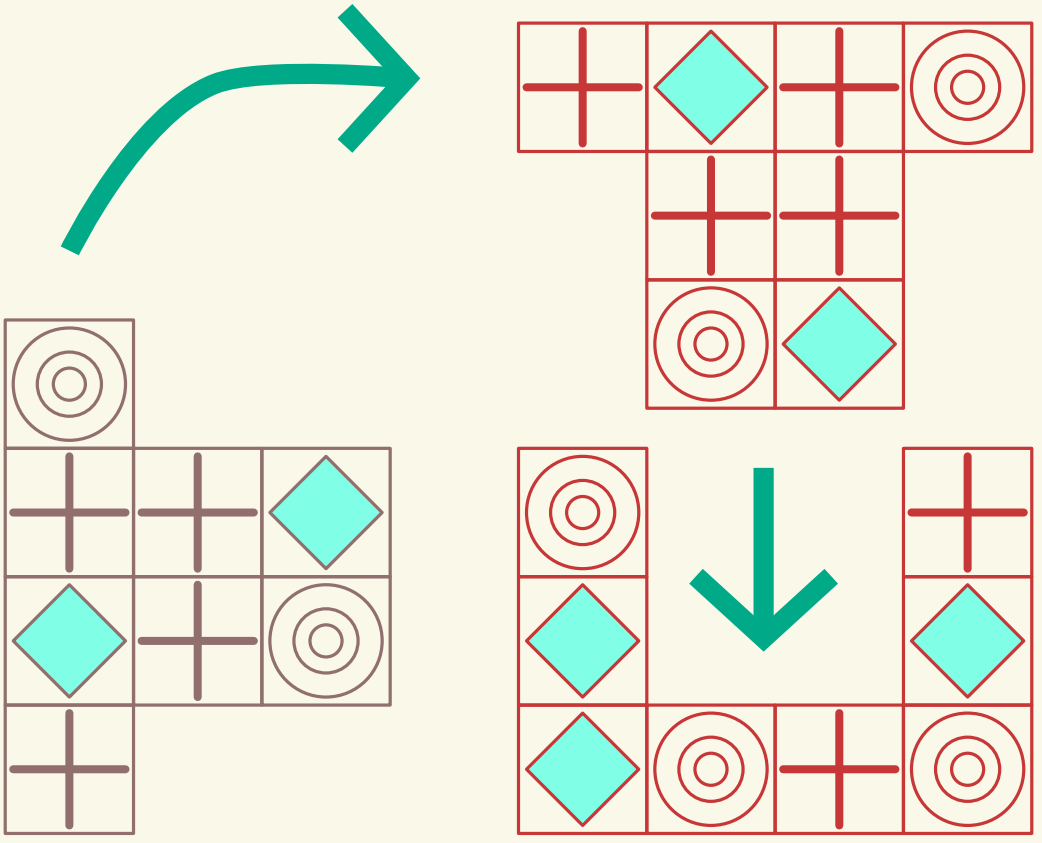
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA Nykštukas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2021

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2021. Nykštukas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorė ir sudarytoja
Marytė Skakauskienė

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Marytė Skakauskienė, 2021
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2021

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **11**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 17000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2021 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2021 metų kovo 18 dieną keliavo ir gausiai sprendė 1–2 klasių (*Nykštuko* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

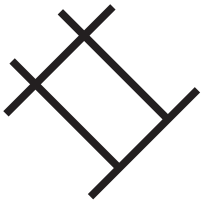
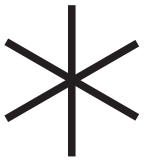
Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

2021 m. *Nykštuko* užduočių sąlygos

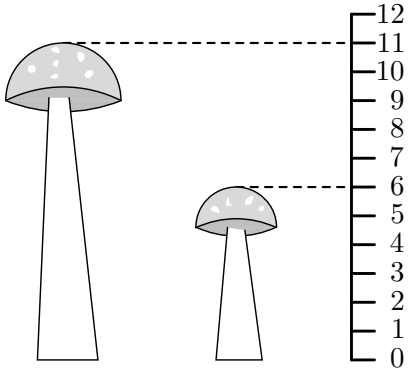
Klausimai po 3 taškus

1. Nora turi tris tokius pagaliukus: ——. Jų negalima nei laužti, nei lenkti. Kurią iš pavaizduotų figūrų galėjo sudėlioti Nora?

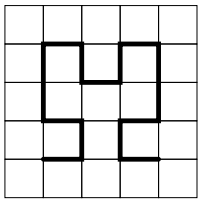
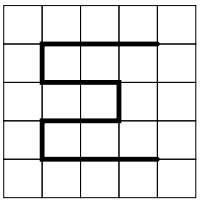
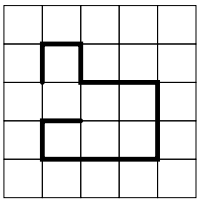
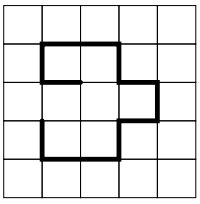
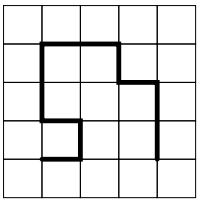
A) **B)** **C)**  **D)** **E)** 

2. Piešinyje matome dvi musmires. Koks yra jų aukščių skirtumas?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 11 **E)** 17

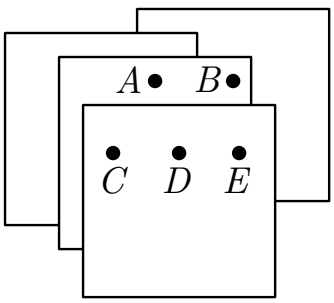


3. Kuriame iš paveikslėlių ryškioji linija yra ilgiausia?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

4. Mykolas turi smeigtuką ir keturias vienodas popieriaus korteles, padėtas kaip parodyta paveikslėlyje. Jis nori iš karto prismeigti visas keturias korteles. Į kurį iš pažymėtų taškų jam reikia smeigti smeigtuką?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E



5. Elena apsivilko paveikslėlyje pavaizduotus marškinėlius ir atsistojo prieš veidrodį. Ką ji mato veidrodyje?

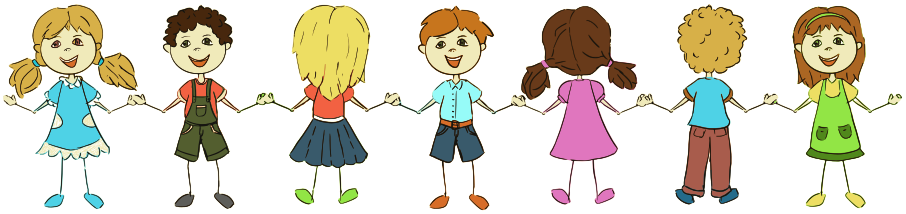
A) 1202 **B)** 2021 **C)** 2120 **D)** 1202 **E)** 2021

6. Bananai yra brangesni už obuolius, bet pigesni už braškes. Braškės yra brangesnės už avietes, bet pigesnės už vynuoges. Kuri prekė yra brangiausia?

A) Bananai **B)** Obuoliai **C)** Braškės **D)** Vynuogės **E)** Avietės

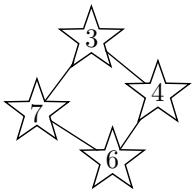
Klausimai po 4 taškus

7. Septyni vaikai stovi susikibę rankomis eilėje. Vieni žiūri į priekį, o kiti – atgal (žr. paveikslėlį). Kiek iš šių vaikų laiko kito vaiko ranką dešine ranka?

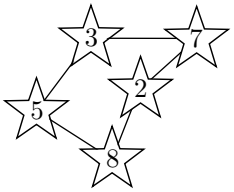


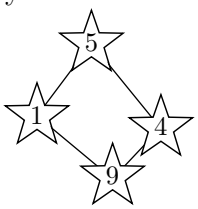
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

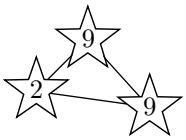
8. Kengūros žvaigždyne visos žvaigždės pažymėtos skaičiais, didesniais už 3, o tų skaičių suma yra 20. Kuriame paveikslėlyje pavaizduotas Kengūros žvaigždynas?

A) 

B)

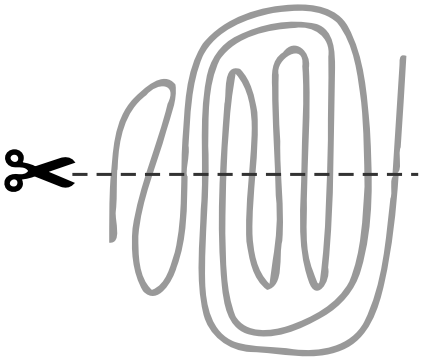
C) 

D) 

E) 

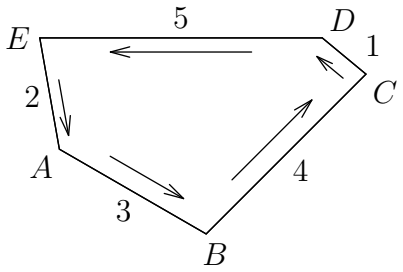
9. Linas turėjo virvutę ir ją perkirpo kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek virvutės gabalų turės Linas?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

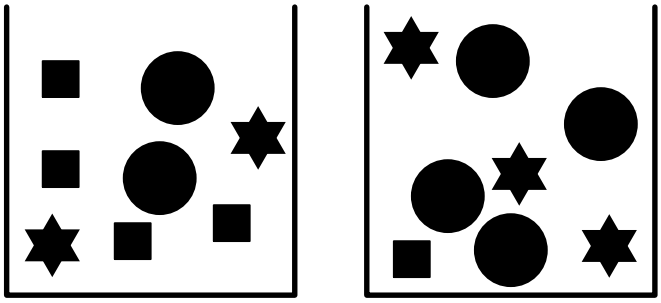


10. Kačiukas Murkis ėjo taku rodyklių kryptimi (žr. paveikslėlį). Jis iškeliavo iš taško B ir įveikė 20 metrų. Kuriame taške Murkis baigė pasivaikščiojimą?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E



11. Koks yra mažiausias bendras skaičius figūrų, kurias Ada turėtų įmesti į stiklines, pavaizduotas paveikslėlyje, kad pirmoje stiklinėje kvadratų būtų tiek pat kaip ir antroje, skritulių pirmoje stiklinėje būtų tiek pat kaip ir antroje, ir žvaigždžių pirmoje stiklinėje būtų tiek pat kaip antroje stiklinėje?



A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

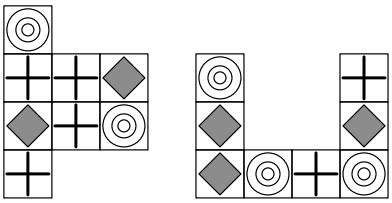
12. Tomas koduoja žodžius naudodamasis paveikslėlyje pavaizduota lentele. Vietoj raidės iš lentelės jis nurodo raidės stulpelį ir eilutę. Pavyzdžiui, vietoj raidės R jis rašo kodą $C3$, o žodį PIZZA užrašo kodu $A2\,A4\,C1\,C1\,B2$. Kokį žodį Tomas užrašė kodu $B3\,B2\,C4\,D2$?

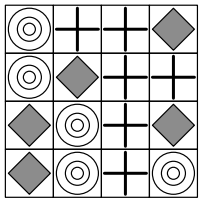
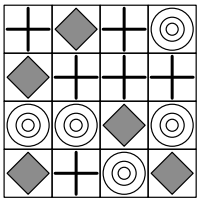
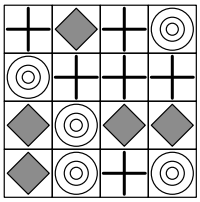
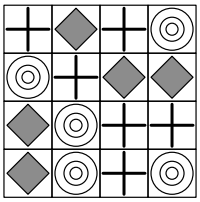
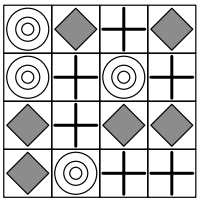
A) MAZE **B)** MASK **C)** MILK **D)** MATE **E)** MATH

	A	*B*	*C*	*D*
1	B	K	Z	E
2	P	A	F	H
3	S	M	R	W
4	I	N	T	L

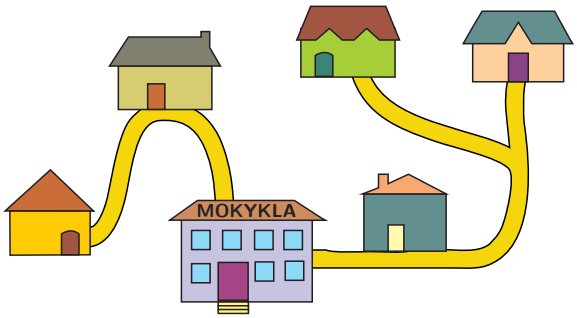
Klausimai po 5 taškus

13. Kurį kvadratą galima sudaryti iš dviejų dalių, pavaizduotų dešinėje?



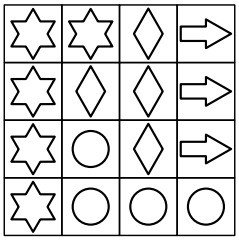
A)  B)  C)  D)  E) 

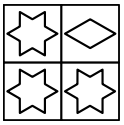
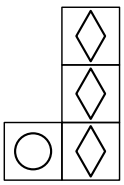
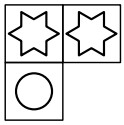
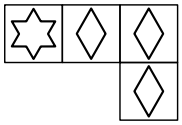
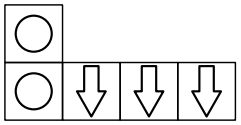
14. Paveikslėlyje pavaizduota mokykla ir penkių draugų – Alės, Balio, Dariaus, Linos ir Roko namai. Rokas visada eina į mokyklą pro Dariaus namus. Alė ir Lina į mokyklą eina pro Balio namus. Kuris namas yra Roko?



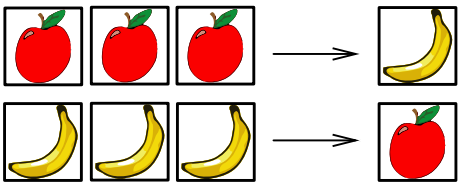
A) B) C) D) E)

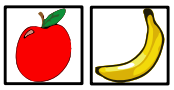
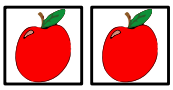
15. Milda kvadratą sudėliojo paėmusi keturias iš penkių žemiau pavaizduotų figūrų. Kurios figūros ji nepanaudojo?



A)  B)  C)  D)  E) 

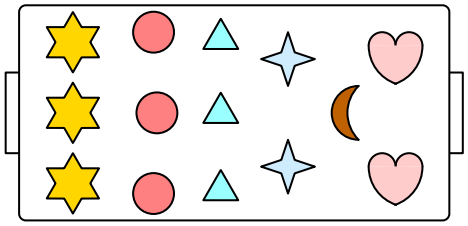
16. Ainis turi kortelių su obuoliu ir kortelių su bananu. Jis gali atlikti tik šiuos mainus:
tris korteles su obuoliu iškeisti į vieną kortelę su bananu;
tris korteles su bananu iškeisti į vieną kortelę su obuoliu.
Šiuo metu Ainis turi devynias korteles: keturias su obuoliu ir penkias su bananu. Kas liks Ainiui atlikus visus įmanomus mainus?

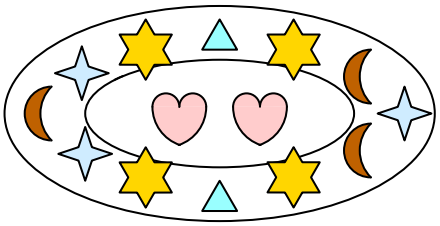


A) **B)** **C)**  **D)**  **E)**

17. Penkios kortelės **2** **3** 4 5 **6** sudėtos į dvi dėžutes taip, kad skaičių jose sumos yra lygios. Kuri kortelė galėjo atsidurti vienoje dėžutėje su kortele, pažymėta skaičiumi 4?
A) Tik 3 **B)** Tik 5 **C)** Tik 6 **D)** 5 arba 6 **E)** 2 arba 3

18. Kiekvienas konditerijos konkurso dalyvis paruošė po tokį pat sausainių rinkinį, pavaizduotą pirmame paveikslėlyje. Koks turi būti mažiausias konkurso dalyvių skaičius, kad iš jų iškeptų sausainių galima būtų sudaryti rinkinį, pavaizduotą antrame paveikslėlyje?





A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

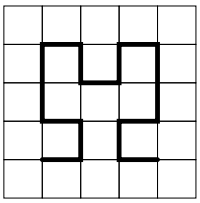
Nykštuko užduočių sprendimai

1. Ⓔ

! **A**, **B**, **C** ir **D** paveikslėliuose figūros sudėliotos iš keturių pagaliukų, tik **E** – iš trijų pagaliukų.

2. Ⓑ 5

! Iš didesnės musmirės aukščio atimame mažesnės musmirės aukštį, $11 - 6 = 5$.

3. Ⓐ 

! Visuose paveikslėliuose suskaičiuojame ryškiųjų linijų ilgius: **A** – 15, **B** – 13, **C** – 12, **D** – 12, **E** – 11. Ilgiausia linija yra **A** paveikslėlyje.

4. Ⓓ *D*

! Taškuose A, C ir E prismeigiamos trys kortelės, taške B prismeigiamos dvi kortelės. Visos keturios kortelės prismeigiamos tik taške D.

5. Ⓔ 2021

! Kai Elena stovi prieš veidrodį, ji yra atsisukusi nugara į mus. Tuomet skaitmenys ant marškinėlių veidrodyje yra išsidėstę tvarka 1202 ir matome šių skaitmenų veidrodinį atspindį.

Tikrai netinka atsakymas **A** (nes 1 veidrodinis atspindys turėtų būti kitoks). Netinka **B** ir **C** (nes skaitmenys išdėstyti ne ta tvarka). Netinka ir **D** (nes 1 ir 2 veidrodinis atspindys turėtų būti kitoks). **E** – minėtų trūkumų nėra.

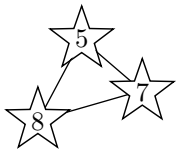
6. Ⓓ Vynuogės

! Palyginus obuolius, bananus ir braškes, brangiausios yra braškės, tačiau jos yra pigesnės už vynuoges. Vadinasi, brangiausios yra vynuogės.

7. Ⓔ 6

! Matome, kad trys vaikai, žiūrintys į priekį, ir trys vaikai, žiūrintys atgal, laiko kito vaiko ranką dešine ranka. Taigi, $3 + 3 = 6$.

8. (B)



! **A**, **C**, **D** ir **E** paveikslėliuose pavaizduoti žvaigždynai netinka, nes juose yra žvaigždžių, pažymėtų skaičiais 3, 2, 1. **B** paveikslėlyje pavaizduotas Kengūros žvaigždynas, nes visos žvaigždės pažymėtos skaičiais, didesniais už 3, o jų suma $5 + 7 + 8 = 20$.

9. (D) 12

! Atidžiai suskaičiuojame virvutės gabalus, esančius virš ir po kirpimo linija. Gautus skaičius sudedame, $6 + 6 = 12$.

10. (D) *D*

! Pradėję nuo 4, rašome paeiliui skaičius tol, kol jų suma tampa lygi 20: 4+1+5+2+3+4+1 = 20. Pasivaikščiojimą kačiukas baigs taške D, nuėjęs visą ratą ir dar atkarpą DE.

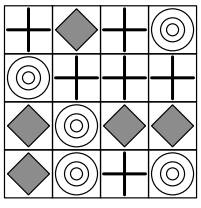
11. (C) 6

! Figūrų abiejose stiklinėse bus po lygiai, kai Ada į kairiąją stiklinę įmes 2 skritulius ir 1 žvaigždutę, o į dešiniąją stiklinę įmes 3 kvadratus. Mažiausias bendras įmestų figūrų skaičius lygus sumai $2 + 1 + 3 = 6$.

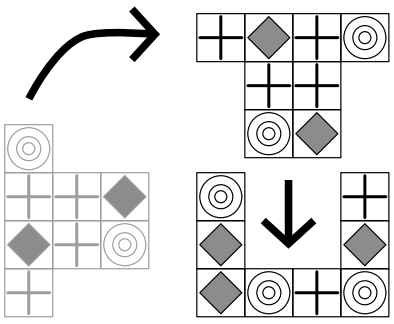
12. (E) MATH

! B3 užkoduota raidė M, B2 – raidė A, C4 – raidė T, D2 – raidė H. Taigi, Tomas kodu užrašė žodį MATH.

13. (C)

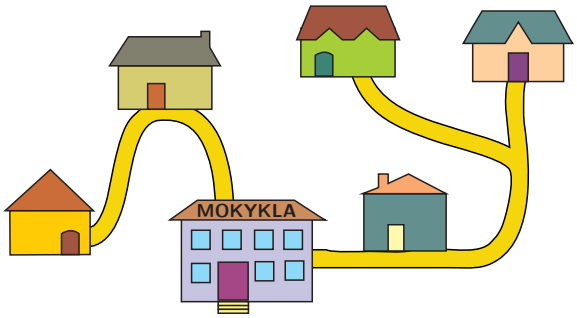


! Kairiąją dalį pasukdami „įdedame“ į dešiniąją. Tuomet viršutinėje eilutėje bus: tuščias langelis, langelis su kvadratu, tuščias langelis ir langelis su apskritimais. Antroje eilėje – pirmas langelis su apskritimais, kiti langeliai tušti. Trečioje eilėje – pirmame langelyje kvadratas, antrame apskritimai, trečiame ir ketvirtame kvadratai. Ketvirta eilutė lieka iš dešiniosios dalies. Toks kvadratas pavaizduotas **C** atsakyme.

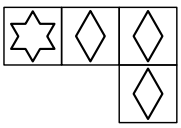


14. Ⓑ

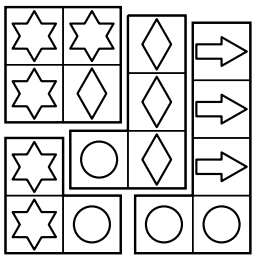
! Paveikslėlyje yra vienintelis namas, pro kurį eina du keliai. Vadinasi, tai Balio namas, o pro jį eina Alė ir Lina. Taigi jų visų trijų namai yra į dešinę nuo mokyklos.



Lieka tik du namai kairėje. Tik pro vieną iš jų eina kelias į mokyklą, taigi tas namas Dariaus. Lieka kairiausias namas, jis ir yra Roko.

15. Ⓓ 

? Mildos sudėliotame kvadratėlyje bandome surasti visas figūras ir nuspalvinti jas skirtingomis spalvomis. Piešinyje tos dalys šiek tiek atitrauktos. Dešiniajame viršutiniame kampe pastebime **A** figūrą pasuktą į dešinę, šalia jos yra **B** figūra, o kairiajame apatiniame kampe yra pasukta į kairę **C** figūra. Nesunku pastebėti, kad pridėjus **E** figūrą užsipildo visas kvadratėlis. Liko nepanaudota **D** figūra.



! Paprasčiausia suskaičiuoti figūrėles. Kvadrate yra 5 žvaigždės, 4 skrituliai, 4 rombai ir 3 rodyklės. Visose penkiose figūrose yra 6 žvaigždės, 4 skrituliai, 7 rombai ir 3 rodyklės. Vadinasi, nepanaudota 1 žvaigždė ir 3 rombai. Tokia yra **D** figūra.

16. Ⓐ

? Tris korteles su obuoliais keičiame į vieną su bananu. Po šio keitimo turime šešias korteles su bananais ir vieną su obuoliu. Šešias korteles su bananais keičiame į dvi su obuoliais. Po šio keitimo turime tris korteles su obuoliais, jas pakeičiame į kortelę su bananu. Teisingas atsakymas **A**.

! Griežtai kalbant, reikia išbandyti ir kitą būdą: pirmu ėjimu keičiame 3 bananus į vieną obuolį – turėsime 5 obuolius ir 2 bananus. Antras ėjimas vienintelis – keisti 3 obuolius į 1 bananą – lieka 2 obuoliai ir 3 bananai, kaip ir pradedant nuo obuolių. Toliau keitimai vienareikšmiai.

17. Ⓒ Tik 6

! Kadangi visų skaičių suma lygi $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$, tai kiekvienos dėžutės skaičių suma lygi $20 : 2 = 10$. Galvokime apie didžiausią skaičių, 6. Jam į dėžutę tinka tik 4 (jeigu prie 6 nieko nepridėtume, būtų per mažai; jeigu prie 6 pridėtume du skaičius, būtų ne mažiau kaip $6 + 2 + 3 = 11$, – per daug). Vadinasi, vienoje iš dėžučių yra skaičiai 4 ir 6.

18. Ⓒ 3

! Antrame paveikslėlyje yra trys mėnuliuko formos sausainiai, o pirmame tik vienas. Vadinasi, vien dėl jų reiks mažiausiai trijų rinkinių. Tikriname, ar tokiu atveju užteks kitų sausainių (bus po 9 geltonų žvaigždutės, skrituliukų ir trikampėlių formos sausainius, po 6 mėlynų žvaigždučių ir širdelių formos sausainius). Taigi tikrai užteks visų rūšių sausainių.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	E
2	B
3	A
4	D
5	E
6	D
7	E
8	B
9	D
10	D
11	C
12	E
13	C
14	B
15	D
16	A
17	C
18	C