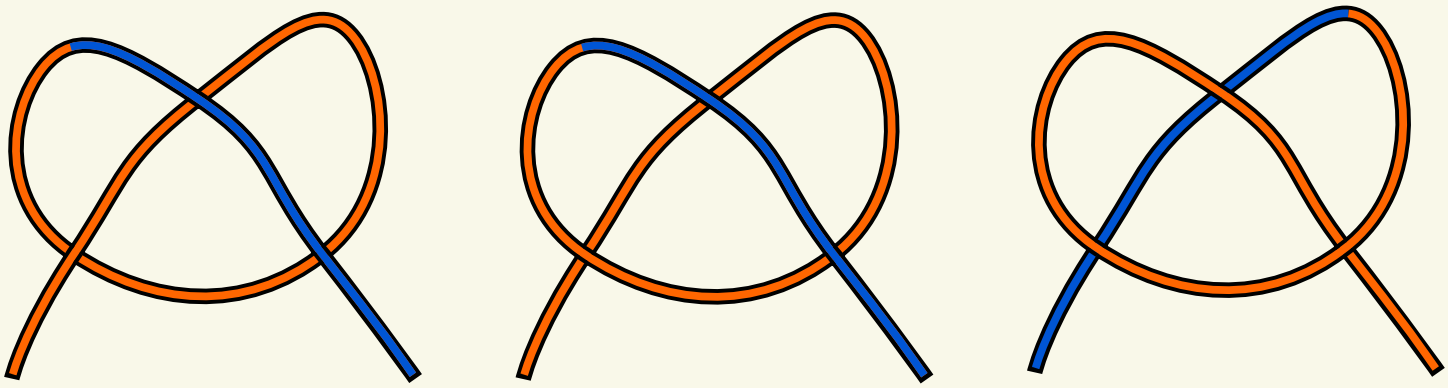
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA Senjoras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2021

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2021. Senjoras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Aivaras Novikas, 2021
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2021

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **11**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 17000 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2021 metais. Nors, žinoma, šiais metais viskas dėl tos nelemtos pandemijos atrodė, pakrypo ir klostėsi visiškai kitaip negu iki šiol. Pasitvirtino visiems teoriškai gerai girdėta išmintis, kad karantininis gyvenimas yra pilnas staigmenų ir netikėtumų: konkursas iš trečiojo kovo ketvirtadienio nusikėlė į vėlesnę datą ir vyko nuotoliniu būdu.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis besprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo

ir mokslo ministerija, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas bei Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2021 metų kovo 18 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

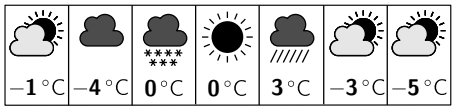
Organizatoriai

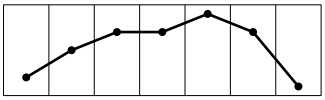
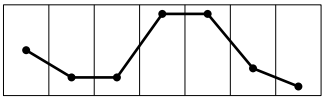
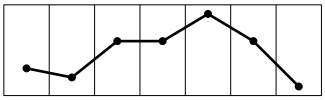
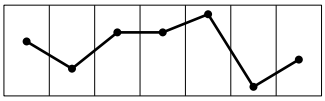
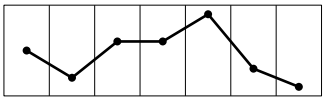
2021 m. *Senjoro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kengūradienis yra trečiasis kovo ketvirtadienis. Viena iš atsakymuose nurodytų datų nėra kengūradienis. Kuri?
A) 2022 m. kovo 17 d. **B)** 2023 m. kovo 16 d. **C)** 2024 m. kovo 14 d.
D) 2025 m. kovo 20 d. **E)** 2026 m. kovo 19 d.

2. Kartą išmanioji programėlė pateikė artimiausių 7 dienų orų prognozę, pavaizduotą dešinėje. Čia nurodyta kiekvienos dienos aukščiausia temperatūra. Kuris paveikslėlis vaizduoja numatomus aukščiausios temperatūros pokyčius?

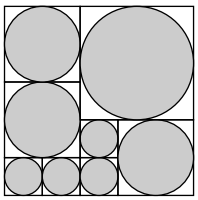


A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

3. Vienetinis kubas padalytas į du lygius stačiakampius gretasienius. Koks yra vieno iš šių gretasienių paviršiaus plotas?
A) $\frac{3}{2}$ **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

4. Kiek sveikųjų skaičių yra intervale $(20-\sqrt{21};\ 20+\sqrt{21})$?
A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

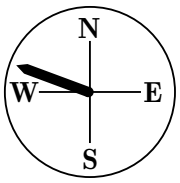
5. Didysis kvadratas padalytas į mažesnius kvadratus (žr. pav.). Į kiekvieną iš mažesniųjų kvadratų įbrėžtas skritulys. Kurią didžiojo kvadrato ploto dalį sudaro bendras visų skritulių plotas?
A) $\frac{6\pi}{25}$ **B)** $\frac{\pi}{5}$ **C)** $\frac{3\pi}{10}$ **D)** $\frac{\pi}{4}$ **E)** $\frac{5\pi}{16}$

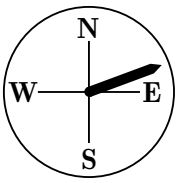


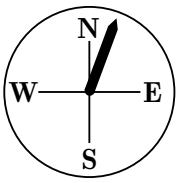
6. Kuris iš penkių skaičių didžiausias, jei $x=\frac{\pi}{4}$?
A) x^4 **B)** x^2 **C)** x **D)** $\sqrt{x}$ **E)** $\sqrt[4]{x}$

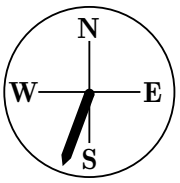
7. Stačiakampio popieriaus lapo matmenys yra $x\times y$, kur $x>y$. Suglaudus šio lapo dvi priešingas kraštines, galima gauti šoninį ritinio paviršių. Tai galima padaryti dviem būdais, ir atitinkami du ritiniai nelygūs. Koks yra aukštesniojo ritinio ir žemesniojo ritinio tūrių santykis?
A) $y^2:x^2$ **B)** $y:x$ **C)** 1:1 **D)** $x:y$ **E)** $x^2:y^2$

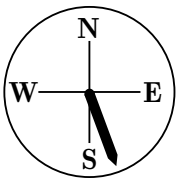
8. Audros metu status vėliavos stiebas pasviro. Tiek žiūrint į jį iš šiaurės vakarų, tiek žiūrint į jį iš rytų, stiebo viršūnė yra dešinėje nuo stiebo pagrindo. Viename iš paveikslėlių parodyta stiebo pasvirimo kryptis. Kuriame?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

9. Trikampio viršūnės stačiakampėje koordinačių sistemoje yra $(p; q)$, $(3p; q)$ ir $(2p; 3q)$, kur $p, q > 0$. Koks yra trikampio plotas?
A) $\frac{pq}{2}$ **B)** pq **C)** $2pq$ **D)** $3pq$ **E)** $4pq$

10. Natūralusis skaičius patinka Aušrinei, jei jis yra triženklis, dalijasi iš 3, o kiekvienas jo skaitmuo lygus 1, 3 arba 5 (skaičiaus skaitmenys nebūtinai skirtingi). Keli natūralieji skaičiai patinka Aušrinei?
A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 27

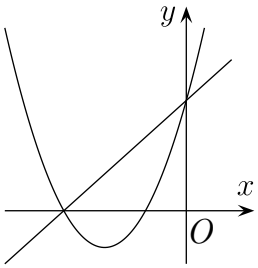
Klausimai po 4 taškus

11. Kokią dalį visų skaičiaus 7! teigiamų daliklių sudaro nelyginiai skaičiai?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{6}$

12. Duotos aibės $A = (0; 1) \cup (2; 3)$ ir $B = (1; 2) \cup (3; 4)$. Kokią aibę sudaro visos įmanomos $a + b$ reikšmės, kur $a \in A$, o $b \in B$?
A) $(1; 3) \cup (3; 5) \cup (5; 7)$ **B)** $(1; 5) \cup (5; 7)$ **C)** $(1; 3) \cup (3; 7)$ **D)** $(1; 7)$
E) Kitas atsakymas

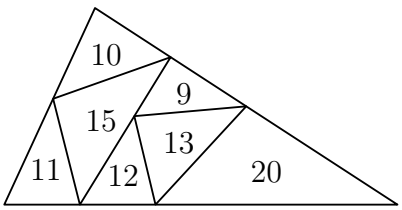
13. Natūralusis skaičius patinka Vakarei, jei jis yra triženklis, o užrašius jo skaitmenis atbulai, jis padidėja 99. Kiek natūraliųjų skaičių patinka Vakarei?
A) 8 **B)** 64 **C)** 72 **D)** 80 **E)** 81

14. Skaičiai a, b, c yra skirtingi. Paveikslėlyje pavaizduotos parabolė $y = ax^2 + bx + c$ ir tiesė, kertanti parabolę koordinačių ašyse. Tiesės lygtis nurodyta viename iš atsakymų. Kuriame?
A) $y = bx + c$ **B)** $y = cx + b$ **C)** $y = ax + b$ **D)** $y = ax + c$
E) $y = cx + a$



15. Didįjį trikampį sudaro 7 trikampėliai. Kiekvieno trikampėlio viduje užrašytas jo perimetras (žr. pav.). Koks yra didžiojo trikampio perimetras?

A) 31 **B)** 34 **C)** 41 **D)** 62 **E)** Kitas atsakymas



16. Kiekvienam natūraliajam skaičiui N jo skaitmenų sandaugą pažymėkime $p(N)$. Pavyzdžiui, $p(23) = 2 \cdot 3 = 6$. Apskaičiuokite $p(10) + p(11) + p(12) + \ldots + p(99) + p(100)$.

A) 2025 **B)** 4500 **C)** 5005 **D)** 5050 **E)** Kitas atsakymas

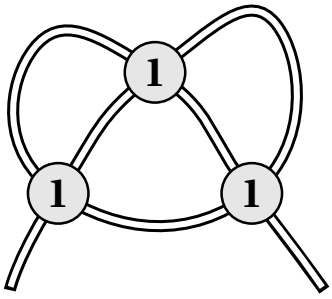
17. Lina 5×5 lentelės kiekviename langelyje įrašė po skaičių. Tada ji apskaičiavo kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą. Visos 10 sumų lygios. Kai kurie įrašytieji skaičiai parodyti paveikslėlyje. Koks skaičius pažymėtas klaustuku?

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 23

	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

18. Paveikslėlyje pavaizduota susukta virvelė, pridengta trimis monetomis. Po kiekviena moneta virvelė kerta save vienu iš dviejų būdų: arba . Susukant virvelę, kiekvienoje pridengtoje vietoje vienas iš šių dviejų būdų pasirinktas atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad įtempus virvelę ji užsiriš mazgu?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{8}$

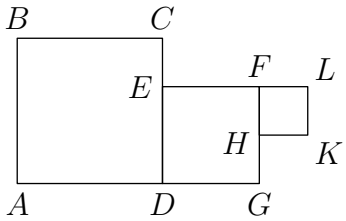


19. Rokas visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 1000 tam tikra tvarka surašė vieną po kito. Tada kiekvienam gretimų skaičių trejetui gautojoje sekoje jis apskaičiavo tų trijų skaičių sumą. Kiek daugiausiai nelyginių sumų galėjo gauti Rokas?

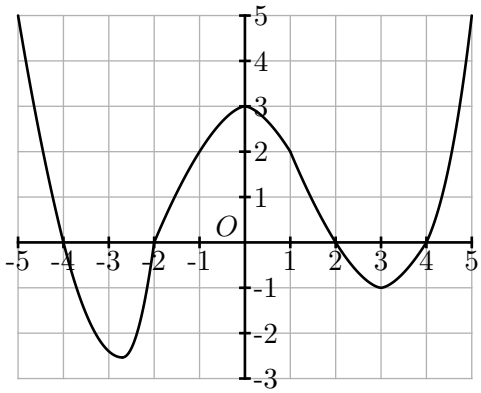
A) 997 **B)** 996 **C)** 995 **D)** 994 **E)** 993

20. Kvadratai $ABCD$, $DEFG$ ir $FHKL$ suglausti, kaip parodyta paveikslėlyje. Taškai B, E ir K yra vienoje tiesėje. Kvadrato $ABCD$ plotas yra 36, o kvadrato $DEFG$ – 16. Koks yra trikampio BGK plotas?

A) $14\frac{2}{3}$ **B)** $15\frac{1}{3}$ **C)** 16 **D)** $17\frac{2}{3}$ **E)** 18



Klausimai po 5 taškus

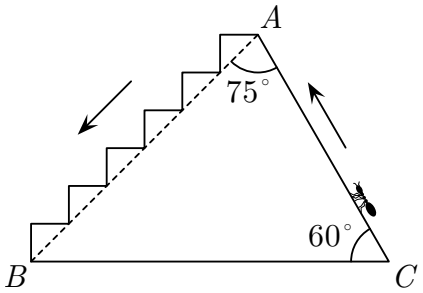


21. Paveikslėlyje pavaizduotas funkcijos $f : [-5; 5] \to \mathbb{R}$ grafikas. Kiek skirtingų sprendinių turi lygtis $f(f(x)) = 0$?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

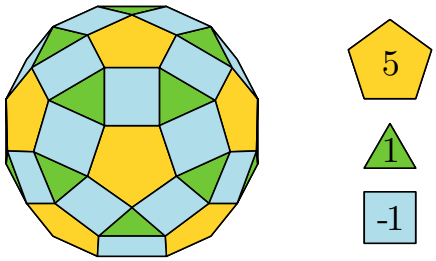
22. Lentoje buvo užrašyti skaičiai 1, 2, 7, 9, 10, 15 ir 19. Du žaidėjai pakaitomis trynė po vieną skaičių, kol lentoje liko vienintelis skaičius. Vieno žaidėjo nutrintų skaičių suma yra du kartus didesnė už kito žaidėjo nutrintų skaičių sumą. Koks skaičius liko lentoje?
A) 2 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 19

23. Bet kuriems natūraliesiems x, y funkcijos f reikšmės $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$ apibrėžtos ir tenkina sąlygą $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Apskaičiuokite $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$, jei $f(1) = 2$.
A) 0 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 2 **D)** 2020 **E)** Kitas atsakymas

24. Skruzdėlė nuropojo tiesia linija iš taško C į tašką A, o tada – laipteliais iš taško A į tašką B (žr. pav.). Kiek kartų skruzdėlės kelias iš A į B yra ilgesnis už kelią iš C į A?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

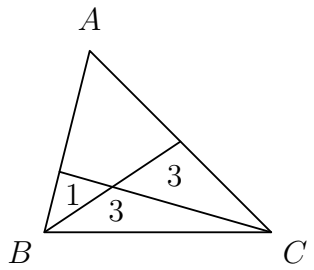


25. Lygiakraščius trikampius, kvadratus ir taisyklingus penkiakampius erdvėje jungiant taip, kaip parodyta paveikslėlyje, sudarytas briaunainis. Penkiakampių yra 12, kiekvieną iš jų riboja penki kvadratai, o kiekvieną trikampį – trys kvadratai. Kiekvienoje briaunainio sienoje užrašytas skaičius: penkiakampyje – skaičius 5, trikampyje – skaičius 1, kvadrate – skaičius -1. Kokia yra visų briaunainio skaičių suma?
A) 20 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 120

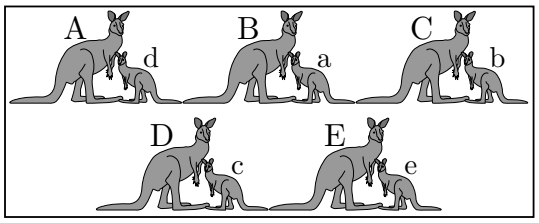


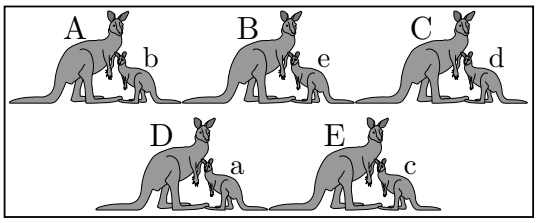
26. Skaičiai a ir b yra sveikųjų skaičių kvadratai. Skaičius $a - b$ yra pirminis. Kuris skaičius negali būti lygus nei a, nei b?
A) 144 **B)** 400 **C)** 625 **D)** 729 **E)** 2500

27. Dvi atkarpos dalija trikampį ABC į keturias dalis. Paveikslėlyje parodyti trijų dalių plotai 1, 3 ir 3. Koks yra trikampio ABC plotas?
A) 12 **B)** 12,5 **C)** 13 **D)** 13,5 **E)** 14



28. Iš mamų kengūrų A, B, C, D, E sterblių iššoko po kengūriuką. Kengūriukų vardai yra a, b, c, d, e. Kairiajame paveikslėlyje lygiai du kengūriukai yra su savo mamomis, o dešiniajame – lygiai trys. Kas yra **kengūriuko a** mama?

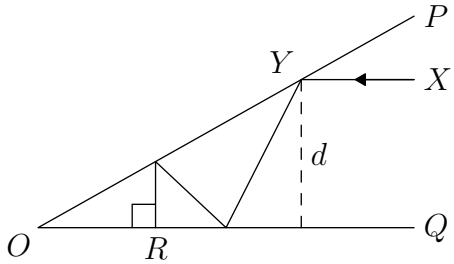




A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

29. Kiekvienam realiajam skaičiui k didžiausia reiškinio $|4x^2 - 4x + k|$ reikšmė, kai $x \in [-1; 1]$, pažymėta $M(k)$. Kokia yra mažiausia galima $M(k)$ reikšmė?
A) 4 **B)** $4\frac{1}{2}$ **C)** 5 **D)** $5\frac{1}{2}$ **E)** 8

30. Plokšti veidrodžiai OP ir OQ sudaro smailųjį kampą. Šviesos spindulys XY, lygiagretus su OQ, atsispindi nuo OP taške Y, tada atsispindi nuo OQ, vėl atsispindi nuo OP ir stačiu kampu krinta į veidrodžio OQ tokį tašką R, kad $OR = 5\,\text{cm}$. Raskite atstumą d (centimetrais) tarp spindulio XY ir veidrodžio OQ.
A) 4 **B)** $4\frac{1}{2}$ **C)** 5 **D)** $5\frac{1}{2}$ **E)** 6

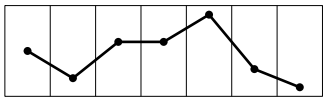


Senjoro užduočių sprendimai

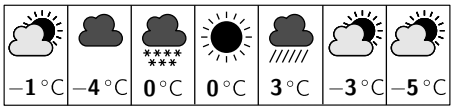
1. (C) 2024 m. kovo 14 d.

! Norint pastebėti teisingą atsakymą, visų pateiktų atsakymų tikrinti nebūtina. Trečiasis kovo ketvirtadienis gali išpulti anksčiausiai kovo $1 + 2 \cdot 7 = 15$-ą dieną. Iš tiesų, pirmasis kovo ketvirtadienis gali būti ne anksčiau nei kovo 1-ąją, todėl trečiasis – ne anksčiau nei dar už dviejų savaičių, t. y. po $2 \cdot 7$ dienų. Vadinasi, kengūradienis negali būti **C)** kovo 14-oji – nei 2024 metais, nei jokiais kitais.

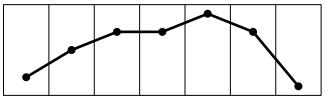
!! Iš karto aiškus vienas kengūradienis. Tai konkurso data: 2021 m. kovo 18 d. Galima iš eilės tikrinti tolimesnius metus (2022, 2023, ...). Pavyzdžiui, nustačius, kad 2023 m. kovo 16 d. yra ketvirtadienis, galima mąstyti taip. Kadangi 2024 metai keliamieji, o $366 = 350 + 14 + 2$ dienas sudaro kelios pilnos savaitės ir dar 2 dienos, tai 2024 m. kovo 16 d. yra šeštadienis, o ketvirtadieniai tais metais tada yra kovo 7-oji, 14-oji, 21-oji ir 28-oji. Taip gausime, kad visos penkios atsakymuose pateiktos datos yra ketvirtadieniai. Taigi dar būtina pastebėti, kad 2024 m. kovo 14 d. tėra antrasis, o ne trečiasis kovo ketvirtadienis.

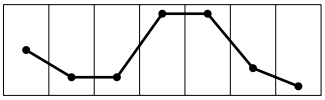
2. (E) 

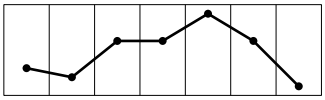
? Panagrinėkime, kaip temperatūra kito (didėjo ar mažėjo) diena po dienos. Antrąją dieną ji sumažėjo (palyginus su pirmąja diena), tada 3-iąją dieną padidėjo, 4-ąją – nepakito, 5-ąją – padidėjo, 6-ąją – sumažėjo, 7-ąją – sumažėjo. Teisingame atsakyme, einant iš kairės į dešinę, laužtė atitinkamai turi leistis, kilti, eiti horizontaliai, kilti, leistis, leistis. Lieka atsakymai **C** ir **E**. Į juos įsižiūrėjus, galima pastebėti, kuo jie skiriasi: atsakyme **C** šeštasis (iš kairės) pažymėtas laužtės taškas yra aukščiau už pirmąjį, o atsakyme **E** – žemiau. Šeštoji diena šaltesnė už pirmąją, todėl šeštasis taškas turi būti žemiau. Galime atmesti atsakymą **C**.

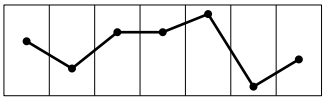


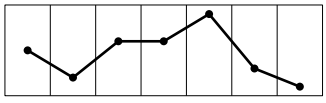
Renkamės atsakymą **E**.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

! Septynias dienas galima surikiuoti temperatūros didėjimo tvarka: 7-oji, 2-oji, 6-oji, 1-oji, 3-ioji, 4-oji (šios dvi vienodai šiltos), 5-oji. Teisingame atsakyme aukštesnę temperatūrą turi atitikti aukščiau pažymėtas taškas. Atsakyme **E** žemiausiai yra 7-asis (iš kairės) taškas, toliau eina 2-asis, 6-asis, 1-asis, 3-iasis, 4-asis (šie du yra viename aukštyje) ir aukščiausias 5-asis. Kituose atsakymuose atitinkama taškų seka kitokia. Pavyzdžiui, atsakyme **C**: 7-asis, 2-asis, 1-asis, 3-iasis, 4-asis, 6-asis (šie trys yra viename aukštyje), 5-asis.

3. (D) 4

! Turime $1 \times 1 \times 1$ kubą, padalytą į $1 \times 1 \times \frac{1}{2}$ stačiakampius gretasienius. Toks gretasienis turi dvi 1×1 sienas ir keturias $1 \times \frac{1}{2}$ sienas. Jo paviršiaus plotas lygus

$$1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 4.$$

4. (A) 9

! Kadangi $4^2 < 21 < 5^2$, tai

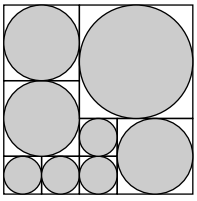
$$4 < \sqrt{21} < 5, \qquad \sqrt{21} = 4{,}\ldots, \qquad 20 + \sqrt{21} = 24{,}\ldots,$$

$$20 - \sqrt{21} = 20 - 4{,}\ldots = 16 - 0{,}\ldots = 15{,}\ldots$$

Intervalui $(20 - \sqrt{21}; 20 + \sqrt{21}) = (15{,}\ldots; 24{,}\ldots) \subset (15; 25)$ priklauso visi natūralieji skaičiai nuo 16 iki 24. Jų yra $24 - 15 = 9$.

5. (D) $\frac{\pi}{4}$

! Jei kas bandytų skaičiuoti didžiojo ir mažesniųjų kvadratų kraštinių ilgių santykius, tas šiam uždaviniui sugaištų daugiau laiko nei būtina.



Pastebėkime, kad jei spindulio r skritulys įbrėžtas į kvadratą, tai to kvadrato kraštinės ilgis lygus skritulio skersmeniui $2r$. Skritulio plotas lygus πr^2, kvadrato plotas – $4r^2$, o jų plotų santykis – $\frac{\pi}{4}$. Svarbu, kad šis santykis nepriklauso nuo r, nuo skritulio ir kvadrato dydžio.

Kadangi kiekvieno skritulio paveikslėlyje plotas sudaro tą pačią atitinkamo kvadrato ploto dalį, tai bendras visų skritulių plotas sudaro tą pačią didžiojo kvadrato ploto dalį. Taigi atsakymas yra $\frac{\pi}{4}$, ir jis nepasikeistų, jei didysis kvadratas būtų padalytas į mažesnius kvadratus kitaip, net jei tų kvadratų būtų kur kas daugiau.

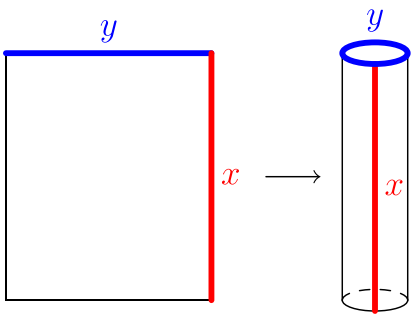
6. (E) $\sqrt[4]{x}$

! Reikia palyginti skaičius x^α, kai $x = \frac{\pi}{4}$ ir $\alpha = 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$. Pakeiskime žymėjimus, kad jie taptų labiau įprasti: tegu $a = \frac{\pi}{4}$ ir $x = 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$. Reikia nustatyti, su kuria iš penkių kintamojo x reikšmių rodiklinė funkcija $f(x) = a^x$ įgyja didžiausią reikšmę.

Prisiminkime: bendru atveju rodiklinė funkcija $f(x) = a^x$ yra didėjanti, jei $a > 1$, ir mažėjanti, jei $0 < a < 1$. Kadangi $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3{,}15}{4} < 1$, tai mažėjanti funkcija $f(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ įgyja didžiausią reikšmę su mažiausia kintamojo reikšme $x = \frac{1}{4}$.

Vadinasi, didžiausias iš penkių atsakymuose pateiktų skaičių yra $\sqrt[4]{x}$.

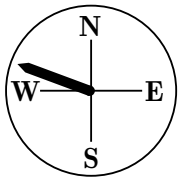
7. (B) $y : x$



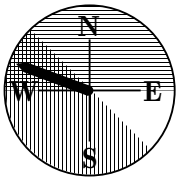
! Suglaudus lapo kraštines, kurių ilgis yra x, gaunamas ritinys, kurio aukštis (aukštinės ilgis) yra x, o pagrindo (apskritimo) ilgis lygus kitų dviejų lapo kraštinių ilgiui y. Remiantis apskritimo ilgio formule, ritinio pagrindo spindulys lygus $\frac{y}{2\pi}$, o plotas – $\pi \cdot \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 = \frac{y^2}{4\pi}$. Ritinio tūris V_1 lygus aukštinės ilgio ir pagrindo ploto sandaugai $x \cdot \frac{y^2}{4\pi} = \frac{xy^2}{4\pi}$.

Suglaudus lapo kraštines, kurių ilgis yra y, gaunamas ritinys, kurio aukštis yra y, o pagrindo ilgis yra x. Kadangi $x > y$, tai šis ritinys žemesnis už pirmąjį. Norint gauti šio ritinio tūrį V_2, tereikia pirmojo ritinio tūrio formulėje sukeisti x ir y. Taigi $V_2 = \frac{x^2y}{4\pi}$. Ieškomas tūrių santykis lygus

$$V_1 : V_2 = \frac{xy^2}{4\pi} : \frac{x^2y}{4\pi} = \frac{xy^2}{x^2y} = \frac{y}{x} = y : x.$$



8. (A)



! Atsakymą galima greitai rasti, remiantis vaizduote ir intuicija, bet pamėginkime įvardyti, ką uždavinio sąlyga sako apie atsakymuose pavaizduotos rodyklės padėtį.

Žmogus, žiūrintis į stiebą iš rytų, yra atsigręžęs į vakarus. Jam iš kairės yra pietūs, o iš dešinės yra šiaurė. Taigi stiebas yra pasviręs labiau į šiaurę nei į pietus. T. y. stiebo pasvirimo kryptį rodanti rodyklė paveikslėlyje turi būti viršutiniame pusskritulyje.

Žmogus, žiūrintis į stiebą iš šiaurės vakarų, yra atsigręžęs į pietryčius. Jam iš kairės yra šiaurės rytai, o iš dešinės yra pietvakariai. Taigi stiebas yra pasviręs labiau į pietvakarius nei į šiaurės rytus. Ir vėl stiebo pasvirimo kryptį rodanti rodyklė paveikslėlyje turi būti tam tikrame pusskritulyje.

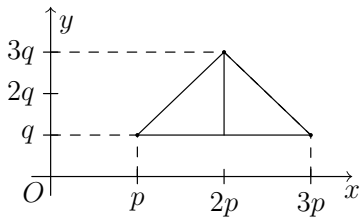
Rodyklė paveikslėlyje turi būti dviejų pusskritulių sankirtoje – languotame skritulio aštuntadalyje (žr. pav.). Taip yra atsakyme **A**.

9. (C) $2pq$

? Uždavinį galima išspręsti, parinkus konkrečias taškų koordinates. Pavyzdžiui, kai $p = q = 1$, gauname taškus $(1; 1)$, $(3; 1)$, $(2; 3)$ bei atitinkamą lygiašonį trikampį, kurio pagrindas yra lygiagretus su Ox ašimi, o to pagrindo bei į jį nuleistos aukštinės ilgiai yra lygūs 2. Taigi šio trikampio plotas lygus $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.

Įrašant $p = q = 1$ atsakymuose, tinka vienintelis atsakymas **C)** $2pq = 2$.

Renkamės atsakymą **C**.



! Trikampio viršūnės $(p; q)$ ir $(3p; q)$ turi tą pačią ordinatę q, todėl jas jungianti kraštinė yra lygiagreti su Ox ašimi, o šios kraštinės ilgis lygus $3p - p = 2p$. Į šią kraštinę nuleistos aukštinės ilgis lygus atstumui nuo taško $(2p; 3q)$ iki horizontalios tiesės $y = q$, kuriai priklauso kraštinė. Šis atstumas lygus $3q - q = 2q$. Vadinasi, trikampio plotas lygus $\frac{2p \cdot 2q}{2} = 2pq$.

10. (C) 9

! Nustatykime visus natūraliuosius skaičius, kurie patinka Aušrinei. Kad gautume tokį skaičių, reikia taip parinkti tris skaitmenis iš aibės $\{1, 3, 5\}$, kad jų suma dalytųsi iš 3 (dalumo iš 3 požymis), ir surašyti juos bet kokia tvarka.

Lengva pastebėti tokius tinkamus skaitmenų trejetus: 1, 1, 1; 3, 3, 3; 5, 5, 5; 1, 3, 5. Pirmais trimis atvejais gauname po vieną skaičių 111, 333, 555. Ketvirtuoju atveju pirmąjį skaičiaus skaitmenį galime pasirinkti 3 būdais, tada antrąjį – 2 būdais, o trečiąjį – vienu. Gauname $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ skaičius. Panorėjus juos nesunku ir išvardinti: 135, 153, 315, 351, 513, 531.

Liko išnagrinėti atvejus, kai lygiai du iš trijų skaitmenų sutampa. Atvejus galima perrinkti: 1, 1, 3; 1, 1, 5; 3, 3, 1; 3, 3, 5; 5, 5, 1; 5, 5, 3 – nė vienu iš šių atvejų skaitmenų suma nesidalija iš 3. Vietoj perrankos galima mąstyti taip. Trijų lygių skaitmenų suma dalijasi iš 3. Pakeitus vieną iš trijų skaitmenų kitu, suma vėl dalijasi iš 3, tik jei pakeistasis ir naujasis skaitmenys dalijasi iš 3 su ta pačia liekana. Tačiau skaitmenys 1, 3, 5 dalijasi iš 3 su skirtingomis liekanomis. Vadinasi, daugiau tinkamų skaičių negausime.

Radome iš viso devynis Aušrinei patinkančius skaičius.

11. (D) $\frac{1}{5}$

? Pastebėkime, kad

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot N,$$

kur N yra nelyginis skaičius. Galima numanyti, kad skaičiaus 7! nelyginiai teigiami dalikliai – tai skaičiaus N visi teigiami dalikliai ir kad, kiekvienam tokiam dalikliui d užrašę keturis skaičius $2d$, $2^2 \cdot d$, $2^3 \cdot d$, $2^4 \cdot d$, gausime visus skaičiaus 7! teigiamus lyginius daliklius. Tokiu atveju lyginių skaičiaus 7! daliklių yra 4 kartus daugiau nei nelyginių, todėl pastarieji sudaro $\frac{1}{5}$ visų teigiamų daliklių.

Renkamės atsakymą **D**.

! Užrašykime skaičiaus 7! skaidinį pirminiais daugikliais:

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Skaičiaus 7! teigiami dalikliai yra visi skaičiai $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, kur

$$a = 0, 1, 2, 3 \text{ arba } 4, \quad b = 0, 1 \text{ arba } 2, \quad c = 0 \text{ arba } 1, \quad d = 0 \text{ arba } 1.$$

Tokių skaičių yra $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

Nelyginiai yra tie dalikliai $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, kuriems

$$a = 0, \quad b = 0, 1 \text{ arba } 2, \quad c = 0 \text{ arba } 1, \quad d = 0 \text{ arba } 1.$$

Tokių skaičių yra $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Jie sudaro $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ visų teigiamų daliklių.

!! Norint rasti atsakymą, nebūtina skaičiuoti, kiek teigiamų ar nelyginių teigiamų daliklių turi skaičius 7!. Sugriežtinkime **?** dalies sprendimą.

Kadangi $7! = 2^4 \cdot N$, kur N yra nelyginis skaičius, tai kiekvienas skaičiaus 7! teigiamas daliklis d yra sandauga dviejų natūraliųjų skaičių d_1 ir d_2, kurių pirmasis dalija skaičių 2^4, o antrasis – skaičių N. Nelyginiai yra tie dalikliai d, kuriems $d_1 = 1$. Kitaip tariant, tai yra visi teigiami skaičiaus N dalikliai.

Kiekvieną d reikšmę atitinka viena d_2 reikšmė, gaunama padalijus d iš 1, 2, 4, 8 arba 16. O kiekvieną skaičiaus N daliklį $d_2 > 0$ atitinka penki skaičiaus 7! dalikliai d_2, $2d_2$, $4d_2$, $8d_2$, $16d_2$. Vadinasi, skaičiaus 7! teigiamų daliklių yra lygiai 5 kartus daugiau nei skaičiaus N teigiamų daliklių, t. y. nei skaičiaus 7! nelyginių teigiamų daliklių. Pastarieji sudaro $\frac{1}{5}$ visų teigiamų skaičiaus 7! daliklių.

Įdomu, kad šį įrodymą galima lengvai pritaikyti bendrai situacijai ir įrodyti tokį teiginį: jei n yra neneigiamas sveikasis skaičius, o N yra nelyginis natūralusis skaičius, tai nelyginiai skaičiai sudaro $\frac{1}{n+1}$ visų teigiamų skaičiaus $2^n \cdot N$ daliklių.

12. (A) $(1;\,3) \cup (3;\,5) \cup (5;\,7)$

? Galima nuspėti tokį bendrą faktą: skaičių $a+b$, kur $a \in (x_1; x_2)$, $b \in (y_1; y_2)$, aibė yra intervalas $(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$. Simboliškai galima užrašyti: $(x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$.

Jei $a \in A$, tai $a \in (0;\,1)$ arba $a \in (2;\,3)$ (2 galimybės). Jei $b \in B$, tai $b \in (1;\,2)$ arba $b \in (3;\,4)$ (2 galimybės). Gauname $2 \cdot 2 = 4$ atvejus.

Tarkime, kad $a \in (0;\,1)$, $b \in (1;\,2)$. Visų tokių $a + b$ aibė yra $(0;\,1) + (1;\,2) = (1;\,3)$. Kitais trimis atvejais galimos $a + b$ reikšmės analogiškai sudaro aibes $(0;\,1) + (3;\,4) = (3;\,5)$, $(2;\,3) + (1;\,2) = (3;\,5)$ ir $(2;\,3) + (3;\,4) = (5;\,7)$.

Visų $a + b$, kur $a \in A$, $b \in B$, aibė yra gautųjų keturių aibių sąjunga, lygi $(1;\,3) \cup (3;\,5) \cup (5;\,7)$.

Renkamės atsakymą **A**.

! Užbaikime **?** dalies sprendimą, įrodydami jos pražioje suformuluotą teiginį: skaičių $a + b$, kur $a \in (x_1; x_2)$, $b \in (y_1; y_2)$, aibė yra intervalas $(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$.

Tarkime, kad $a \in (x_1; x_2)$, $b \in (y_1; y_2)$. Kadangi $x_1 < a < x_2$ ir $y_1 < b < y_2$, tai $x_1 + x_2 < a + b < y_1 + y_2$ ir $a + b \in (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$.

Tačiau ar $a + b$ gali įgyti kiekvieną reikšmę iš šio intervalo? Pasirinkime bet kokius $a = a_0 \in (x_1; x_2)$, $b = b_0 \in (y_1; y_2)$. Kai a tolygiai mažėja nuo a_0 iki x_1, o b tuo pačiu metu – nuo b_0 iki y_1, tai $a + b$ įgyja visas reikšmes nuo $a_0 + b_0$ iki $x_1 + y_1$. Kai a tolygiai didėja nuo a_0 iki x_2, o b tuo pačiu metu – nuo b_0 iki y_2, tai $a + b$ įgyja visas reikšmes nuo $a_0 + b_0$ iki $x_2 + y_2$.

Vadinasi, visų $a + b$, kur $a \in (x_1; x_2)$, $b \in (y_1; y_2)$, aibė yra $(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$.

13. (D) 80

? Tarkime, kad Vakarei patinka triženklis skaičius $\overline{ABC}$. Pastebėkime, kad lygybėje $\overline{CBA} = \overline{ABC} + 99$ galima išprastinti skaitmenį B, atėmus iš abiejų lygybės pusių po $10B$. Kad ir kokia bebūtų skaitmenų A ir C pora, tenkinanti sąlygą $\overline{C0A} = \overline{A0C} + 99$, bet B gali būti bet kuris iš 10 skaitmenų. Vadinasi, tinkamų skaičių $\overline{ABC}$ kiekis dalijasi iš 10.

Renkamės atsakymą **D**.

! Tarkime, kad Vakarei patinka triženklis skaičius $n = \overline{ABC}$. Tada

$$\overline{CBA} = \overline{ABC} + 99,$$

$$100C + 10B + A = 100A + 10B + C + 99,$$

$$99C = 99A + 99, \qquad C = A + 1.$$

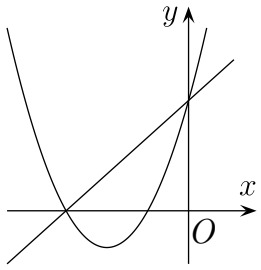
Paskutinė gauta lygybė ekvivalenti pradinei, todėl turime nustatyti, kiek yra tokių skaitmenų trejetų A, B, C, kad $A \neq 0$ (skaičius n triženklis) ir $C = A + 1$.

Galima imti $A = 1, 2, \ldots, 8$ (8 galimybės) ir atitinkamai $C = 2, 3, \ldots, 9$. Jei $A = 9$, tai $C > 9$ – netinka. Kiekvienai gautai A ir C porai galima pasirinkti bet kurį $B = 0, 1, \ldots, 9$ (10 galimybių).

Iš viso gavome $8 \cdot 10 = 80$ skaičių.

14. **D** $y = ax + c$

! Šio uždavinio sprendime būtina remtis duotais atsakymais. Juose nurodytos penkios tiesės. Reikia nustatyti, kuri iš jų **gali** sutapti su pavaizduotąja tiese l. Pamėginkime nustatyti, kurios iš penkių tiesių su l sutapti negali.



Parabolė kerta Oy ašį taške $(0; a{\cdot}0^2{+}b{\cdot}0{+}c) = (0; c)$. Atsakymuose nurodytos tiesės kerta Oy ašį taške, kurio ordinatė lygi: **A)** c; **B)** b; **C)** b; **D)** c; **E)** a. Kadangi $c \neq a$, $c \neq b$, tai galime atmesti atsakymus **B**, **C**, **E**.

Kad atmestume vieną iš likusių atsakymų, nagrinėkime kitą parabolės ir tiesės l sankirtą. Lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinius pažymėkime x_1 ir x_2, kur $x_1 < x_2$. Šie sprendiniai neigiami (parabolė kerta Ox ašį kairėje nuo taško O). Be to, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ir $b = -ax_1 - ax_2$, $c = ax_1x_2$ (Vijeto teorema).

Tiesė l eina per parabolės tašką $(x_1; 0) \in Ox$, šios tiesės lygtis yra $y = kx{+}c$, kur **A)** $k = b$ arba **D)** $k = a$. Todėl

$$0 = kx_1 + c = kx_1 + ax_1x_2 \quad (x_1 < 0), \qquad k = -ax_2.$$

Jei $k = b$, tai $-ax_2 = b = -ax_1 - ax_2$ ir $ax_1 = 0$. Tačiau $a \neq 0$, nes $y = ax^2 + bx + c$ yra parabolės lygtis, ir $x_1 < 0$. Vadinasi, galime atmesti ir atsakymą **A**.

Uždavinio sąlygoje pasakyta, kad vienas iš atsakymų yra teisingas, todėl toks turi būti likęs atsakymas **D**.

Nors tai nebūtina, pastebėkime, kad jei tikrintume galimybę $k = a$, tai gautume $x_2 = -1$. Taip gali būti – juk vienetai ašyse nepažymėti ir juos galime pasirinkti laisvai. Bet kokia parabolė $y = a(x - x_1)(x + 1)$, kur $a > 0$, $x_1 < -1$, kerta tiesę $y = ax + c$, kur $c = -ax_1$, taškuose $(0; c)$ ir $(x_1; 0)$, taigi uždavinio sąlygoje nurodytu būdu.

!! Tarkime, kad paveikslėlyje pavaizduotos tiesės lygtis yra $y = kx + m$. Tiesė ir parabolė kertasi dviejuose taškuose, vienas iš kurių yra Oy ašyje. Todėl lygtis $ax^2 + bx + c = kx + m$ turi du sprendinius x, iš kurių vienas lygus 0.

Tikrinkime atsakymus:

A) lygtis $ax^2+bx+c = bx+c$ ekvivalenti lygčiai $ax^2 = 0$, turinčiai vienintelį sprendinį 0;

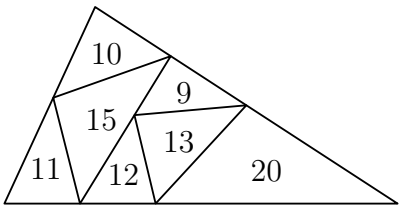
B), **C)**, **E)** $x = 0$ netenkina nė vienos iš lygčių $ax^2+bx+c = cx+b$, $ax^2+bx+c = ax+b$, $ax^2 + bx + c = cx + a$, nes $c \neq a$, $c \neq b$.

Uždavinio sąlygoje pasakyta, kad vienas iš atsakymų yra teisingas, todėl toks turi būti likęs atsakymas **D**.

15. (**B**) 34

! Didžiojo trikampio perimetrą pažymėkime p.

Paveikslėlyje pavaizduotą figūrą natūralu suvokti kaip 9 atkarpų aibę. Tos atkarpos – trikampių, kurių perimetrai yra p, 13 ir 15, kraštinės. Kita vertus, kai kurias iš 9 atkarpų galima padalyti į trumpesnes ir taip gauti 15 atkarpų – visas trikampių, kurių perimetrai yra 9, 10, 11, 12 ir 20, kraštines. Vadinasi,



$$p+13+15 = 9+10+11+12+20, \qquad p+28 = 62, \qquad p = 34.$$

16. (**A**) 2025

! Pažymėkime $a = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$.

Sumos $S = p(10) + p(11) + \ldots + p(100)$ dėmenys $p(N)$, kur skaičius N turi skaitmenį 0, lygūs 0, todėl juos galime išbraukti. Likusius dėmenis iš eilės sugrupuokime po devynis: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_9$, kur

$$S_1 = p(11) + p(12) + \ldots + p(19) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot 9 = 1 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = a,$$

$$S_2 = p(21) + p(22) + \ldots + p(29) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 2a,$$

ir t. t. Analogiškai gauname $S_3 = 3a$, $S_4 = 4a$, …, $S_9 = 9a$ ir

$$S = a + 2a + \ldots + 9a = a \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = a \cdot a = 45^2 = (40 + 5)^2 =$$

$$= 1600 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 25 = 2025.$$

!! Sumoje $S = p(10) + p(11) + \ldots + p(100)$ galima išbraukti visus nulinius dėmenis, o kiekvieną iš likusių dėmenų užrašyti kaip atitinkamą dviejų vienaženklių natūraliųjų skaičių sandaugą. Taip po vieną kartą gausime visas įmanomas tokias sandaugas (sandaugas $2 \cdot 3$ ir $3 \cdot 2$ laikome skirtingomis).

Pastebėkime, kad tiksliai tas pačias sandaugas gausime, atskliausdami reiškinį

$$(1 + 2 + \ldots + 9) \cdot (1 + 2 + \ldots + 9)$$

ir daugindami kiekvieną pirmųjų skliaustų skliaučiamą narį iš kiekvieno antrųjų skliaustų skliaučiamo nario. Vadinasi,

$$S = (1 + 2 + \ldots + 9) \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025.$$

17. **B** 10

! Ieškomą skaičių pažymėkime x. Skaičių, esančių lentelės vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, sumą pažymėkime s. Nežinome nei s, nei 14 iš 25 lentelės skaičių. Tačiau nebūtina nei visų šių skaičių ieškoti, nei į visas 5 eilutes bei 5 stulpelius atsižvelgti. Nagrinėkime tik 2-ąją ir 4-ąją eilutes bei 2-ąjį ir 4-ąjį stulpelius – juose yra visi žinomi lentelės skaičiai bei skaičius x.

	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		x	

Keturių skaičių, esančių nuspalvintuose langeliuose, sumą pažymėkime t (žr. pav.). Dešimties skaičių, esančių 2-ojoje ir 4-ojoje eilutėse, suma lygi

$$2s = 20 + 21 + 2 + 24 + 5 + 6 + t = 78 + t.$$

Dešimties skaičių, esančių 2-ajame ir 4-ajame stulpeliuose, suma lygi

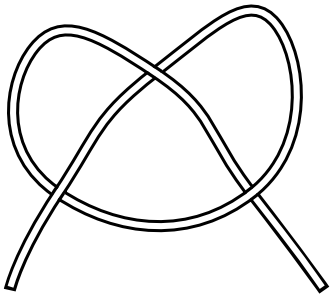
$$2s = 16 + 25 + 4 + 22 + 1 + x + t = 68 + x + t.$$

Vadinasi, $78 + t = 68 + x + t$ ir $x = 10$.

18. Ⓑ $\frac{1}{4}$

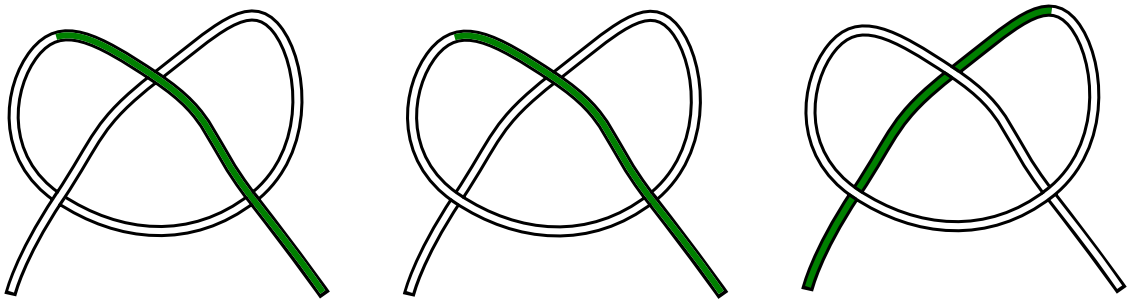
! Po kiekviena moneta slepiasi vienas iš dviejų vaizdų, todėl turime $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ vienodai galimas baigtis. Dėl paveikslėlio simetriškumo pakanka išnagrinėti tik keturias baigtis, kai po viršutine moneta virvelė atrodo taip: . Likusios keturios baigtys yra šių baigčių veidrodiniai atspindžiai.

Visų naudojamas paprasčiausias mazgas gaunamas, susukus virvelę taip:



Taigi viena iš keturių baigčių yra palanki įvykiui, kad įtempta virvelė užsiriš mazgu. Likusios trys baigtys nėra palankios šiam įvykiui. Tuo galima įsitikinti intuityviai, pasitelkus vaizduotę, bet pamėginkime įvardinti, kas šiais atvejais nutiks traukiant virvelės galus.

Žinoma, mazgu niekaip neužsiriš tokia kilpa: . Trimis nagrinėjamais atvejais tokia kilpa arba yra uždengta virvelės žaliosios dalies, arba pati ją dengia:



Todėl įtempiant virvelę ši kilpa laisvai atsiskirs nuo žaliosios dalies ir nė pati neužsiriš.

Vadinasi, tarp keturių baigčių yra lygiai viena palanki, o tarp visų aštuonių baigčių – lygiai dvi palankios. Ieškoma tikimybė lygi $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

19. (A) 997

? Dėl patogumo lyginius ir nelyginius sekos skaičius pakeisime atitinkamai nuliais ir vienetais. Nei pačių skaičių, nei Roko gautų sumų lyginumas nuo to nepasikeičia. Kad trijų iš eilės einančių skaičių suma būtų nelyginė, tarp tų skaičių turi būti vienas arba trys vienetai: 001, 010, 001, 111.

Taigi turime seką, kurią sudaro 500 nulių ir 500 vienetų. Joje norime turėti kuo daugiau triženklių fragmentų 001, 010, 001, 111. Vien tokius fragmentus turėsime sekose 001001001... ir 111111111... Vienoje sekoje vyrauja nuliai, o kitoje vienetai. Kadangi nulių ir vienetų Roko sekoje yra po lygiai, tai bandykime sujungti dvi tokias sekas į vieną:

$$111111\ldots111\ 001\,001\,001\ldots001\,001.$$

Kad nulių būtų 500, turime imti 250 fragmentų 001. Taip gauname 250 vienetų. Trūkstamus 250 vienetų prirašome sekos pradžioje.

Gautoje sekoje iš kairės į dešinę tikrinkime visus triženklius fragmentus. Kai fragmentas prasideda 1-uoju, 2-uoju, ..., 248-uoju sekos skaičiumi, tai jis lygus 111. Toliau iš eilės eina 110 ir 100, ir atsiduriame sekos dalyje $001\,001\ldots001$, kur ima kartotis fragmentai 001, 010, 100.

Paskutinis fragmentas prasideda 998-uoju sekos skaičiumi. Vadinasi, iš viso turime 998 fragmentus ir tiek pat Roko apskaičiuotų sumų. Gavome vienintelį fragmentą, kuris atitinka lyginę sumą – tai 249-asis fragmentas 110. Taigi Rokas galėjo gauti $998 - 1 = 997$ nelygines sumas. Tai didžiausias atsakymuose pateiktas skaičius.

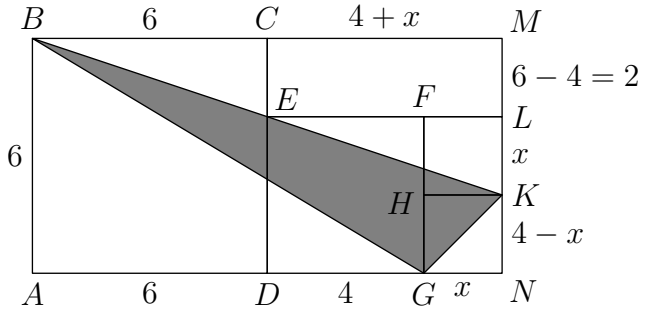
Renkamės atsakymą **A**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, turime įrodyti, kad Rokas negalėjo gauti daugiau nei 997 nelygines sumas, t. y. kad visos 998 jo sumos negali būti nelyginės.

Tarkime, kad Rokas gavo 998 nelygines sumas. Tada egzistuoja 500 nulių ir 500 vienetų seka, kurios kiekvienas triženklis fragmentas yra 001, 010, 100 arba 111 (žr. **?** dalį). Jei šioje sekoje yra bent vienas fragmentas 111, tai pirmasis dešinėje nuo jo esantis nulis yra fragmento 110 dalis arba, jei dešinėje nulių nėra, tai analogiškai kairėje rasime fragmentą 011. Taigi visi fragmentai sekoje yra 001, 010, 100. Tačiau tada joje nulių yra daugiau nei vienetų. Gavome prieštarą. Vadinasi, Rokas galėjo gauti daugiausiai 997 nelygines sumas.

20. Ⓒ 16

! Kvadratų $ABCD$ ir $DEFG$ kraštinių ilgiai atitinkamai lygūs $\sqrt{36} = 6$ ir $\sqrt{16} = 4$. Kvadrato $FHKL$ kraštinės ilgį pažymėkime x. Tris kvadratus įbrėžkime į stačiakampį $ABMN$. Paveikslėlyje pažymėti kai kurių atkarpų ilgiai. Jei rasime x, tai trikampio BGK plotą S galėsime apskaičiuoti, iš stačiakampio $ABMN$ ploto T atėmę stačiųjų trikampių ABG, BKM ir GKN plotus – atitinkamai S_1, S_2 ir S_3.



Taškas E priklauso atkarpai BK. Kadangi $BC||EL$, tai $\angle CBE = \angle LEK$ (atitinkamieji kampai), o statieji trikampiai BCE ir ELK panašūs. Todėl

$$KL : EL = EC : BC, \qquad x : (4 + x) = 2 : 6, \qquad 6x = 8 + 2x, \qquad x = 2.$$

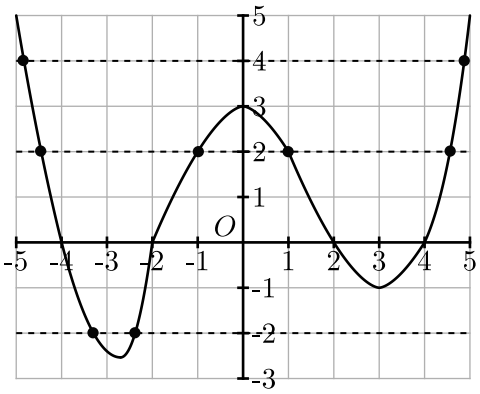
Dabar raskime visus reikiamus plotus:

$$T = (10 + x) \cdot 6 = 72, \qquad S_1 = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30, \qquad S_2 = \frac{(x + 10) \cdot (x + 2)}{2} = 24,$$

$$S_3 = \frac{x \cdot (4 - x)}{2} = 2, \qquad S = T - S_1 - S_2 - S_3 = 16.$$

21. Ⓔ 8

! Jei $f(f(x_0)) = 0$, tai $x = f(x_0)$ yra lygties $f(x) = 0$ sprendinys. Todėl pirmiausiai išspręskime lygtį $f(x) = 0$.



Funkcijos f grafikas kerta Ox ašį keturiuose taškuose $(-4; 0)$, $(-2; 0)$, $(2; 0)$ ir $(4; 0)$. Atitinkamai lygtis $f(x) = 0$ turi keturis sprendinius $x = -4$, -2, 2 ir 4. Skaičius $x = x_0$ tenkina lygtį $f(f(x)) = 0$, kai tenkina bet kurią vieną iš lygčių $f(x) = -4$, $f(x) = -2$, $f(x) = 2$, $f(x) = 4$. Taigi reikia nustatyti, po kiek sprendinių turi šios keturios lygtys.

Lygybė $f(x_0) = 2$ teisinga, kai taškas $(x_0; 2)$ priklauso funkcijos f grafikui. Todėl lygtis $f(x) = 2$ turi tiek sprendinių, kiek kartų horizontali tiesė $y = 2$ kerta grafiką. Paveikslėlyje matome, kad tokių sankirtų yra keturios. Lygties $f(x) = 2$ sprendiniai yra sankirtos taškų abscisės, tad juos galime bent apytiksliai nustatyti ($x \approx \pm 4{,}5$, ± 1). Tačiau tai nebūtina – mums reikia tik sprendinių skaičiaus.

Analogiškai gauname, kad lygtys $f(x) = -2$ ir $f(x) = 4$ turi po du sprendinius (žr. pav.). Lygtis $f(x) = -4$ sprendinių neturi, nes funkcijos f grafikas visas yra virš tiesės $y = -4$, tad jos nekerta.

Iš viso gavome $4 + 2 + 2 + 0 = 8$ lygties $f(f(x))$ sprendinius.

22. (C) 9

? Visų septynių lentoje užrašytų skaičių suma lygi 63. Žaidėjai nutrynė po tris iš 7 skaičių. Atitinkamas dvi nutrintų skaičių sumas pažymėkime s ir $2s$. Tada lentoje liko skaičius $63 - s - 2s = 63 - 3s$. Jis dalijasi iš 3, todėl tegali būti lygus 9 ar 15. Skaičiaus 15 tarp atsakymų nėra, todėl teisingas atsakymas turi būti 9.

Renkamės atsakymą **C**.

?? Žaidėjai nutrynė po tris iš 7 skaičių. Mėginkime sukonstruoti tinkamą pavyzdį. Jei, pavyzdžiui, lentoje liko skaičius 9, tai nutrintų skaičių suma lygi $1 + 2 + 7 + 10 + 15 + 19 = 54 = 3 \cdot 18 = 18 + 2 \cdot 18$. Lengva pastebėti, kad $18 = 1 + 7 + 10$, ir padaryti išvadą, jog įmanoma tokia situacija: vienas žaidėjas nutrynė skaičius 1, 7, 10, kurių suma yra 18, kitas žaidėjas – skaičius 2, 15, 19, kurių suma yra $36 = 2 \cdot 18$, o lentoje liko skaičius 9.

Renkamės atsakymą **C**.

! Uždavinį pilnai išspręsime, apjungę **?** ir **??** dalis bei įrodę, kad lentoje negalėjo likti skaičius 15.

Taigi tarkime, kad lentoje liko skaičius 15. Tada $15 = 63 - 3s$ (žr. **?** dalį) ir $s = 16$. Vadinasi, vienas žaidėjas nutrynė tokius tris iš 6 skaičių 1, 2, 7, 9, 10, 19, kurių suma yra 16. Tarp tų trijų skaičių negali būti skaičiaus $19 > 16$ ir gali būti daugiausiai vienas iš skaičių 7, 9, 10 ($7+9 = 16$). Todėl tarp tų skaičių turi būti ir 1, ir 2, o trečiasis skaičius yra $16-1-2 = 13$. Tačiau skaičiaus 13 nėra tarp duotųjų. Vadinasi, lentoje skaičius 15 likti negalėjo.

23. (E) Kitas atsakymas

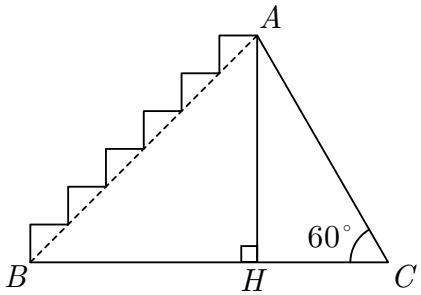
! Bet kokiam natūraliajam skaičiui n turime

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n) \cdot f(1)}{f(n)} = f(1) = 2.$$

Todėl visi 2020 sumos $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$ dėmenų lygūs 2, o pati suma lygi $2 \cdot 2020 = 4040$.

Beje, remiantis lygybėmis $f(1) = 2$ ir $f(n+1) = 2f(n)$ (kiekvienam natūraliajam n), iš eilės galima apskaičiuoti kiekvieną reikšmę $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... Iš šių dviejų lygybių išplaukia ir bendroji formulė $f(n) = 2^n$ (kiekvienam natūraliajam n).

24. (E) $\sqrt{3}$



! Aukštinė AH dalija trikampį ABC į du stačiuosius trikampius (žr. pav.). Kai skruzdėlė leidosi laiptais, ji pakaitomis judėjo horizontaliai ir vertikaliai. Horizontaliai ji nuėjo atstumą HB, o vertikaliai – atstumą AH. Vadinasi, turime rasti santykį $(AH + HB) : AC$. Pažymėkime $AH = a$.

Raskime stačiųjų trikampių ABH ir ACH kampus:

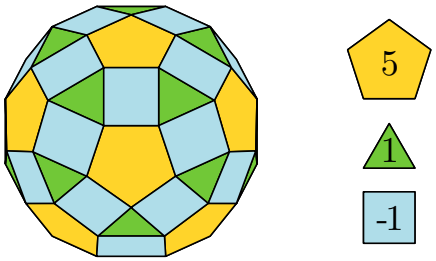
$$\angle ACH = 60^\circ, \qquad \angle CAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \qquad \angle BAH = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$

Statusis trikampis ABH su 45° kampu yra lygiašonis, $BH = AH = a$. Atkarpos AC ilgį taip pat galima išreikšti per a:

$$\frac{AH}{AC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad AC = \frac{2AH}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{AH + HB}{AC} = (a + a) : \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3}.$$

25. (B) 50



! Nustatykime, kiek briaunainis turi kvadratinių ir trikampių sienų.

Kiekvieną iš 12 penkiakampių riboja 5 kvadratai. Gauname $12 \cdot 5 = 60$ kvadratų. Tačiau kvadratai įskaityti po kelis kartus. Paveikslėlyje matome, kad kiekvienas kvadratas turi bendrą kraštinę su lygiai dviem penkiakampiais. Vadinasi, kiekvieną kvadratą įskaitėme du kartus, ir iš tikrųjų kvadratų yra $12 \cdot 5 : 2 = 30$.

Panašiai samprotaukime ir apie trikampius. Kiekvienas iš 30 kvadratų yra tarp 2 trikampių, o kiekvienas trikampis – tarp 3 kvadratų. Gauname $30 \cdot 2 : 3 = 20$ trikampių. Tą patį rezultatą galima gauti, siejant trikampius ne su kvadratais, bet su penkiakampiais. Kiekvienas iš 12 penkiakampių turi bendrą viršūnę su 5 trikampiais, o kiekvienas trikampis – su 3 penkiakampiais. Ir vėl gauname $12 \cdot 5 : 3 = 20$ trikampių.

Dabar jau galime apskaičiuoti visų briaunainio skaičių sumą:

$$5 \cdot 12 + (-1) \cdot 30 + 1 \cdot 20 = 60 - 30 + 20 = 50.$$

26. (C) 625

! Pažymėkime

$$m = \sqrt{a}, \qquad n = \sqrt{b}, \qquad p = a - b = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n).$$

Čia m ir n yra neneigiami sveikieji skaičiai, $p > 0$. Todėl $a > b$, $m > n$ ir $m + n \geqslant m - n > 0$. Vadinasi, skaičius p yra natūraliųjų skaičių $m - n$ ir $m + n$ sandauga. Jis pirminis, todėl $m - n = 1$ ir $m + n = p$.

Apibendrinkime: $m = \sqrt{a}$ ir $n = \sqrt{b}$ yra du gretimi natūralieji skaičiai, kurių suma yra pirminis skaičius. Tikrinkime atsakymus. Reikia nustatyti, kuri iš šių reikšmių negali būti lygi nei m, nei n: **A)** 12; **B)** 20; **C)** 25; **D)** 27; **E)** 50. Turime ištirti, ar šie penki natūralieji skaičiai turi sau gretimus, kuriuos pridėjus gaunamas pirminis skaičius:

A) $12 + 11 = 23$ (pirminis), $12 + 13 = 25$;

B) $20 + 19 = 39$, $20 + 21 = 41$ (pirminis);

C) $25 + 24 = 49$, $25 + 26 = 51$;

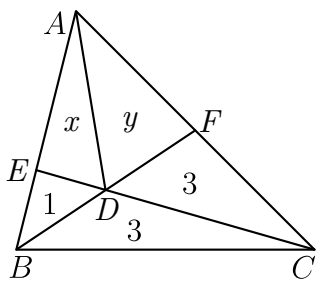
D) $27 + 26 = 53$ (pirminis), $27 + 28 = 55$;

E) $50 + 49 = 99$, $50 + 51 = 101$ (pirminis).

Norint pasirinkti teisingą atsakymą, pakanka patikrinti atsakymą **C** ir pastebėti, kad skaičiai 49 ir 51 sudėtiniai. Taip pat pakanka patikrinti likusius keturis atsakymus ir gauti, kad yra galimos tokios a ir b reikšmės: **A)** $a = 12^2 = 144$, $b = 11^2$; **B)** $a = 21^2$, $b = 20^2 = 400$; **D)** $a = 27^2 = 729$, $b = 26^2$; **E)** $a = 51^2$, $b = 50^2 = 2500$.

27. (A) 12

! Pažymėkime taškus ir trikampio ABC dalių plotus, kaip parodyta paveikslėlyje. Sprendžiant šį uždavinį, verta prisiminti tokį bendrą teiginį: jei du trikampiai turi bendrą aukštinę, tai jų plotų santykis lygus atitinkamų kraštinių, į kurias ta aukštinė nuleista, santykiui: $\frac{ha}{2} : \frac{hb}{2} = a : b$.



Iš eilės pritaikykime teiginį šioms keturioms trikampių poroms: BCD ir CDF, ABD ir ADF, BCD ir BDE, ACD ir ADE:

$$3 : 3 = BD : DF, \qquad (x+1) : y = BD : DF,$$
$$3 : 1 = CD : DE, \qquad (y+3) : x = CD : DE.$$

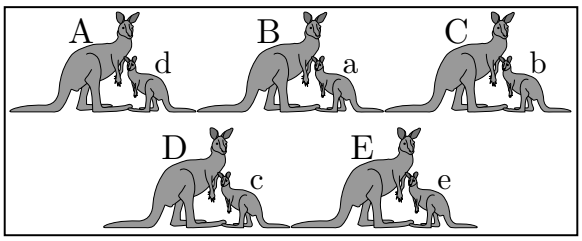
Vadinasi,

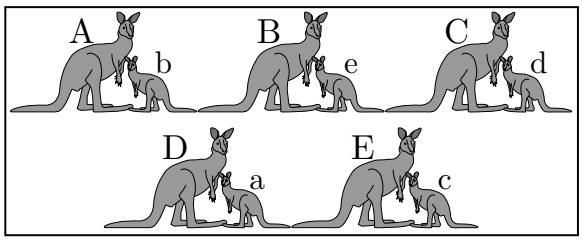
$$(x+1) : y = 3 : 3 = 1, \qquad y = x + 1,$$
$$(y+3) : x = 3 : 1 = 3, \qquad 3x = y + 3 = (x+1) + 3 = x + 4,$$
$$2x = 4, \qquad x = 2, \qquad y = x + 1 = 3.$$

Taigi trikampio ABC plotas lygus $1 + 3 + 3 + x + y = 12$.

28. (D) D

? Pastebėkime, kad kengūriukai b ir d abiejuose paveikslėliuose yra šalia kengūrų A ir C. Atitinkamai likę kengūriukai a, c, e abiejuose paveikslėliuose yra šalia kengūrų B, D ir E. Kita vertus, joks kengūriukas nėra šalia tos pačios kengūros abiejuose paveikslėliuose.





Šie pastebėjimai leidžia atspėti, kad uždavinio sąlygą tenkina tokia situacija: kairiajame paveikslėlyje du kengūriukai b ir d yra šalia savo mamų, o dešiniajame – trys kengūriukai a, c ir e yra šalia savo mamų. Taigi kengūriukų a, b, c, d, e mamos gali būti atitinkamai D, C, E, A, B.

Renkamės atsakymą **D**.

! Teiginį „Kengūriuko x mama yra Y“ dėl trumpumo žymėsime (xY).

Joks kengūriukas nėra šalia tos pačios kengūros abiejuose paveikslėliuose. Todėl du kengūriukai, esantys šalia mamų kairiajame paveikslėlyje, ir trys kengūriukai, esantys šalia mamų dešiniajame, – tai visi penki skirtingi kengūriukai. Taigi, kiekvienas kengūriukas yra šalia savo mamos viename iš paveikslėlių, ir, pavyzdžiui, arba (aB), arba (aD).

Tarkime, kad (aB). Tada ne (eB), todėl (eE). Tada ne (cE), todėl (cD). Gavome, kad kairiajame paveikslėlyje net trys kengūriukai a, c, e yra šalia savo mamų. Tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, (aD): kengūriuko a mama yra D.

Beje, likusių kengūriukų mamas taip pat galima nustatyti vienareikšmiškai: ne (cD), todėl (cE); ne (eE), todėl (eB); dešiniajame paveikslėlyje šalia mamų yra a, c, e, todėl ne (bA) ir ne (dC); todėl (bC) ir (dA).

29. **B** $4\frac{1}{2}$

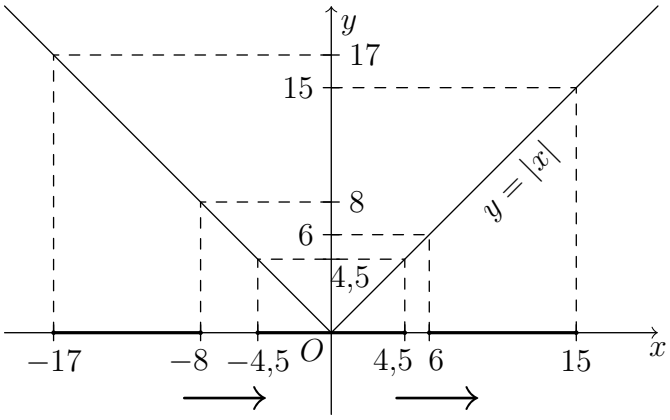
? Išskirkime pilnąjį kvadratą:

$$|4x^2 - 4x + k| = |4x^2 - 4x + 1 + (k-1)| = |(2x-1)^2 + (k-1)| = |y + (k-1)|,$$

kur $y = (2x-1)^2$. Kadangi x gali būti bet koks skaičius iš intervalo $[-1; 1]$, tai y gali būti bet koks skaičius iš intervalo $[0; 9]$: tokia yra $(2x-1)^2$ reikšmių aibė, kai $x \in [-1; 1]$. Taigi toliau galime pamiršti apie kintamąjį x: skaičius $M(k)$ yra reiškinio $|y + (k-1)|$ didžiausia reikšmė, kai $y \in [0; 9]$.

Atlikime dar vieną keitinį $z = y + (k-1)$. Tada $M(k)$ yra reiškinio $|z|$ didžiausia reikšmė, kai $z \in [0 + (k-1); 9 + (k-1)] = [k-1; k+8]$. Kadangi k yra bet koks realusis skaičius, tai $[k-1; k+8]$ yra bet koks uždaras intervalas, kurio ilgis yra 9. Dabar galime taip performuluoti uždavinį: reikia nustatyti, koks gali būti mažiausias modulio funkcijos $y = |x|$ maksimumas uždarame intervale, kurio ilgis yra 9.

Įsivaizduokime modulio funkcijos grafiką ir Ox ašimi slankiojantį reikiamo ilgio intervalą (žr. pav.). Dabar galima nuspėti, kad mažiausią maksimumą gausime, kai intervalo vidurio taškas sutampa su koordinačių pradžia O. Funkcijos $y = |x|$ maksimumas, kai $x \in [-4{,}5; 4{,}5]$, lygus 4,5.



Renkamės atsakymą **B**.

! Nagrinėkime bet kokį realųjį skaičių k. Kvadratinė funkcija $f(x) = 4x^2 - 4x + k = (2x-1)^2 + k - 1$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $2x - 1 = 0$. Ši reikšmė lygi $f\left(\frac{1}{2}\right) = k - 1$. Kai x mažėja nuo $\frac{1}{2}$ iki -1, funkcija f didėja nuo $k-1$ iki $f(-1) = k+8$, o kai x didėja nuo $\frac{1}{2}$ iki 1, funkcija f tepadidėja nuo $k-1$ iki $f(1) = k$. Taigi $f(x)$ reikšmių aibė, kai $x \in [-1; 1]$, yra $[k-1; k+8]$.

Skaičius $M(k)$ yra didžiausia $|f(x)|$ reikšmė, kai $x \in [-1; 1]$. Taigi $M(k)$ yra didžiausia $|y|$ reikšmė, kai $y \in [k-1; k+8]$. Nagrinėkime tris atvejus: 1) $k - 1 > 0$; 2) $k + 8 < 0$; 3) $-8 \leqslant k \leqslant 1$.

Kai y didėja nuo $k - 1$ iki $k + 8$, tai skaičiaus $|y|$ reikšmės atitinkamai:

1) didėja nuo $|k - 1|$ iki $|k + 8|$, ir $M(k) = |k + 8| = k + 8 > 1 + 9 = 9$;

2) mažėja nuo $|k - 1|$ iki $|k + 8|$, ir $M(k) = |k - 1| = 1 - k > 1 - (-8) = 9$;

3) mažėja nuo $|k - 1|$ iki 0, o tada didėja nuo 0 iki $|k + 8|$, ir $M(k)$ yra didžiausias iš skaičių $1 - k$ bei $k + 8$.

Įdėmiau panagrinėkime trečiąjį atvejį. Kai k didėja nuo -8 iki $-3{,}5$ (iki intervalo $[-8; 1]$ vidurio), tai $1 - k$ mažėja nuo 9 iki 4,5. Kai k toliau didėja nuo $-3{,}5$ iki 1, tai $k + 8$ didėja nuo 4,5 iki 9. Taigi visoms k reikšmėms turime $M(k) \geqslant 4{,}5$.

Kai $k = -3{,}5$, tai $1 - k = k + 8 = 4{,}5$. Taigi $M(k) \geqslant 4{,}5$ ir $M(-3{,}5) = 4{,}5$. Vadinasi, mažiausia $M(k)$ reikšmė yra 4,5.

Beje, remiantis atlikta trijų atvejų analize, gaunama tokia bendra $M(k)$ formulė:

$$M(k) = \max_{k \in \mathbb{R}} \{|k - 1|, |k + 8|\}.$$

!! Pažymėkime $f_k(x) = |4x^2 - 4x + k|$. Pateiksime trumpą uždavinio sprendimą.

Bet kokiam realiajam k turime

$$2M(k) = M(k) + M(k) \geqslant f_k(-1) + f_k(0{,}5) = |k + 8| + |k - 1| =$$

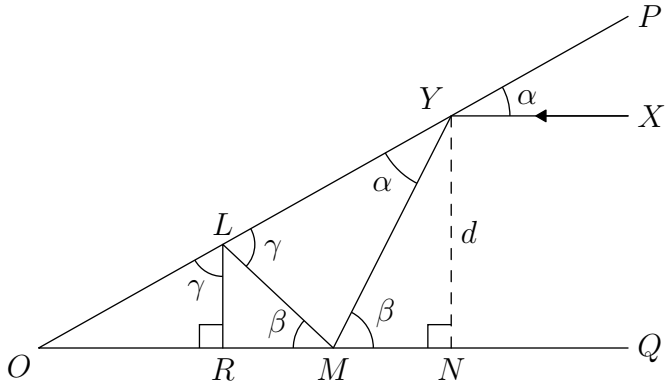
$$= |k + 8| + |1 - k| \geqslant |(k + 8) + (1 - k)| = 9, \qquad M(k) \geqslant 4{,}5.$$

Kita vertus, kvadratinės funkcijos $g(x) = 4x^2 - 4x - 3{,}5$ reikšmių aibė, kai $x \in [-1; 1]$, yra $[-4{,}5; 4{,}5]$ (funkcija mažėja nuo $g(-1) = 4{,}5$ iki $g(0{,}5) = -4{,}5$, o tada didėja iki $g(1) = -3{,}5$). Todėl $f_{-3{,}5}(x) = |g(x)|$ didžiausia reikšmė, kai $x \in [-1; 1]$, lygi $M(-3{,}5) = 4{,}5$.

Kadangi $M(k) \geqslant 4{,}5$ visiems k, tai $M(-3{,}5) = 4{,}5$ yra mažiausia $M(k)$ reikšmė.

30. Ⓒ 5

! Veidrodžio atspindėtas spindulys sudaro su veidrodžiu tokį patį kampą, kokį sudarė krisdamas į veidrodį. Todėl pažymėkime kampus (ir taškus), kaip parodyta paveikslėlyje.



Pastebėkime dar vieną lygių kampų porą: $\angle LOR = \angle PYX = \alpha$, nes $RO||XY$ (atitinkamieji kampai). Todėl $\triangle LOR \sim \triangle LYM$ (pagal du kampus, lygius α ir γ). Taip pat $\triangle LMR \sim \triangle YMN$ (pagal du kampus, lygius β ir $90°$).

Remdamiesi pastebėtais trikampių panašumais, atitinkamai gauname:

$$\frac{RO}{RL} = \frac{MY}{ML}, \qquad \frac{RL}{ML} = \frac{NY}{MY}.$$

Vadinasi,

$$d = NY = \frac{RL}{ML} \cdot MY = \frac{MY}{ML} \cdot RL = RO = 5.$$

!! Pastebėti lygybes, kuriomis **!** dalyje susiejome NY ir RO, nėra labai lengva. Įrodžius trikampių panašumą $\triangle LOR \sim \triangle LYM$ (žr. **!** dalį), toliau galima spręsti kitaip:

$$\angle YML = \angle ORL = 90°, \qquad \beta = (180° - \angle YML) : 2 = 45°.$$

Vadinasi, trikampiai MNY ir MRL yra statieji lygiašoniai,

$$LM = \sqrt{2} \cdot LR, \qquad MY = \sqrt{2} \cdot NY = d\sqrt{2},$$

$$\frac{LR}{RO} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{LM}{MY} = \frac{\sqrt{2} \cdot LR}{d\sqrt{2}} = \frac{LR}{d}, \qquad d = RO = 5.$$

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	C
2	E
3	D
4	A
5	D
6	E
7	B
8	A
9	C
10	C
11	D
12	A
13	D
14	D
15	B
16	A
17	B
18	B
19	A
20	C
21	E
22	C
23	E
24	E
25	B
26	C
27	A
28	D
29	B
30	C