a^3$ m^3.

Kadangi kubo sienos yra kvadratai, tai piramidės šoninės sienos yra statieji trikampiai, kurių statinių ilgiai duoti. Norint rasti piramidės tūrį V pagal žinomą formulę, reikia žinoti jos pagrindo plotą S ir į pagrindą nuleistos aukštinės ilgį h. Tada $V = \frac{Sh}{3}$. Tai galima greitai padaryti, imant kaip trikampės piramidės pagrindą vieną iš sienų, kurias jau pavadinome šoninėmis. Pavyzdžiui, imkime kaip pagrindą statųjį trikampį su statiniais 24 m ir 25 m. Tada 27 m ilgio piramidės briauna (kubo briaunos dalis) yra statmena tam naujam pagrindui (kubo sienos daliai). Vadinasi, ši briauna yra piramidės aukštinė ir

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{24 \cdot 25}{2} \cdot \frac{27}{3} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 27}{6} \ (\mathrm{m}^3),$$

$$a^3 = 10 \cdot \frac{24 \cdot 25 \cdot 27}{6} = 10 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 27 = 10 \cdot 100 \cdot 27 = 27000 = 30^3.$$

Tingint skaičiuoti $10 \cdot \frac{24 \cdot 25 \cdot 27}{6}$ reikšmę, galima pastebėti, kad šio reiškinio reikšmė nesidalija iš pirminių skaičių 11, 17, 7, 13, todėl nelygi 33^3, 34^3, 35^3, 39^3. Taip lieka atsakymas **A**.

Tačiau nesunku ir tiksliai suskaičiuoti $a = \sqrt[3]{30^3} = 30$.

26. (E) 6

? Tarkime, kad vakare buvo likę $m = 16 - n$ ledų rūšių.

Ryte Auksė turėjo $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15$ būdų pasirinkti (derinių skaičius), o vakare – $C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ būdų. Vadinasi,

$$m(m-1)(m-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 15 = 48 \cdot 15.$$

Tikrinkime atsakymus. Jei $n = 2, 3, 4, 5$, tai vienas iš skaičių m, $m-1$ ir $m-2$ lygus 13 arba 11, o $48 \cdot 15$ nei iš 11, nei iš 13 nesidalija. Todėl atsakymai **A**-**D** netinka.

Renkamės atsakymą **E**.

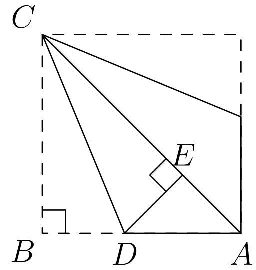
! Tarkime, kad vakare buvo likę $m = 16 - n$ ledų rūšių. Reikia rasti n. Dalyje **?** jau gavome lygybę

$$m(m-1)(m-2) = 48 \cdot 15.$$

Akivaizdu, kad $m > 2$. Kintamojo $m > 2$ funkcija $m(m-1)(m-2)$ yra didėjanti, nes tokie yra teigiami dauginamieji m, $m-1$ ir $m-2$. Taigi reikšmę $48 \cdot 15$ ši funkcija įgyja tik su viena m reikšme – tereikia ją atspėti.

Nesunku įsitikinti, kad natūraliosios reikšmės $m < 7$ per mažos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 15 < 48 \cdot 15$. Reikšmės $m = 7, 8, 9$ netinka, nes tada $m(m-1)(m-2)$ dalijasi iš 7. Pagaliau kai $m = 10$ ir $n = 6$, tai

$$m(m-1)(m-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 8 = (2 \cdot 3 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 3) = 48 \cdot 15.$$



27. (**A**) $2-\sqrt{2}$

! Kvadrato įstrižainė AC dalija gautąjį keturkampį į du trikampius. Raskime vieno iš jų – trikampio ACD – plotą S (žr. pav.). Kadangi atkarpa CD yra perlinkio linija, tai atkarpos AC taškas E, kuriame sulankstčius popieriaus lapą atsidūrė kvadrato viršūnė B, yra simetriškas viršūnei B tiesės CD atžvilgiu. Taigi trikampiai BCD ir ECD lygūs, ir $\angle CED = \angle CBD = 90°$.

Pažymėkime $BD = x$ dm. Tada

$$AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ (\text{dm}), \qquad ED = BD = x\ \text{dm},$$

$$AE = AC - CE = AC - BC = (\sqrt{2}-1)\ \text{dm},$$

$$AD = AB - BD = (1-x)\ \text{dm}.$$

Stačiajam trikampiui ADE pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{2}-1)^2 &= (1-x)^2, \\ x^2 + 3 - 2\sqrt{2} &= x^2 - 2x + 1, \\ 2x &= 2\sqrt{2} - 2, \\ x &= \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Skaičių x galima rasti ir daug greičiau, pastebėjus, kad $\angle BAC = 45°$ ir todėl statusis trikampis AED lygiašonis, $x = DE = AE = (\sqrt{2}-1)$ (dm).

Vadinasi, $S = \frac{AC\cdot DE}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (dm^2), o dėl simetrijos ieškomas keturkampio plotas lygus $2S = x\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}$ (dm^2).

!! Nagrinėkime **!** dalies paveikslėlį. Kaip ir **!** dalyje, pastebėkime, kad trikampiai BCD ir ECD lygūs. Todėl atkarpa CD yra trikampio ABC pusiaukampinė. Remiantis pusiaukampinės savybe, $BD : AD = BC : AC = 1 : \sqrt{2}$. Kadangi $BD + AD = AB = 1$ dm, tai $AD : AB = \sqrt{2} : (\sqrt{2}+1)$,

$$AD = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}\ (\text{dm}).$$

Vadinasi, trikampio ACD plotas lygus $S = \frac{AD\cdot BC}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (dm^2), o dėl simetrijos ieškomas keturkampio plotas lygus $2S = (2-\sqrt{2})$ dm^2.

28. (D) 7 ir 8

? Pamėginkime atmesti blogus atsakymus.

Lengviausia atmesti **A**. Juk jei N nesidalija nei iš 2, nei iš 3, tai jis nesidalija nei iš $4 = 2 \cdot 2$, nei iš $6 = 2 \cdot 3$, nei iš $8 = 2 \cdot 4$, nei iš $9 = 3 \cdot 3$, nei iš $10 = 2 \cdot 5$. Todėl reikiamų aštuonių daliklių N tikrai neturi – turi daugiausiai tris tokius daliklius: 5, 7, 11. Nenuostabu, kad šį atsakymą konkurso dalyviai rinkosi rečiausiai.

Panašiai galima atmesti ir atsakymą **B**. Jei N nesidalija nei iš 4, nei iš 5, tai nesidalija nei iš $8 = 4 \cdot 2$ (nes nesidalija iš 4), nei iš $10 = 5 \cdot 2$ (nes nesidalija iš 5).

Atsakymai **C** ir **E** klastingesni, ir konkurso dalyviai juos rinkosi dažniau nei **A** ar **B**.

Tarkime, kad atsakymas **C** teisingas. Tada N nesidalija nei iš 6, nei iš 7, bet dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11. Nedalumas iš 7 čia nieko nepasako, bet pastebėkime, kad N dalijasi iš 2 ir 3, nesidalydamas iš 6. Taip negali būti: jei N dalijasi iš 2 ir 3, tai dalijasi iš $2 \cdot 3 = 6$, nes skaičiai 2 ir 3 yra tarpusavyje pirminiai. Vadinasi, atsakymas **C** klaidingas.

Analogiškai atmetamas atsakymas **E**: natūralusis skaičius negali nesidalyti iš $10 = 2 \cdot 5$ (ir iš 11), bet tuo pat metu dalytis iš 2 ir 5.

Renkamės atsakymą **D**.

?? Įsitikinkime, kad atsakymas **D** tinka. Tai patvirtinantis pavyzdys būtų skaičius, kuris dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, bet ne iš 7 ir ne iš 8. Pamėginkime nustatyti tokį N, žiūrėdami, koks galėtų būti jo skaidinys pirminiais daugikliais, t. y. kokių pirminių skaičių laipsnių sandauga jis galėtų būti.

Tarp skaičiaus N pirminių daliklių privalo būti 2, 3, 5, 11, negali būti 7, o kiti pirminiai dalikliai nesvarbūs – jie nesusiję su skaičiais 2, 3, …, 11. Todėl pakanka nagrinėti išraiškas

$$N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 11^d,$$

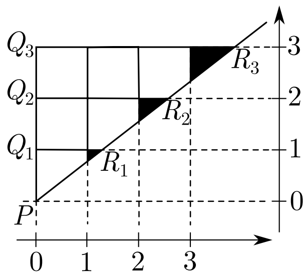
kur skaičiai a, b, c, d yra natūralieji. Toks skaičius n tikrai nesidalija iš 7, o kad nesidalytų iš $8 = 2^3$, būtina ir pakanka imti $a < 3$. Kita vertus, jei $a < 2$, tai n nesidalija iš $4 = 2^2$. Todėl turime imti $a = 2$. Taip parinktas bet koks n jau dalijasi iš 2, 3, 4, 5, $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ ir 11. Imkime $b \geqslant 2$, kad n dalytųsi ir iš 9, ir gausime reikiamą pavyzdį.

Beje, iš šio sprendimo išplaukia, kad mažiausias tinkamas N yra $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Tai yra ne kas kita, kaip skaičių 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 mažiausias bendrasis kartotinis.

! Norint pasirinkti atsakymą, pakanka įsitikinti vieno iš atsakymų teisingumu arba atmesti kitus keturis atsakymus. Atlikę ir viena, ir kita, t. y. apjungę **?** ir **??** dalis, gausime pilną sprendimą.

Jei nebūtų pateikti penki atsakymai, tai uždavinys turėtų daugiau nei vieną teisingą atsakymą. Samprotaujant kaip **?** ir **??** dalyse ar panašiai, galima įsitikinti, kad du skaičiai, iš kurių nesidalija N, gali būti tokie ir tik tokie: 4 ir 8; 5 ir 10; bet kurie du iš keturių skaičių 7, 8, 9, 11.

29. Ⓔ Kitas atsakymas



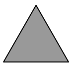
! Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad kvadratiniai langeliai yra vienetiniai. Nagrinėkime trikampius PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3 (žr. pav.). Užtušuotus trikampius atitinkamai pažymėkime T_1, T_2, T_3.

Visų šešių stačiųjų trikampių PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3, T_1, T_2, T_3 atitinkamos kraštinės yra arba lygiagrečios, arba vienoje tiesėje. Todėl šių trikampių atitinkami kampai lygūs, ir visi šeši trikampiai yra panašūs.

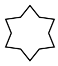
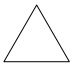
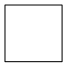
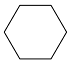
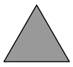
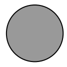
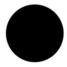
Pažymėkime $Q_1R_1 = a$. Kadangi $PQ_1 : PQ_2 : PQ_3 = 1 : 2 : 3$, tai $Q_1R_1 : Q_2R_2 : Q_3R_3 = 1 : 2 : 3$ ir $Q_2R_2 = 2a$, $Q_3R_3 = 3a$. Tada statieji trikampiai T_1, T_2, T_3 atitinkamai turi statinius $Q_1R_1 - 1 = a - 1$, $Q_2R_2 - 2 = 2(a-1)$, $Q_3R_3 - 3 = 3(a-1)$. Vadinasi, panašiųjų trikampių T_1, T_2, T_3 tų statinių, o todėl ir kitų atitinkamų statinių santykis lygus

$$(a-1) : 2(a-1) : 3(a-1) = 1 : 2 : 3.$$

Tada šių trikampių plotų santykis lygus $1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9$.

30. Ⓒ 

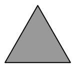
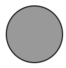
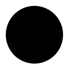
! Devynias duotąsias figūras pažymėkime tokioje lentelėje:

Spalva\ Forma	Žvaigždė	Trikampis	Kvadratas	Šešiakampis	Skritulys
Balta					
Pilka					
Juoda					

Visus tolimesnius samprotavimus galima parašyti ir nesinaudojant lentele, bet pasinaudosime ja dėl patogumo. Ambraziejaus mėgstamiausią figūrą pažymėkime X.

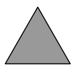
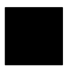
Pradžioje Gervazas žino, kurioje eilutėje yra X, o Protazas – kuriame stulpelyje. Kadangi visose eilutėse yra bent po dvi figūras, tai Gervazas negali žinoti, kas yra X. Todėl jo frazė „Nežinau Ambraziejaus mėgstamiausios figūros“ nesuteikia papildomos informacijos nei mums, nei Protazui. Analogiškai Protazas pradžioje žino X tik tuo atveju, jei žino, kad X yra stulpelyje su vienintele figūra (šešiakampiu). Todėl Gervazo frazė „Žinau, kad ir tu nežinai“ reiškia, kad jis žino, jog X – ne šešiakampis. Taip negalėtų būti, jei Gervazas žinotų, kad figūra X balta – jis negalėtų atmesti šešiakampio, esančio toje eilutėje. Kita vertus, žinodamas, kad figūra pilka ar juoda, šešiakampį Gervazas galėtų atmesti: atitinkamų eilučių sankirta su šešiakampio stulpeliu tuščia. Taigi Gervazo frazė ekvivalenti informacijai, kad figūra X nėra balta (todėl ir ne šešiakampis). Šią informaciją sužinome mes ir Protazas.

Vadinasi, prieš prabildamas Protazas žino, kad figūra yra šioje lentelėje:

Spalva\ Forma	Žvaigždė	Trikampis	Kvadratas	Skritulys
Pilka				
Juoda				

ir žino, kuriame naujos lentelės stulpelyje yra X. Jei tas stulpelis būtų skritulio stulpelis, tai Protazas negalėtų ištarti „dabar jau žinau“, nes šiame stulpelyje yra dvi figūros. Kitų trijų stulpelių atveju Protazas figūrą X nustatytų vienareikšmiškai: jei žvaigždė, tai juoda; jei trikampis, tai pilkas; jei kvadratas, tai juodas. Taigi Protazo frazė pasako mums ir Gervazui, kad X nėra skritulys.

Prieš savo antrąjį pasisakymą Gervazas žino, kad figūra yra šioje lentelėje:

Spalva\ Forma	Žvaigždė	Trikampis	Kvadratas
Pilka			
Juoda			

ir žino, kurioje eilutėje yra X. Jei tai juodos spalvos eilutė, tai Gervazas dar negali nustatyti X: tai gali būti žvaigždė arba kvadratas. Tačiau Gervazas nustato X, todėl ta eilutė yra pilkos spalvos eilutė, o X yra pilkas trikampis.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	D
2	A
3	B
4	A
5	C
6	E
7	D
8	E
9	D
10	E
11	E
12	C
13	B
14	B
15	B
16	A
17	B
18	D
19	C
20	B
21	D
22	C
23	D
24	A
25	A
26	E
27	A
28	D
29	E
30	C