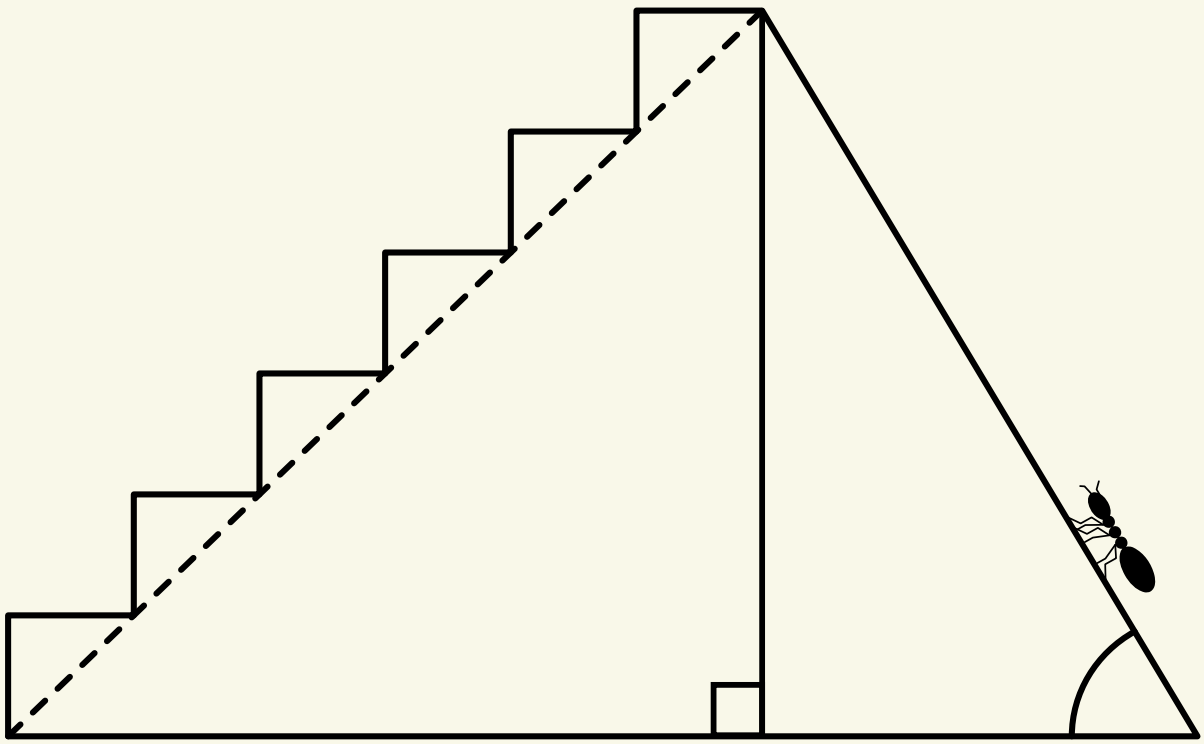
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA Junioras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2021

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2021. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Aivaras Novikas, 2021
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2021

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **11**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 17000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2021 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2021 metų kovo 18 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

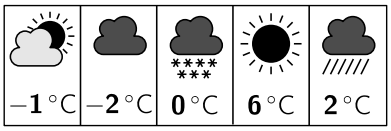
Organizatoriai

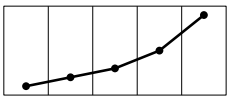
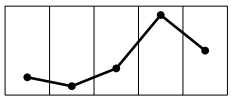
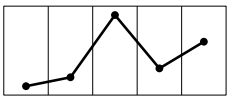
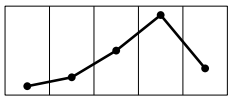
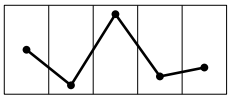
2021 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

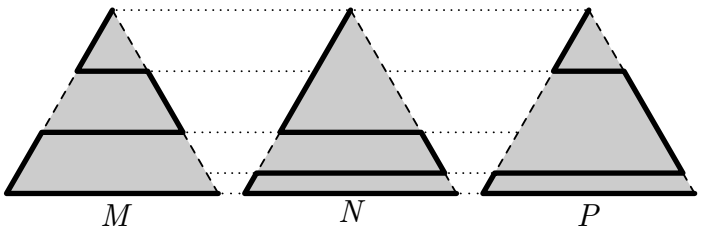
1. Kengūradienis yra trečiasis kovo ketvirtadienis. Viena iš atsakymuose nurodytų datų nėra kengūradienis. Kuri?
A) 2022 m. kovo 17 d. **B)** 2023 m. kovo 16 d. **C)** 2024 m. kovo 14 d.
D) 2025 m. kovo 20 d. **E)** 2026 m. kovo 19 d.

2. Kartą išmanioji programėlė pateikė artimiausių 5 dienų orų prognozę, pavaizduotą dešinėje. Čia nurodyta kiekvienos dienos aukščiausia temperatūra. Kuris paveikslėlis vaizduoja numatomus aukščiausios temperatūros pokyčius?



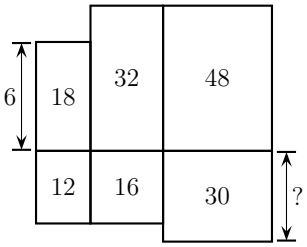
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

3. Parkas yra lygiakraščio trikampio formos. Katės Murklė, Niurzglė bei Prunkšlė susitiko vienoje trikampio viršūnėje ir skirtingais takais, kurių ilgiai yra atitinkamai M, N, P, nutipeno į kitą viršūnę (žr. pav.). Tada



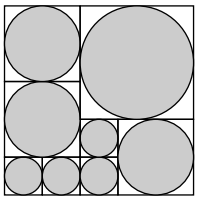
A) $M < N < P$ **B)** $M < P < N$ **C)** $M < N = P$ **D)** $M = P < N$ **E)** $M = N = P$

4. Paveikslėlyje pavaizduoti šeši suglausti stačiakampiai, nurodyti jų plotai ir vienos atkarpos ilgis 6. Kam lygus klaustuku pažymėtas atkarpos ilgis?
A) 10 **B)** 7,5 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4



5. Pirmasis rankinio rungtynių kėlinys baigėsi rezultatu 9 : 14 – svečių komanda pirmavo 5 įvarčiais. Antrajame kėlinyje aikštės šeimininkai perėmė iniciatyvą, įmetė dvigubai daugiau įvarčių nei svečiai ir laimėjo rungtynes vieno įvarčio persvara. Kokiu rezultatu baigėsi rungtynės?
A) 20 : 19 **B)** 21 : 20 **C)** 22 : 21 **D)** 23 : 22 **E)** 24 : 23

6. Didysis kvadratas padalytas į mažesnius kvadratus (žr. pav.). Į kiekvieną iš mažesniųjų kvadratų įbrėžtas skritulys. Kurią didžiojo kvadrato ploto dalį sudaro bendras visų skritulių plotas?

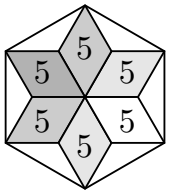


A) $\frac{6\pi}{25}$ **B)** $\frac{\pi}{5}$ **C)** $\frac{3\pi}{10}$ **D)** $\frac{\pi}{4}$ **E)** $\frac{5\pi}{16}$

7. Džiazo grupės solistė Saulė, saksofonininkas ir trimitininkas turi po tiek pat metų. Likę trys grupės nariai atitinkamai turi 19, 20 ir 21 metus. Visų grupės narių amžių (metais) vidurkis yra 21. Kiek metų yra Saulei?

A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

8. Šeši lygūs rombai sudaro žvaigždę, kurios šešių spindulių galai yra taisyklingojo šešiakampio viršūnės (žr. pav.). Koks yra šio šešiakampio plotas, jei kiekvieno rombo plotas yra 5?

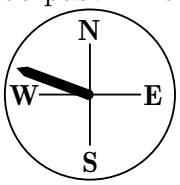


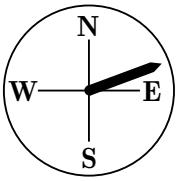
A) 36 **B)** 40 **C)** 45 **D)** 48 **E)** 60

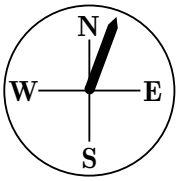
9. Atėmus $\frac{1}{10}$ iš tam tikro skaičiaus, gaunamas toks pats rezultatas, kaip padauginus tą skaičių iš $\frac{1}{10}$. Koks tai skaičius?

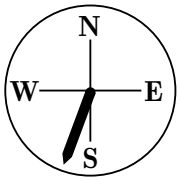
A) $\frac{1}{100}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{11}{100}$ **E)** $\frac{1}{9}$

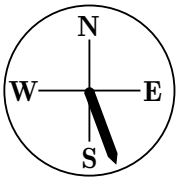
10. Audros metu status vėliavos stiebas pasviro. Tiek žiūrint į jį iš šiaurės vakarų, tiek žiūrint į jį iš rytų, stiebo viršūnė yra dešinėje nuo stiebo pagrindo. Viename iš paveikslėlių parodyta stiebo pasvirimo kryptis. Kuriame?

A) 

B) 

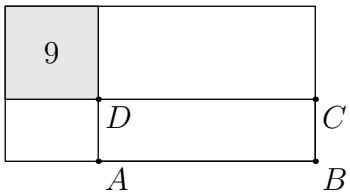
C) 

D) 

E) 

Klausimai po 4 taškus

11. Dvi atkarpos, lygiagrečios su didžiojo stačiakampio kraštinėmis, dalija jį į keturis mažesnius. Vienas iš tų stačiakampių yra kvadratas, kurio plotas lygus 9 (žr. pav.). Koks yra stačiakampio $ABCD$ perimetras, jei didžiojo stačiakampio perimetras lygus 30?

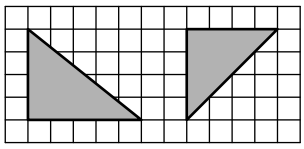


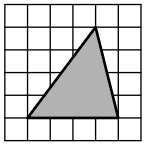
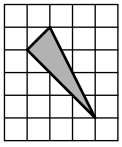
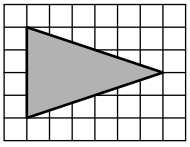
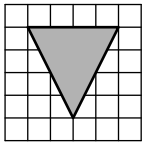
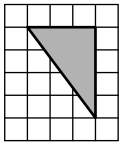
A) 14 **B)** 21 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 24

12. Tomas vieną po kitos uždegė 10 bengališkų ugnelių. Antrąją ugnelę uždegė, kai pirmosios buvo likęs dešimtadalis. Trečiąją – kai antrosios buvo likęs dešimtadalis, ir t. t. Kiekviena ugnelė degė pastoviu greičiu ir sudegė per 2 minutes. Per kiek laiko Tomas sudegino visas ugneles?

A) 18 min 20 s **B)** 18 min 12 s **C)** 18 min **D)** 17 min **E)** 16 min 40 s

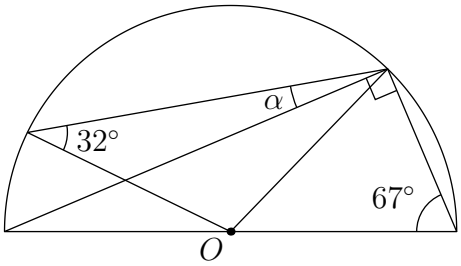
13. Languotame popieriuje nubrėžti trys trikampiai. Lygiai du iš jų yra lygiapločiai, lygiai du iš jų yra lygiašoniai, lygiai du iš jų yra statieji. Du iš jų pavaizduoti dešinėje, o trečiasis – viename iš atsakymų. Kuriame?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

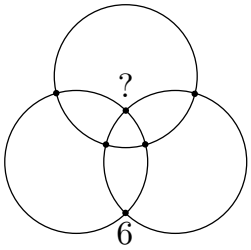
14. Skaičius 2021 turi tokią savybę: jis dalijasi iš 6, iš 7, iš 8 ir iš 9 su liekana 5. Kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 2021, kurie taip pat turi šią savybę?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

15. Paveikslėlyje pavaizduotas pusapskritimis su centru O ir nurodyti dviejų kampų didumai. Raskite α.
A) 9° **B)** 11° **C)** 16° **D)** $17{,}5^\circ$ **E)** 18°

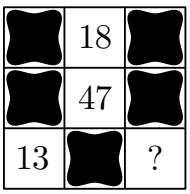


16. Komandinėse varžybose dalyvauja 5 komandos, kurias atitinkamai sudaro 9, 15, 17, 19 ir 21 mokinys. Kiekvienoje komandoje yra tik vaikinai arba tik merginos. Į rungtynes atvykus keturioms iš 5 komandų, merginų susirinko 3 kartus daugiau nei vaikinų. Kiek mokinių sudaro neatvykusią komandą?
A) 9 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 19 **E)** 21

17. Trijų apskritimų šešias sankirtas reikia taip sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 6, kad kiekvieno apskritimo skaičių suma būtų tokia pati. Skaičius 6 jau panaudotas (žr. pav.). Kokį skaičių reikia užrašyti vietoj klaustuko?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

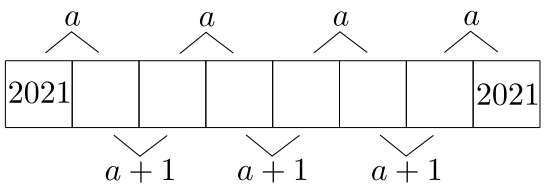


18. Pradinės 3×3 lentelės visuose langeliuose buvo įrašyti nuliai. Vieno ėjimo metu lentelėje leidžiama pasirinkti bet kurį 2×2 kvadratą (t. y. keturis langelius su bendra viršūne) ir padidinti kiekvieną iš jo keturių skaičių vienetu. Atlikus kelis tokius ėjimus, gauta lentelė su tokiais trimis skaičiais, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiti naujos lentelės skaičiai paslėpti. Koks skaičius pažymėtas klaustuku?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 19



19. Arvydas stovi ant grindų ir nori užlipti laiptais, kuriuos sudaro 8 laipteliai. Vienu žingsniu jis gali pakilti aukštyn arba vienu laipteliu, arba dviem laipteliais. Ant įlūžusio šeštojo laiptelio Arvydas atsistoti negali. Keliais būdais jis gali pakilti iki aštuntojo laiptelio?
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

20. Aštuonios smeigtukų dėžutės padėtos į eilę. Pirmoje ir paskutinėje dėžutėse yra po 2021 smeigtuką. Paveikslėlyje parodyta, kiek iš viso smeigtukų yra kiekvienoje gretimų dėžučių poroje (atitinkamai a arba $a+1$). Raskite a.



A) 4041 **B)** 4042 **C)** 4043 **D)** 4044 **E)** 4045

Klausimai po 5 taškus

21. Penki automobiliai pradėjo važiuoti tokia virtine:

Kai virtinė vėl sustojo, automobiliai buvo išsirikiavę kita tvarka:

Taigi šios kelionės metu kelis kartus buvo nutikę taip, kad vienas automobilis lenkė kitą. Kiek mažiausiai tokių nutikimų galėjo būti?

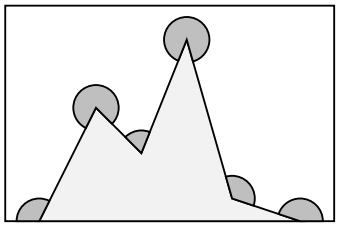
A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

22. Raskite $(a+b)(b+c)(c+a)$, jei $a+b+c=0$ ir $abc=78$.

A) -156 **B)** -39 **C)** 78 **D)** 156 **E)** Kitas atsakymas

23. Paveikslėlyje pažymėti šeši kampai. Kokia yra jų didumų suma?

A) 360° **B)** 900° **C)** 1080° **D)** 1120° **E)** 1440°

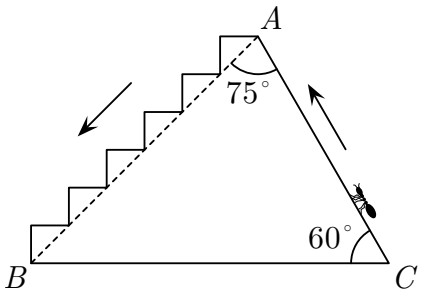


24. Mažiausias natūralusis skaičius, kurio skaitmenų suma yra 2021, lygus N. Kokia yra skaičiaus $N+2021$ skaitmenų suma?

A) 10 **B)** 12 **C)** 19 **D)** 28 **E)** 2026

25. Skruzdėlė nuropojo tiesia linija iš taško C į tašką A, o tada – laipteliais iš taško A į tašką B (žr. pav.). Kiek kartų skruzdėlės kelias iš A į B yra ilgesnis už kelią iš C į A?

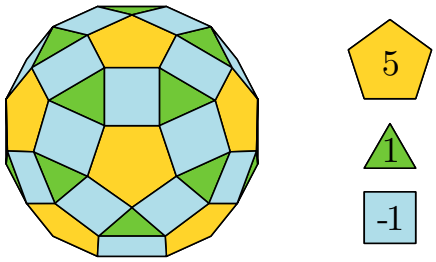
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{3}$



26. Skaičiai a ir b yra sveikųjų skaičių kvadratai. Skaičius $a-b$ yra pirminis. Kuris skaičius negali būti lygus nei a, nei b?

A) 144 **B)** 400 **C)** 625 **D)** 729 **E)** 2500

27. Lygiakraščius trikampius, kvadratus ir taisyklingus penkiakampius erdvėje jungiant taip, kaip parodyta paveikslėlyje, sudarytas briaunainis. Penkiakampių yra 12, kiekvieną iš jų riboja penki kvadratai, o kiekvieną trikampį – trys kvadratai. Kiekvienoje briaunainio sienoje užrašytas skaičius: penkiakampyje – skaičius 5, trikampyje – skaičius 1, kvadrate – skaičius -1. Kokia yra visų briaunainio skaičių suma?



A) 20 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 120

28. Kiek yra penkiaženklių natūraliųjų skaičių, kurių skaitmenų sandauga lygi 1000?
A) 10 **B)** 20 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 60

29. Lina turi aštuonias monetas, kurių masės gramais yra aštuoni skirtingi natūralieji skaičiai. Jei lėkštinių svarstyklių lėkštėse padėsime po dvi bet kaip pasirinktas Linos monetas, tai lėkštė, kurioje yra sunkiausia iš keturių padėtųjų monetų, visada nusvirs žemyn. Kiek mažiausiai gramų gali sverti sunkiausioji iš 8 monetų?
A) 8 **B)** 12 **C)** 34 **D)** 128 **E)** 256

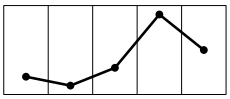
30. Visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2021 didėjimo tvarka užrašyti ant šaligatvio. Kiekvienas skaičius užrašytas viena iš keturių kreidučių: žalia, raudona, geltona arba mėlyna. Tarp bet kurių penkių gretimų skaičių yra po lygiai vieną raudoną, geltoną ir mėlyną. Skaičius, einantis iš karto po raudono skaičiaus, visada geltonas. Skaičiai 2, 20 ir 202 yra žali. Kokios spalvos yra skaičius 2021?
A) Žalias **B)** Raudonas **C)** Geltonas **D)** Mėlynas **E)** Neįmanoma nustatyti

Junioro užduočių sprendimai

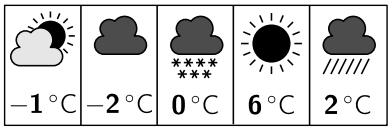
1. (C) 2024 m. kovo 14 d.

! Norint pastebėti teisingą atsakymą, visų pateiktų atsakymų tikrinti nebūtina. Trečiasis kovo ketvirtadienis gali išpulti anksčiausiai kovo $1 + 2 \cdot 7 = 15$-ą dieną. Iš tiesų, pirmasis kovo ketvirtadienis gali būti ne anksčiau nei kovo 1-ąją, todėl trečiasis – ne anksčiau nei dar už dviejų savaičių, t. y. po $2 \cdot 7$ dienų. Vadinasi, kengūradienis negali būti **C)** kovo 14-oji – nei 2024 metais, nei jokiais kitais.

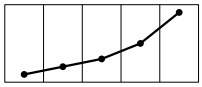
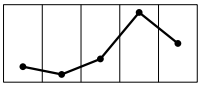
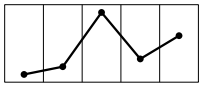
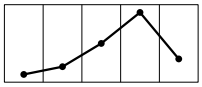
!! Iš karto aiškus vienas kengūradienis. Tai konkurso data: 2021 m. kovo 18 d. Galima iš eilės tikrinti tolimesnius metus (2022, 2023, ...). Pavyzdžiui, nustačius, kad 2023 m. kovo 16 d. yra ketvirtadienis, galima mąstyti taip. Kadangi 2024 metai keliamieji, o $366 = 350 + 14 + 2$ dienas sudaro kelios pilnos savaitės ir dar 2 dienos, tai 2024 m. kovo 16 d. yra šeštadienis, o ketvirtadieniai tais metais tada yra kovo 7-oji, 14-oji, 21-oji ir 28-oji. Taip gausime, kad visos penkios atsakymuose pateiktos datos yra ketvirtadieniai. Taigi dar būtina pastebėti, kad 2024 m. kovo 14 d. tėra antrasis, o ne trečiasis kovo ketvirtadienis.

2. (B) 

? Šilčiausia iš penkių dienų yra ketvirtoji, todėl paveikslėlyje ketvirtasis (iš kairės) pažymėtas laužtės taškas turi būti aukščiau nei kiti keturi taškai. Lieka atsakymai **B** ir **D**. Šalčiausia bus antrąją dieną, todėl galime atmesti ir atsakymą **D**, kuriame žemiausiai pažymėtas pirmasis, o ne antrasis taškas.

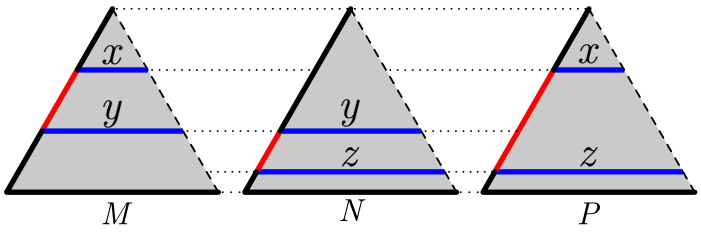


Renkamės atsakymą **B**.

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)**

! Penkias dienas galima surikiuoti temperatūros didėjimo tvarka: 2-oji, 1-oji, 3-ioji, 5-oji, 4-oji. Teisingame atsakyme aukštesnę temperatūrą turi atitikti aukščiau pažymėtas taškas. Atsakyme **B** žemiausiai yra 2-asis (iš kairės) taškas, toliau eina 1-asis, 3-iasis, 5-asis ir aukščiausias 4-asis. Kituose atsakymuose atitinkama taškų seka kitokia: **A)** 1-2-3-4-5; **C)** 1-2-4-5-3; **D)** 1-2-5-3-4; **E)** 2-4-5-1-3.

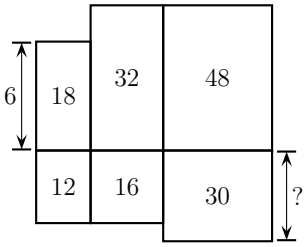
3. (B) $M < P < N$



! Kiekvienos katės trajektoriją sudaro 6 atkarpos. Kiekvienos trajektorijos trečiąją atkarpą pakeiskime atitinkama raudonąja (žr. pav.): dėl simetrijos kiekvienu atveju bendras 6 atkarpų ilgis nepakis. Tai atlikę gauname po dvi paryškintas didžiojo lygiakraščio trikampio kraštines. Toliau lygindami trajektorijų ilgius, jas galime ignoruoti ir nagrinėti tik mėlynas atkarpas.

Mėlynų atkarpų ilgius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Akivaizdu, kad $x < y < z$, todėl $x + y < x + z < y + z$ ir atitinkamai $M < P < N$.

4. (D) 5



! Stačiakampių, kurių plotai lygūs 18, 12, 16, 32, 48, 30, matmenis galima iš eilės atitinkamai pažymėti $x \times 6$, $x \times y$, $z \times y$, $z \times t$, $u \times t$, $u \times v$. Reikia rasti $? = v$. Turime

$$6x = 18, \qquad xy = 12, \qquad yz = 16,$$
$$zt = 32, \qquad tu = 48, \qquad uv = 30,$$
$$x = 18 : 6 = 3, \qquad y = 12 : 3 = 4, \qquad z = 16 : 4 = 4,$$
$$t = 32 : 4 = 8, \qquad u = 48 : 8 = 6, \qquad v = 30 : 6 = 5.$$

5. (B) 21 : 20

? Jei rungtynių rezultatas yra $x : y$, tai antrojo kėlinio rezultatas yra $(x-9) : (y-14)$. Tikrinkime atsakymus. Antrojo kėlinio rezultatas galėtų būti: **A)** 11 : 5; **B)** 12 : 6; **C)** 13 : 7; **D)** 14 : 8; **E)** 15 : 9. Įvarčių santykis yra lygiai 2 tik antruoju atveju.

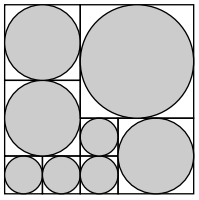
Renkamės atsakymą **B**.

! Tarkime, kad svečiai antrojo kėlinio metu įmetė x įvarčių. Tada šeimininkai antrojo kėlinio metu įmetė $2x$ įvarčių, o bendras rungtynių rezultatas buvo $(2x + 9) : (x + 14)$ ir todėl

$$2x + 9 = (x + 14) + 1, \qquad x = 6, \qquad (2x + 9) : (x + 14) = 21 : 20.$$

!! Galima sakyti, kad po pirmojo kėlinio šeimininkai turėjo neigiamą -5 įvarčių persvarą. Po antrojo kėlinio jie įgijo vieno įvarčio persvarą, todėl antrajame kėlinyje įmetė $1+5 = 6$ įvarčiais daugiau nei svečiai. Kita vertus, antrajame kėlinyje jie įmetė tiek įvarčių, kiek svečiai, ir dar tiek pat. Vadinasi, svečiai antrajame kėlinyje įmetė 6 įvarčius, o per visas rungtynes jie įmetė $14 + 6 = 20$ įvarčių, pralaimėję rezultatu 21 : 20.

6. (D) $\frac{\pi}{4}$



! Jei kas bandytų skaičiuoti didžiojo ir mažesniųjų kvadratų kraštinių ilgių santykius, tas šiam uždaviniui sugaištų daugiau laiko nei būtina.

Pastebėkime, kad jei spindulio r skritulys įbrėžtas į kvadratą, tai to kvadrato kraštinės ilgis lygus skritulio skersmeniui $2r$. Skritulio plotas lygus πr^2, kvadrato plotas – $4r^2$, o jų plotų santykis – $\frac{\pi}{4}$. Svarbu, kad šis santykis nepriklauso nuo r, nuo skritulio ir kvadrato dydžio.

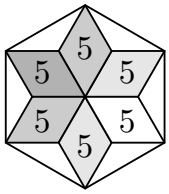
Kadangi kiekvieno skritulio paveikslėlyje plotas sudaro tą pačią atitinkamo kvadrato ploto dalį, tai bendras visų skritulių plotas sudaro tą pačią didžiojo kvadrato ploto dalį. Taigi atsakymas yra $\frac{\pi}{4}$, ir jis nepasikeistų, jei didysis kvadratas būtų padalytas į mažesnius kvadratus kitaip, net jei tų kvadratų būtų kur kas daugiau.

7. (C) 22

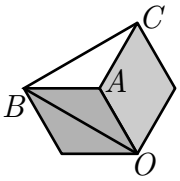
! Tarkime, kad Saulei yra a metų. Tada visų grupės narių amžių suma lygi $a+a+a+19+20+21 = 3a+60$, o tų amžių vidurkis lygus $\frac{3a+60}{6} = \frac{a}{2}+10 = 21$. Taigi $\frac{a}{2} = 11$, $a = 22$.

!! Jei Saulei, saksofonininkui ir trimitininkui būtų 21 metai, tai visų grupės narių amžių suma būtų lygi $19+20+21\cdot 4 = (21-2)+(21-1)+21\cdot 4 = 21\cdot 6-3$. Taigi iki tokios amžių sumos, kad jų vidurkis būtų 21, trūktų lygiai 3 metų. Reikiamą amžių sumą bei vidurkį gausime, pridėję tuos 3 metus, o tada Saulės ir dviejų jos bendražygių amžių reikia padidinti 1 metais, t. y. iki 22 metų.

8. (C) 45



? Šešiakampį sudaro 6 lygūs rombai ir 6 trikampiai. Pažvelgus į paveikslėlį, nesunku nuspėti, kad kiekvienas trikampis lygus pusei rombo. Todėl kiekvieno trikampio plotas lygus $5:2$, o šešiakampio plotas lygus $5\cdot 6+\frac{5}{2}\cdot 6 = 45$.



! Šešiakampį sudaro 6 lygūs rombai ir 6 trikampiai. Šešių rombų smailieji kampai sudaro pilnąjį kampą, todėl kiekvieno rombo smailusis kampas lygus $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Tada rombų bukieji kampai lygūs $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Užbaikime **?** dalies sprendimą: įrodykime, kad kiekvienas trikampis lygus pusei rombo. Nagrinėkime bet kurį trikampį ir du gretimus rombus. Taškus pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Reikia įrodyti, kad trikampis ABC lygus trikampiui ABO.

Turime $\angle BAO = \angle CAO = 120^\circ$ ir

$$\angle BAC = 360^\circ - \angle BAO - \angle CAO = 120^\circ.$$

Taigi trikampiai ABC ir ABO lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų: $AC = AO$ (rombo kraštinės), kraštinė AB bendra, $\angle BAC = \angle BAO$.

9. (E) $\frac{1}{9}$

? Visi atsakymuose pateikti skaičiai teigiami. Todėl padauginus teisingą atsakymą iš $\frac{1}{10}$ gaunamas teigiamas skaičius. Skaičius turi likti teigiamas ir atėmus $\frac{1}{10}$. Vadinasi, teisingas atsakymas didesnis už $\frac{1}{10}$ – atsakymai **A**-**C** netinka. Liko patikrinti bent vieną iš likusių dviejų atsakymų:

$$\textbf{D)}\ \frac{11}{100}-\frac{1}{10}=\frac{11}{100}-\frac{10}{100}=\frac{1}{100}\neq\frac{11}{1000}=\frac{11}{100}\cdot\frac{1}{10};$$

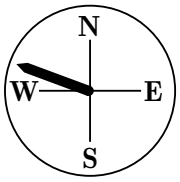
$$\textbf{E)}\ \frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{10}{90}-\frac{9}{90}=\frac{1}{90}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}.$$

Renkamės atsakymą **E**.

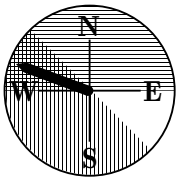
! Ieškomą skaičių pažymėkime x. Tada

$$x-\frac{1}{10}=x\cdot\frac{1}{10},\qquad \frac{1}{10}=x-\frac{x}{10}=\frac{9x}{10},\qquad 9x=1,\qquad x=\frac{1}{9}.$$

10. (A)



! Atsakymą galima greitai rasti, remiantis vaizduote ir intuicija, bet pamėginkime įvardyti, ką uždavinio sąlyga sako apie atsakymuose pavaizduotos rodyklės padėtį.



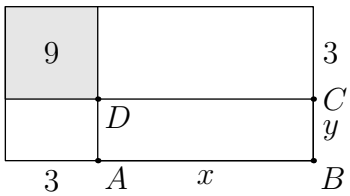
Žmogus, žiūrintis į stiebą iš rytų, yra atsigręžęs į vakarus. Jam iš kairės yra pietūs, o iš dešinės yra šiaurė. Taigi stiebas yra pasviręs labiau į šiaurę nei į pietus. T. y. stiebo pasvirimo kryptį rodanti rodyklė paveikslėlyje turi būti viršutiniame pusskritulyje.

Žmogus, žiūrintis į stiebą iš šiaurės vakarų, yra atsigręžęs į pietryčius. Jam iš kairės yra šiaurės rytai, o iš dešinės yra pietvakariai. Taigi stiebas yra pasviręs labiau į pietvakarius nei į šiaurės rytus. Ir vėl stiebo pasvirimo kryptį rodanti rodyklė paveikslėlyje turi būti tam tikrame pusskritulyje.

Rodyklė paveikslėlyje turi būti dviejų pusskritulių sankirtoje – languotame skritulio aštuntadalyje (žr. pav.). Taip yra atsakyme **A**.

11. (D) 18

! Pažymėkime $AB = x$, $BC = y$. Reikia rasti stačiakampio $ABCD$ perimetrą $2x + 2y$.



Kvadrato kraštinės ilgis lygus $\sqrt{9} = 3$. Tada didžiojo stačiakampio matmenys yra $(x + 3) \times (y + 3)$. Jo perimetras lygus

$$30 = (x + 3) + (x + 3) + (y + 3) + (y + 3) = 2x + 2y + 12.$$

Vadinasi, $2x + 2y = 30 - 12 = 18$.

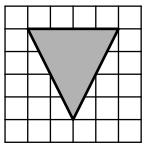
12. (B) 18 min 12 s

! Visą ugnelių degimo laiką dėl patogumo išskaidykime tarpsniais. Nuo pirmos iki antros ugnelės uždegimo praėjo $\frac{9}{10}$ pirmos ugnelės degimo laiko, t. y. $\frac{9}{10} \cdot 2$ min $= \frac{9}{5}$ min. Po to tiek pat laiko praėjo iki trečios ugnelės uždegimo, vėl tiek pat – iki ketvirtos, ir t. t. Paskutinis dešimtasis tarpsnis tęsėsi nuo dešimtos ugnelės uždegimo iki jos užgesimo, jis truko ilgiau – visas 2 minutes. Dešimta ugnelė užgeso paskutinė.

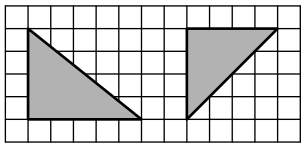
Visų laiko tarpsnių bendra trukmė lygi

$$\frac{9}{5} + \frac{9}{5} + \ldots + \frac{9}{5} + 2 = \frac{9}{5} \cdot 9 + 2 = \frac{81}{5} + 2 = 18\frac{1}{5} \text{ (min)}.$$

Čia $\frac{1}{5}$ min $= 60 \cdot \frac{1}{5}$ s $= 12$ s. Vadinasi, ugnelės degė 18 minučių 12 sekundžių.

13. (D) 

? Galime laikyti, kad langelio kraštinės ilgis yra 1.



Pradėkime nuo trikampių savybės, kurią lengva pastebėti, nieko neskaičiuojant: du duotieji trikampiai abu yra statieji, todėl trečiasis trikampis negali būti statusis.

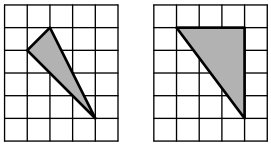
Taip pat vien pažvelgus į du duotuosius trikampius, galima spėti, kad vienas iš jų yra lygiašonis, o kitas – ne. Iš tiesų, pagal langelius galima suskaičiuoti, kad vieno iš jų statiniai lygūs 4 ir 5, o kito – 4 ir 4. Todėl trečiasis trikampis yra lygiašonis.

Žinant duotų stačiųjų trikampių statinius, galima rasti ir jų plotus $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ bei $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$. Trikampiai nelygiapločiai, todėl trečiojo trikampio plotas turi būti 8 arba 10.

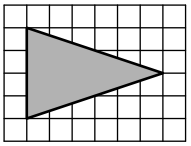
Tyrinėjant atsakymus, pakanka pastebėti, kad tinka atsakymas **D**. Pavaizduotas trikampis yra lygiašonis (turi vertikalią simetrijos ašį), o jo visi kampai smailieji. (Pastarąjį teiginį galima griežtai pagrįsti, pastebėjus, kad kampas tarp šio lygiašonio trikampio šoninių kraštinių yra stačiojo kampo tarp langelių įstrižainių dalis, todėl mažesnis nei 90°.) Pagal langelius suskaičiuojame, kad tiek šio trikampio pagrindo ilgis, tiek į tą pagrindą išvestos aukštinės ilgis yra 4. Vadinasi, trikampio plotas lygus $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

Renkamės atsakymą **D**.

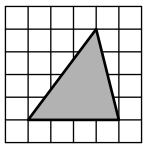
! Užbaikime **?** dalies sprendimą, patikrindami, kad kiti atsakymai netinka.



Kadangi ieškomas trikampis negali būti statusis, tai galime atmesti atsakymus **E** ir **B**. Pastaruoju atveju dvi trikampio kraštinės statmenos, nes eina per langelių įstrižaines.



Atsakyme **C**, kaip ir teisingame atsakyme, pavaizduotas trikampis, kuris yra lygiašonis, bet ne statusis, tad galbūt galėtų tikti. Tačiau pagal langelius jo pagrindo ilgis yra 4, į pagrindą nuleistos aukštinės ilgis yra 6, o trikampio plotas lygus $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.



Suklaidinti galėtų atsakymas **A**: trikampio apatinės kraštinės ir ją nuleistos aukštinės ilgiai yra lygūs 4, todėl jo plotas $\frac{4\cdot 4}{2} = 8$ tinkamas; be to, šis trikampis nėra statusis. Jei pasirodytų, kad dvi trikampio kraštinės lygios, tai tektų pasirinkti šį atsakymą. Norint šį trikampį atmesti, pakanka pastebėti, kad jo šoninės kraštinės ilgesnės už atstumą 4 nuo viršutinės viršūnės iki apatinės kraštinės, todėl nelygios apatinei kraštinei. Jos nelygios tarpusavyje, nes viršutinė viršūnė nepriklauso apatinės kraštinės vidurio statmeniui.

Taigi galime atmesti ir paskutinį likusį atsakymą **A**. Beje, jį nagrinėjant, šoninių kraštinių ilgius galima apskaičiuoti ir tiksliai, pasinaudojant Pitagoro teorema. Jie lygūs $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ ir $\sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$. Pastarasis ilgis nedaug skiriasi nuo apatinės kraštinės ilgio 4. Todėl pavojus apsirikti ir palaikyti trikampį lygiašoniu buvo nemenkas.

14. (A) 4

? Natūralusis skaičius n dalijasi iš natūraliojo skaičiaus $a = 6, 7, 8$ arba 9 su liekana 5, jei $n-5$ dalijasi iš a be liekanos. Pavyzdžiui, tinka $n = 5$: skaičius 0 be liekanos dalijasi iš bet kokio natūraliojo skaičiaus. Kitas toks skaičius galėtų $n = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 + 5$, bet jis didesnis nei 2021. Tad gal daugiau tinkamų skaičių nėra?

Pastebėkime, kad skaičius $7\cdot 8\cdot 9 = 56\cdot 9 = (50+6)\cdot 9 = 450 + 54 = 504$ be liekanos dalijasi ne tik iš 7, iš $8 = 2\cdot 4$ ir iš $9 = 3\cdot 3$, bet ir iš $6 = 2\cdot 3$. Tokie yra ir skaičiai $2\cdot 504 = 1008$, $3\cdot 504 = 1512$. Vadinasi, tinka $n = 5$, 509, 1013, 1517. Jau gavome keturis tinkamus skaičius, o **A)** 4 yra didžiausias iš penkių pateiktų atsakymų.

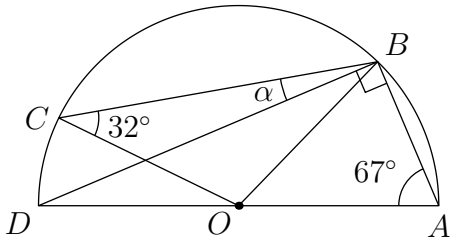
Renkamės atsakymą **A**.

! Dalyje **?** jau radome keturis skaičius $n = 504k+5$, kur $k = 0, 1, 2, 3$, turinčius reikiamą savybę. Kai $k \geqslant 4$, tai $n \geqslant 2021$. Liko išsiaiškinti, kodėl nėra kito pavidalo skaičių n, tenkinančių uždavinio sąlygą.

Jei n dalijasi iš 6, 7, 8 ir 9 su liekana 5, tai $n-5$ dalijasi iš 6, 7, 8 ir 9 be liekanos. Kadangi skaičiai 7, 8 ir 9 yra poromis tarpusavyje pirminiai, tai $n-5$ turi dalytis iš $7\cdot 8\cdot 9 = 504$ (o tada neišvengiamai dalijasi ir iš skaičiaus 504 daliklio 6). Todėl $n-5 = 504k$ ir $n = 504k+5$, kur skaičius k yra sveikasis. Vadinasi, be keturių rastųjų skaičių kitų tinkamų nėra.

15. (A) 9°

! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Jame parodyta, kad $\angle ABD = 90^\circ$ (atkarpa AD yra apskritimo skersmuo). Kadangi atkarpos OA, OB, OC, OD yra apskritimo spinduliai, tai trikampiai OAB, OBC, OBD yra lygiašoniai. Pateikiame vieną iš galimybių, kaip šia informacija pasinaudoti:



$$\angle OBA = \angle OAB = 67^\circ, \qquad \angle OBC = \angle OCB = 32^\circ,$$

$$\angle ABC = \angle OBA + \angle OBC = 67^\circ + 32^\circ = 99^\circ,$$

$$\alpha = \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 99^\circ - 90^\circ = 9^\circ.$$

16. (E) 21

? Galima spėlioti, kiek vaikinų atvyko į rungtynes. Pavyzdžiui, jei atvyko bent dvi vaikinų komandos, tai vaikinų atvyko bent $9 + 15 = 24$, o merginų – daugiausiai $21 + 19 = 40$. Tai prieštarauja sąlygai, kad merginų atvyko tris kartus daugiau nei vaikinų. O jei atvyko vienintelė vaikinų komanda iš 9 žmonių, tai likusias tris atvykusias komandas sudaro 27 merginos. Tačiau, kita vertus, tose trijose komandose yra mažiausiai $15 + 17 + 19 = 51$ mergina.

Tarkime, kad atvyko vienintelė vaikinų komanda iš 15 žmonių. Tada likusias tris atvykusias komandas sudaro 45 merginos. Taip gali būti, jei tose komandose yra 9, 17 ir 19 merginų. Gavome situaciją, kuri tenkina uždavinio sąlygą. Šioje situacijoje neatvykusią komandą sudaro 21 mokinys.

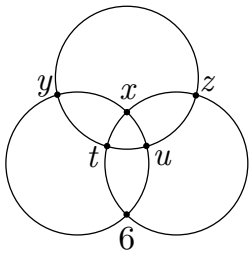
Renkamės atsakymą **E**.

! Varžybose dalyvauja iš viso 81 mokinys, o į rungtynes galėjo atvykti **A)** $81 - 9 = 72$, **B)** $81 - 15 = 66$, **C)** $81 - 17 = 64$, **D)** $81 - 19 = 62$ arba **E)** $81 - 21 = 60$ mokinių. Tarp atvykusiųjų vaikinai sudaro vieną iš $1 + 3 = 4$ lygių dalių. Taigi jie sudaro ketvirtadalį atvykusiųjų.

Skaičiai 66 bei 62 nesidalija iš 4 ir netinka, o likusiais atvejais į rungtynes galėjo atvykti **A)** $72 : 4 = 18$, **C)** $64 : 4 = 16$ arba **E)** $60 : 4 = 15$ vaikinų. Pastarasis skaičius įmanomas, jei neatvyko komanda iš 21 mokinio, o tarp likusių keturių komandų vaikinai sudaro tik tą, kurioje yra 15 mokinių. Skaičiai 18 ir 16 netinka, nes jų nėra nei tarp skaičių 9, 15, 17, 19, 21, nei tarp šių skaičių sumų.

17. (A) 1

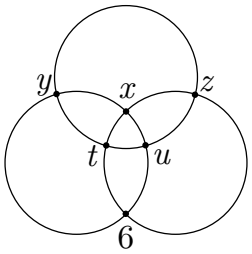
? Tarkime, kad 6 taškai jau sunumeruoti. Pažymėkime nežinomus skaičius, kaip parodyta paveikslėlyje. Pamėginkime tinkamai priskirti reikšmes nežinomiesiems, bet ne aklai spėliodami, o remdamiesi dėsningumais.



Bet kurie du apskritimai kertasi dviejuose pažymėtuose taškuose. Taip gauname tris skaičių poras: x ir 6, y ir u, z ir t. Kiekvieno apskritimo keturi skaičiai sudaro dvi poras iš šių trijų. Todėl uždavinio sąlyga bus tenkinama, jei kiekvienos poros skaičių suma bus lygi tam pačiam skaičiui a (kiekvieno apskritimo skaičių suma tada bus lygi $2a$). Lygias sumas $x + 6$, $y + u$, $z + t$ gausime, jei skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6 suporuosime taip: 1 ir 6, 2 ir 5, 3 ir 4. Pavyzdžiui, galima imti $x = 1$, $y = 2$, $u = 5$, $z = 3$, $t = 4$. Taigi sąlygą tenkina reikšmė $x = 1$.

Renkamės atsakymą **A**.

! Tarkime, kad 6 taškai jau sunumeruoti. Pažymėkime nežinomus skaičius, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada



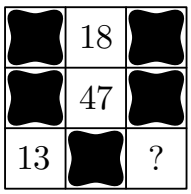
$$x + y + u + 6 = x + z + t + 6 = y + z + t + u.$$

Suprastinkime gautąsias lygybes:

$$y + u = z + t, \qquad x + 6 = y + u.$$

Taigi trys sumos $x+6$, $y+u$, $z+t$ yra lygios. Šių sumų suma lygi $(x+6)\cdot 3$. Kita vertus, tai yra visų šešių skaičių nuo 1 iki 6 suma 21. Vadinasi, $x + 6 = 21 : 3 = 7$ ir $x = 1$.

18. Ⓒ 16



? Lentelėje yra keturi 2×2 kvadratai. Sugalvokime konkrečią ėjimų seką, po kurios gautume duotąją lentelę. Pavyzdžiui, tarkime, kad pirmiausiai 13 kartų pasirenkamas kairysis apatinis kvadratas: taip gaunama galutinė kairiojo apatinio skaičiaus reikšmė. Tada galima 18 kartų pasirinkti kairįjį viršutinį kvadratą: taip gaunamas lentelės skaičius 18, o skaičius 13 nepakinta. Viduriniame langelyje taip gaunamas skaičius 13, o po to skaičius $13 + 18 = 31$. Kad gautume galutinę reikšmę 47, nepakeisdami skaičių 13 ir 18, toliau pasirinkime apatinį dešinįjį kvadratą 16 kartų ($31 + 16 = 47$). Atliekant 13 ir 18 ėjimų, skaičius klaustuku pažymėtame langelyje nekeičiamas, lieka nuliu, o po 16 ėjimų jis tampa lygus 16. Vadinasi, reikšmė $? = 16$ yra įmanoma.

Renkamės atsakymą **C**.

a	$a+b$	b
$a+c$	$a+b+$ $+c+d$	$b+d$
c	$c+d$	d

! Lentelėje yra keturi 2×2 kvadratai. Tarkime, kad kairysis viršutinis kvadratas buvo pasirinktas a kartų, dešinysis viršutinis – b kartų, kairysis apatinis – c kartų, o dešinysis apatinis – d kartų.

Skaičius kairiajame viršutiniame langelyje keičiasi tik pasirinkus kairįjį viršutinį kvadratą. Todėl galutinė jo reikšmė lygi a. Panašiai galima užpildyti visą lentelę (žr. pav.). Tačiau svarbūs tik reiškiniai langeliuose, kurie nebuvo paslėpti:

$$a + b = 18, \qquad a + b + c + d = 47, \qquad c = 13, \qquad ? = d.$$

Toliau tereikia šiek tiek pastabumo:

$$? = d = (a + b + c + d) - (a + b) - c = 47 - 18 - 13 = 16.$$

19. (C) 8

! Kad peržengtų šeštąjį laiptelį, Arvydas būtinai turi atsistoti ant penktojo ir tada ant septintojo. Nuo septintojo laiptelio Arvydas turės iš karto užžengti ant aštuntojo. Vadinasi, reikia nustatyti, keliais būdais galima užlipti ant penktojo laiptelio – nuo jo ant aštuntojo galima užlipti vieninteliu būdu.

Nagrinėkime, kiek platesnių žingsnių, kai užlipama dviem laipteliais aukščiau, Arvydas gali atlikti kopdamas iki penktojo laiptelio. Jis negali žengti trijų tokių žingsnių, nes atsidurtų aukščiau nei ant penktojo laiptelio: $2 + 2 + 2 > 5$.

Arvydas gali žengti lygiai du platesnius žingsnius. Taip jis įveiks $2 + 2 = 4$ laiptelius ir turės žengti vieną paprastą žingsnį, kuris gali būti pirmasis, antrasis arba trečiasis iš trijų. Gauname tris būdus.

Arvydas gali žengti lygiai vieną platesnį žingsnį. Taip jis įveiks 2 laiptelius ir turės žengti tris paprastus žingsnius. Vienintelis platesnis žingsnis gali būti pirmasis, antrasis, trečiasis arba ketvirtasis iš keturių. Gauname keturis būdus.

Arvydas gali nežengti nė vieno platesnio žingsnio ir užlipti ant penktojo laiptelio penkiais paprastais žingsniais. Gauname vieną būdą.

Iš viso gavome $3 + 4 + 1 = 8$ būdus.

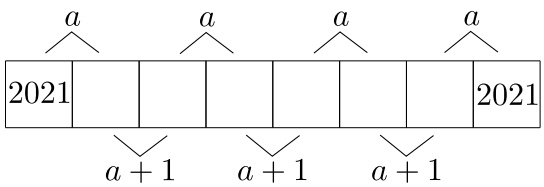
Beje, kiekvienas būdas kartu reiškia ir būdą, kaip užrašyti penketą vienetų ir dvejetų suma. Tai galima padaryti 8 būdais:

$$5 = 1 + 2 + 2 = 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 =$$

$$= 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

20. (E) 4045

! Nemėginkime ieškoti kiekvienos dėžutės smeigtukų skaičiaus. Vietoj to pastebėkime, kad bendrą smeigtukų skaičių visose dėžutėse galima užrašyti dviem būdais:



$$a+a+a+a = 2021+(a+1)+(a+1)+(a+1)+2021,$$

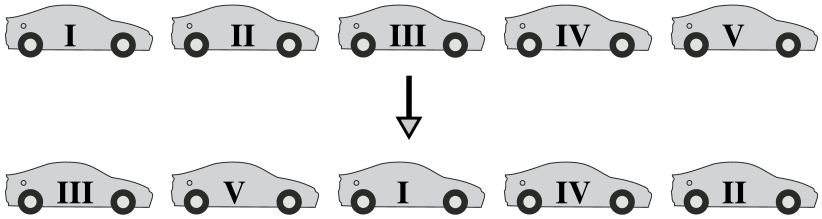
$$4a = 3a + 4045, \qquad a = 4045.$$

Beje, smeigtukų skaičių kiekvienoje dėžutėje rasti įmanoma. Iš kairės į dešinę smeigtukų skaičiai dėžutėse lygūs 2021, 2024, 2022, 2023, 2023, 2022, 2024, 2021.

!! Antroje ir trečioje (iš kairės) dėžutėse yra vienu smeigtuku daugiau nei antroje ir pirmoje dėžutėse. Todėl trečioje dėžutėje yra vienu smeigtuku daugiau nei pirmoje. Analogiškai penktoje dėžutėje yra vienu smeigtuku daugiau nei trečioje, o septintoje – vienu daugiau nei penktoje. Vadinasi, septintoje dėžutėje yra $2021 + 1 + 1 + 1 = 2024$ smeigtukai, o septintoje ir aštuntoje dėžutėse yra $a = 2024 + 2021 = 4045$ smeigtukai.

21. (E) 6

? Sugalvokime konkretų pavyzdį, kaip automobiliai galėjo lenkti vienas kitą.



Tarkime, kad automobilis II iš karto aplenkė automobilius III, IV ir V, o toliau visą laiką pirmavo. Tada automobilis IV aplenkė automobilį V, o toliau visą laiką liko antroje vietoje. Tada automobilis I aplenkė automobilius III ir V, o toliau visą laiką liko trečioje vietoje. Automobilių virtinė keičiasi tokiu būdu:

$$\text{I, II, III, IV, V} \Rightarrow \text{I, III, IV, V, II} \Rightarrow \text{I, III, V, IV, II} \Rightarrow \text{III, V, I, IV, II.}$$

Gavome, kad nutikimų, kai automobilis lenkė kitą, galėjo būti 6: II ir III, II ir IV, II ir V, IV ir V, I ir III, I ir V. Tarp pateiktų atsakymų mažesnio už **E)** 6 nėra.

Renkamės atsakymą **E**.

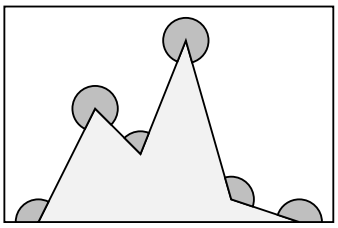
! Jei automobilis X pradinėje rikiuotėje yra automobilio Y priekyje (nebūtinai greta), o galutinėje rikiuotėje yra atvirkščiai, tai aišku, kad tam tikru metu automobilis Y lenkė automobilį X. Suskaičiuokime, kiek yra tokių automobilių Y ir X porų: I ir III, I ir V, II ir III, II ir IV, II ir V, IV ir V – iš viso 6 poros. Vadinasi, nutikimų skaičius yra ne mažesnis nei 6. Jis lygus 6, jei šios automobilių poros po vieną kartą apsikeitė vietomis ir neįvyko jokių kitų apsikeitimų. Kad tai įmanoma, galima įsitikinti, kaip tai padarėme **?** dalyje. Vadinasi, teisingas atsakymas yra 6.

22. (E) Kitas atsakymas

! Kadangi $a + b + c = 0$, tai $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$ ir

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (-c)(-a)(-b) = -abc = -78.$$

23. (C) 1080°



! Paveikslėlyje pilkai nuspalvinta figūra yra neiškilasis šešiakampis. Prisiminkime, kad n-kampio (nebūtinai iškilojo) kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180^\circ$. Todėl nuspalvintojo šešiakampio kampų suma lygi $4\cdot 180^\circ = 720^\circ$. Jei tuos šešis (vidinius) kampus iš kairės į dešinę pažymėsime α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, tai atitinkami paveikslėlyje pažymėti kampai lygūs

$$180^\circ-\alpha_1,\quad 360^\circ-\alpha_2,\quad 360^\circ-\alpha_3,\quad 360^\circ-\alpha_4,\quad 360^\circ-\alpha_5,\quad 180^\circ-\alpha_6,$$

o jų suma lygi

$$(180^\circ-\alpha_1)+(360^\circ-\alpha_2)+(360^\circ-\alpha_3)+(360^\circ-\alpha_4)+(360^\circ-\alpha_5)+(180^\circ-\alpha_6) =$$

$$= 2\cdot 180^\circ+4\cdot 360^\circ-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6) = 360^\circ+1440^\circ-720^\circ = 1080^\circ.$$

!! Baltoji didžiojo stačiakampio dalis yra neiškilasis dešimtkampis, kurio viršūnės yra šešių pažymėtųjų kampų viršūnės ir keturios didžiojo stačiakampio viršūnės, o kampai yra šeši pažymėtieji kampai ir keturi statieji stačiakampio kampai. Prisiminkime, kad n-kampio (nebūtinai iškilojo) kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180^\circ$. Todėl šešių pažymėtųjų kampų ir keturių stačiųjų kampų suma lygi $8\cdot 180^\circ$, o ieškoma suma lygi $8\cdot 180^\circ - 4\cdot 90^\circ = 1080^\circ$.

24. (A) 10

? Galima nuspėti, kad visi skaičiaus N skaitmenys, išskyrus nebent pirmąjį, lygūs 9. Juk sudarant skaičių N reikia stengtis, kad skaitmenų būtų kuo mažiau. Todėl juos reikia imti kuo didesnius (taigi imti kuo daugiau devynetų), o skaitmenis išrikiuoti didėjimo tvarka.

Prisiminkime 14 uždavinį: skaičius 2021 dalijasi iš 9 su liekana 5. Remdamiesi lygybe $2021 = 5+9+9+\ldots+9$, spėkime, kad $N = 599\ldots9$. Tikslaus devynetų skaičiaus galime neieškoti. Svarbu yra tik tai, kad devynetų yra pakankamai daug. Tada

$$N+2021 = (N+1)+2020 = 600\ldots0+2020 = 600\ldots002020.$$

Vadinasi, skaičiaus $N+2021$ skaitmenų suma yra $6+2+2+0+\ldots+0 = 10$.

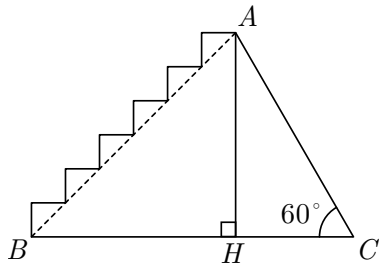
! Jei kuris nors skaičiaus N skaitmuo, išskyrus pirmąjį, būtų mažesnis už 9, tai galėtume tą skaitmenį padidinti 1, o pirmąjį skaitmenį sumažinti 1 (apskritai jį panaikinant, jei jis lygus 1). Taip gautume mažesnį skaičių su ta pačia skaitmenų suma 2021. Tačiau skaičius N yra mažiausias su tokia skaitmenų suma, todėl visi skaičiaus N skaitmenys, išskyrus nebent pirmąjį, lygūs 9.

Pirmasis skaičiaus N skaitmuo a tenkina lygybę $a+9+9+\ldots+9 = 2021$. Natūralusis skaičius ir jo skaitmenų suma visada dalijasi iš 9 su ta pačia liekana (apibendrintas dalumo iš 9 požymis). Kadangi $2+0+2+1 = 5$, tai skaičius 2021, o todėl a dalijasi iš 9 su liekana 5. Taigi $a = 5$, $N = 599\ldots9$,

$$N+2021 = (N+1)+2020 = 600\ldots0+2020 = 600\ldots002020.$$

Vadinasi, skaičiaus $N+2021$ skaitmenų suma yra $6+2+2+0+\ldots+0 = 10$.

25. (E) $\sqrt{3}$



! Aukštinė AH dalija trikampį ABC į du stačiuosius trikampius (žr. pav.). Kai skruzdėlė leidosi laiptais, ji pakaitomis judėjo horizontaliai ir vertikaliai. Horizontaliai ji nuėjo atstumą HB, o vertikaliai – atstumą AH. Vadinasi, turime rasti santykį $(AH + HB) : AC$. Pažymėkime $AH = a$.

Raskime stačiųjų trikampių ABH ir ACH kampus:

$$\angle ACH = 60^\circ, \qquad \angle CAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \qquad \angle BAH = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$

Statusis trikampis ABH su 45° kampu yra lygiašonis, $BH = AH = a$. Atkarpos AC ilgį taip pat galima išreikšti per a:

$$\frac{AH}{AC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad AC = \frac{2AH}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{AH + HB}{AC} = (a + a) : \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3}.$$

26. (C) 625

! Pažymėkime

$$m = \sqrt{a}, \qquad n = \sqrt{b}, \qquad p = a - b = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n).$$

Čia m ir n yra neneigiami sveikieji skaičiai, $p > 0$. Todėl $a > b$, $m > n$ ir $m + n \geqslant m - n > 0$. Vadinasi, skaičius p yra natūraliųjų skaičių $m - n$ ir $m + n$ sandauga. Jis pirminis, todėl $m - n = 1$ ir $m + n = p$.

Apibendrinkime: $m = \sqrt{a}$ ir $n = \sqrt{b}$ yra du gretimi natūralieji skaičiai, kurių suma yra pirminis skaičius. Tikrinkime atsakymus. Reikia nustatyti, kuri iš šių reikšmių negali būti lygi nei m, nei n: **A)** 12; **B)** 20; **C)** 25; **D)** 27; **E)** 50. Turime ištirti, ar šie penki natūralieji skaičiai turi sau gretimus, kuriuos pridėjus gaunamas pirminis skaičius:

A) $12 + 11 = 23$ (pirminis), $12 + 13 = 25$;

B) $20 + 19 = 39$, $20 + 21 = 41$ (pirminis);

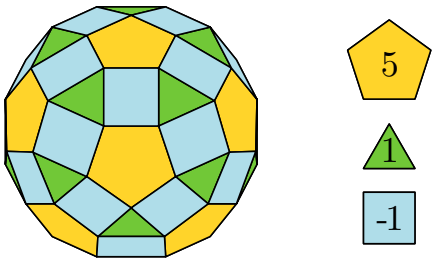
C) $25 + 24 = 49$, $25 + 26 = 51$;

D) $27 + 26 = 53$ (pirminis), $27 + 28 = 55$;

E) $50 + 49 = 99$, $50 + 51 = 101$ (pirminis).

Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka patikrinti atsakymą **C** ir pastebėti, kad skaičiai 49 ir 51 sudėtiniai. Taip pat pakanka patikrinti likusius keturis atsakymus ir gauti, kad yra galimos tokios a ir b reikšmės: **A)** $a = 12^2 = 144$, $b = 11^2$; **B)** $a = 21^2$, $b = 20^2 = 400$; **D)** $a = 27^2 = 729$, $b = 26^2$; **E)** $a = 51^2$, $b = 50^2 = 2500$.

27. (B) 50



! Nustatykime, kiek briaunainis turi kvadratinių ir trikampių sienų.

Kiekvieną iš 12 penkiakampių riboja 5 kvadratai. Gauname $12 \cdot 5 = 60$ kvadratų. Tačiau kvadratai įskaityti po kelis kartus. Paveikslėlyje matome, kad kiekvienas kvadratas turi bendrą kraštinę su lygiai dviem penkiakampiais. Vadinasi, kiekvieną kvadratą įskaitėme du kartus, ir iš tikrųjų kvadratų yra $12 \cdot 5 : 2 = 30$.

Panašiai samprotaukime ir apie trikampius. Kiekvienas iš 30 kvadratų yra tarp 2 trikampių, o kiekvienas trikampis – tarp 3 kvadratų. Gauname $30 \cdot 2 : 3 = 20$ trikampių. Tą patį rezultatą galima gauti, siejant trikampius ne su kvadratais, bet su penkiakampiais. Kiekvienas iš 12 penkiakampių turi bendrą viršūnę su 5 trikampiais, o kiekvienas trikampis – su 3 penkiakampiais. Ir vėl gauname $12 \cdot 5 : 3 = 20$ trikampių.

Dabar jau galime apskaičiuoti visų briaunainio skaičių sumą:

$$5 \cdot 12 + (-1) \cdot 30 + 1 \cdot 20 = 60 - 30 + 20 = 50.$$

28. (D) 40

! Tarkime, kad penkiaženklio skaičiaus n skaitmenų suma lygi 1000, ir išsiaiškinkime, kokie gali būti jo skaitmenys. Kad situacija taptų aiškesnė, užrašykime skaičiaus 1000 skaidinį pirminiais daugikliais: $1000 = 2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Pirmiausiai išsiaiškinkime su trimis penketais, esančiais skaidinyje. Skaičiaus n skaitmenų sandauga dalijasi iš 5^3. Nulinio skaitmens skaičiuje n nėra, o joks kitas skaitmuo iš $5^2 > 9$ nei tuo labiau iš 5^3 nesidalija. Todėl trys iš penkių skaičiaus n skaitmenų dalijasi iš 5, t. y. jie lygūs 5.

Likusių dviejų skaičiaus n skaitmenų sandauga lygi $2^3 = 8$. Skaičių 8 galima dviem būdais užrašyti kaip dviejų vienaženklių skaičių sandaugą (dauginamųjų tvarkos tikslumu): $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$. Vadinasi, skaičiaus n skaitmenys yra 5, 5, 5, 1, 8 arba 5, 5, 5, 2, 4.

Tinkamą skaičiaus n reikšmę gausime, skaitmenis 5, 5, 5, 1, 8 surašę bet kokia tvarka. Pirmiausiai galime 5 būdais pasirinkti skaitmens 1 poziciją skaičiuje n. Tada skaitmeniui 8 lieka 4 pozicijos. Pasirinkus skaitmenų 1 ir 8 pozicijas, likę trys skaitmenys nustatomi vienareikšmiškai (trys penketai). Gauname $5 \cdot 4 = 20$ skaičiaus n reikšmių.

Analogiškai gauname dar 20 skaičiaus n reikšmių, naudodami skaitmenis 5, 5, 5, 2, 4. Iš viso gauname $20 + 20 = 40$ tinkamų penkiaženklių skaičių.

29. Ⓒ 34

? Monetų mases (gramais) didėjimo tvarka pažymėkime x_1, x_2, x_3, …, x_8. Tai turi būti aštuoni skirtingi natūralieji skaičiai. Pasirinkus bet kuriuos keturis iš jų ir sudarius dvi dviejų dėmenų sumas, didesnė visada turi būti suma su didžiausiu dėmeniu. Jei tas dėmuo yra x_k, tai $k \geqslant 4$. Tada atitinkama suma ne mažesnė nei $x_k + x_1$, o kita suma ne didesnė nei $x_{k-1} + x_{k-2}$. Todėl nebūtina nagrinėti visų įmanomų nelygybių. Pakanka, kad 8 skaičiai tenkintų nelygybes $x_k + x_1 > x_{k-1} + x_{k-2}$, kai $k = 4, 5, 6, 7, 8$.

Net ir nepastebėjus tokio uždavinio sąlygos suprastinimo, galima mėginti pasirinkti reikšmes $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, o tada iš eilės ieškoti x_4, x_5, … tokiu būdu: $x_4 + 1 > 2 + 3$ ir $x_4 \geqslant 5$, todėl imkime $x_4 = 5$; $x_5 + 1 > 5 + 3$ ir $x_5 \geqslant 8$, todėl imkime $x_5 = 8$; … Analogiškai toliau gauname: $x_6 + 1 > 8 + 5$ ir $x_6 = 13$; $x_7 + 1 > 13 + 8$ ir $x_7 = 21$; $x_8 + 1 > 21 + 13$ ir $x_8 = 34$. Gautoji reikšmė $x_8 = 34$ leidžia rizikuoti ir spėti, kad teisingas atsakymas yra **C**.

Tačiau būkime atsargesni. Visų pirma, pastebėkime, jog sukonstruotas pavyzdys tenkina uždavinio sąlygą: skaičių reikšmes parinkome, kad galiotų nelygybės $x_k + x_1 > x_{k-1} + x_{k-2}$. Vadinasi, ieškoma mažiausia x_8 reikšmė ne didesnė už 34. Galime atmesti atsakymus **D** ir **E**.

Patikrinkime atsakymus **A** ir **B**.

Jei **A)** $x_8 = 8$, tai $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_7 = 7$. Tada $x_1 + x_8 = 9 < 13 = x_6 + x_7$. Tai prieštarauja uždavinio sąlygai.

Jei **B)** $x_8 = 12$, tai $x_6 \geqslant x_1 + 5$, $x_7 \geqslant x_1 + 6$ ir $12 + x_1 = x_8 + x_1 > x_6 + x_7 \geqslant 2x_1 + 11$, $x_1 < 1$ – prieštara.

Renkamės atsakymą **C**.

! Monetų mases (gramais) didėjimo tvarka pažymėkime x_1, x_2, x_3, …, x_8. Dalyje **?** jau įsitikinome, kad reikšmė $x_8 = 34$ yra galima. Kad užbaigtume sprendimą, įrodykime, kad $x_8 \geqslant 34$.

Dalyje **?** pabrėžėme nelygybes $x_k + x_1 > x_{k-1} + x_{k-2}$. Tad jomis ir pasinaudokime, dėl patogumo pakeitę tokiu būdu:

$$x_k + x_1 \geqslant x_{k-1} + x_{k-2} + 1, \qquad x_k - x_1 \geqslant (x_{k-1} - x_1) + (x_{k-2} - x_1) + 1,$$

$$x_k - x_1 + 1 \geqslant (x_{k-1} - x_1 + 1) + (x_{k-2} - x_1 + 1), \qquad y_k \geqslant y_{k-1} + y_{k-2}.$$

Čia $y_m = x_m - x_1 + 1$, $m = 1, 2, \ldots, 8$. Turime $y_1 = 1$, $y_3 > y_2 > y_1$, todėl $y_2 \geqslant 2$, $y_3 \geqslant 3$. Dabar greitai gausime rezultatą:

$$y_4 \geqslant y_3 + y_2 \geqslant 3 + 2 = 5, \qquad y_5 \geqslant y_4 + y_3 \geqslant 5 + 3 = 8,$$

$$y_6 \geqslant y_5 + y_4 \geqslant 8 + 5 = 13, \qquad y_7 \geqslant y_6 + y_5 \geqslant 13 + 8 = 21,$$

$$y_8 \geqslant y_7 + y_6 \geqslant 21 + 13 = 34, \qquad x_8 = y_8 + x_1 - 1 \geqslant 34 + 1 - 1 = 34.$$

Pabaigai pastebėkime, kad **?** dalies pavyzdį gausime, imdami $x_1 = 1$ ir nelygybes $y_k \geqslant y_{k-1} + y_{k-2}$ pavertę lygybėmis. Lygybė $y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$ kreipia mūsų dėmesį į tai, kad gautąją seką 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 sudaro matematikoje gerai žinomi Fibonačio skaičiai, kurių kiekvienas lygus prieš jį einančių dviejų skaičių sumai.

30. (D) Mėlynas

! Tarp bet kurių penkių iš eilės einančių skaičių yra po vieną raudoną, geltoną, mėlyną ir todėl po du žalius skaičius. Nagrinėkime bet kuriuos šešis iš eilės einančius užrašytus skaičius n, $n+1$, …, $n+5$. Keturi skaičiai $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ yra užrašyti keturiomis iš šių penkių spalvų: raudona, geltona, mėlyna, žalia, žalia. Likusia penkta spalva turi būti užrašytas tiek skaičius n, tiek skaičius $n+5$. Vadinasi, bet kurie du užrašyti skaičiai, kurių skirtumas yra 5, nudažyti ta pačia spalva, o skaičių spalvų seka yra periodinė su periodu 5.

Pastebėjus spalvų sekos periodiškumą, uždavinys iš karto palengvėja. Žinant skaičių 1, 2, 3, 4, 5 spalvas, galima nustatyti bet kurio kito skaičiaus spalvą. Pavyzdžiui, kadangi skaičius 2 žalias, tai tokie yra visi skaičiai 2, 7, 12, 17, 22, …, 202, …, kurie dalijasi iš 5 su liekana 2. Kadangi skaičius 20 žalias, tai tokie yra skaičiai 15, 10, 5 ir visi skaičiai, kurie dalijasi iš 5.

Taigi skaičiai 2 ir 5 yra žali. Skaičiai 1 ir 4 negali būti raudoni, nes po raudono skaičiaus eina geltonas. Taigi raudonas intervale nuo 1 iki 5 turi būti skaičius 3. Tada skaičius 4 yra geltonas, o mėlynas yra likęs šio intervalo skaičius 1.

Kadangi skaičius 2021 dalijasi iš 5 su liekana 1, tai jis yra tos pačios spalvos kaip ir skaičius 1 – mėlynas.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	C
2	B
3	B
4	D
5	B
6	D
7	C
8	C
9	E
10	A
11	D
12	B
13	D
14	A
15	A
16	E
17	A
18	C
19	C
20	E
21	E
22	E
23	C
24	A
25	E
26	C
27	B
28	D
29	C
30	D