Lietuvos Respublikos švietimo, mokslo ir sporto ministerija
Kengūros konkurso organizavimo komitetas
Vilniaus universitetas
Lietuvos matematikų draugija

KANGUR 2021

S
PL

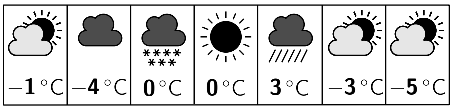
Student
Klasy 11–12

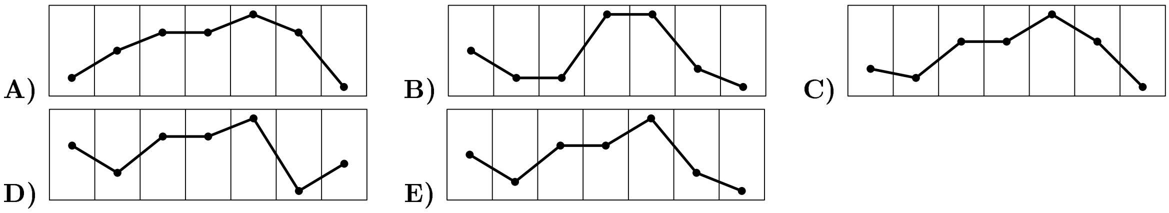
Czas trwania konkursu: 75 min
Używać kalkulatorów nie wolno!
Uczestnicy samodzielnie rozwiązują problemy

Pytania po 3 punkty

1. Trzeci czwartek marca każdego roku jest dniem „Kangura Matematycznego”. Jeden z poniższych dni nie jest takim dniem. Który?
A) 17 marca 2022 r. **B)** 16 marca 2023 r. **C)** 14 marca 2024 r. **D)** 20 marca 2025 r. **E)** 19 marca 2026 r.

2. Paulina zainstalowała aplikację pokazującą m.in. prognozowaną temperaturę maksymalną. Rysunek pokazuje prognozę na najbliższy tydzień. Który z poniższych wykresów prawidłowo pokazuje prognozowaną temperaturę?

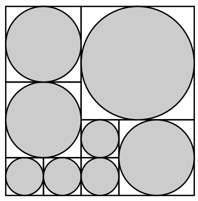




3. Sześcian o krawędzi 1 rozcięto na dwa identyczne prostopadłościany. Pole powierzchni każdego z tych prostopadłościanów jest równe
A) $\frac{3}{2}$ **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

4. Ile liczb całkowitych leży w przedziale $(20-\sqrt{21};\, 20+\sqrt{21})$?
A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

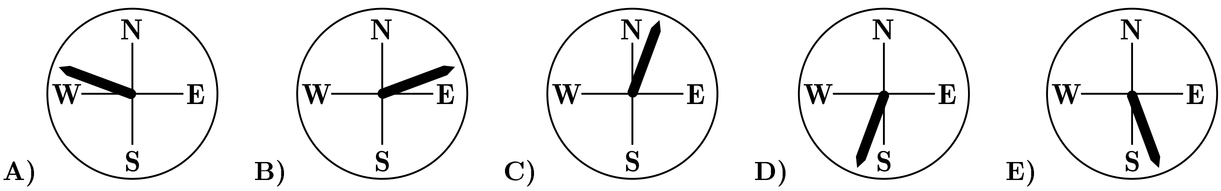
5. Duży kwadrat podzielono na mniejsze kwadraty jak na rysunku. Zacieniowane koła są wpisane w odpowiednie kwadraty. Jaką częścią pola dużego kwadratu jest pole zacieniowanego obszaru?
A) $\frac{6\pi}{25}$ **B)** $\frac{\pi}{5}$ **C)** $\frac{3\pi}{10}$ **D)** $\frac{\pi}{4}$ **E)** $\frac{5\pi}{16}$



6. Niech $x=\frac{\pi}{4}$. Która z poniższych liczb jest największa?
A) x^4 **B)** x^2 **C)** x **D)** $\sqrt{x}$ **E)** $\sqrt[4]{x}$

7. Prostokątna kartka papieru ma długość x i szerokość y, przy czym $x>y$. Przez zetknięcie dwóch przeciwległych brzegów tej kartki możemy uformować powierzchnię boczną walca na dwa różne sposoby. Jaki jest stosunek objętości wyższego z tych walców do objętości niższego?
A) $y^2:x^2$ **B)** $y:x$ **C)** 1:1 **D)** $x:y$ **E)** $x^2:y^2$

8. Po nocnej burzy maszt flagowy przed szkołą przechylił się. Gdy patrzymy na maszt od wschodu lub od północnego zachodu, to widać, że czubek masztu wychylił się względem podstawy w prawo. Który z rysunków pokazuje wychylenie masztu?



9. Czemu jest równe pole trójkąta o wierzchołkach $(p;q)$, $(3p;q)$ i $(2p;3q)$, gdzie $p,q>0$?
A) $\frac{pq}{2}$ **B)** pq **C)** $2pq$ **D)** $3pq$ **E)** $4pq$

10. Ile spośród liczb trzycyfrowych dodatnich utworzonych jedynie z cyfr 1, 3 i 5 (każdej cyfry można używać wielokrotnie) jest podzielnych przez 3?
A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 27

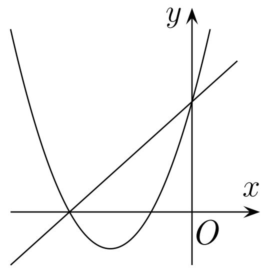
Pytania po 4 punkty

11. Jaką część wszystkich dodatnich dzielników liczby 7! stanowią liczby nieparzyste?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{6}$

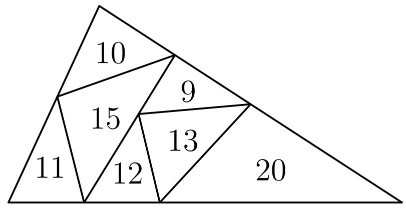
12. Niech $A = (0;\ 1) \cup (2;\ 3)$ i niech $B = (1;\ 2) \cup (3;\ 4)$. Zbiorem wszystkich liczb postaci $a + b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$, jest
A) $(1;\ 3) \cup (3;\ 5) \cup (5;\ 7)$ **B)** $(1;\ 5) \cup (5;\ 7)$ **C)** $(1;\ 3) \cup (3;\ 7)$ **D)** $(1;\ 7)$ **E)** inny zbiór

13. Ile liczb trzycyfrowych dodatnich ma tę własność, że odwracając kolejność cyfr, otrzymujemy liczbę większą o 99?
A) 8 **B)** 64 **C)** 72 **D)** 80 **E)** 81

14. Parabola na wykresie ma równanie $y = ax^2 + bx + c$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b i c, przy czym współczynniki a, b, c są parami różne. Które z poniższych równań może być równaniem prostej z wykresu?
A) $y = bx + c$ **B)** $y = cx + b$ **C)** $y = ax + b$ **D)** $y = ax + c$ **E)** $y = cx + a$



15. Duży trójkąt podzielono na mniejsze trójkąty jak na rysunku. Liczby w małych trójkątach oznaczają ich obwody. Jaki jest obwód dużego trójkąta?
A) 31 **B)** 34 **C)** 41 **D)** 62 **E)** Inna odpowiedź

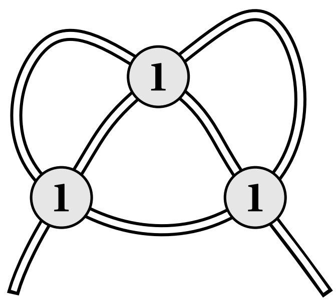


16. Dla całkowitej liczby dodatniej N symbolem $p(N)$ oznaczmy iloczyn cyfr liczby N. Na przykład $p(23) = 2 \cdot 3 = 6$. Suma $p(10) + p(11) + p(12) + \ldots + p(99) + p(100)$ jest równa
A) 2025 **B)** 4500 **C)** 5005 **D)** 5050 **E)** innej liczbie

17. Wszystkie pola diagramu na rysunku tak wypełniono liczbami, by sumy w wierszach i kolumnach były jednakowe, a następnie zakryto niektóre liczby. Jaka liczba znajduje się w polu oznaczonym znakiem zapytania?
A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 23

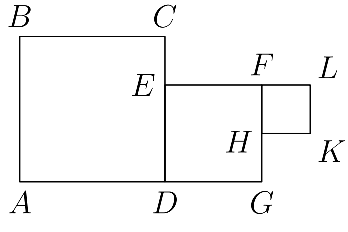
	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

18. Na stole leży kawałek sznurka przykryty częściowo trzema monetami jak pokazano na rysunku. Pod każdą z monet z jednakowym prawdopodobieństwem sznurek wygląda tak  lub tak . Jakie jest prawdopodobieństwo, że po pociągnięciu końcówek na sznurku powstanie węzeł?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{8}$



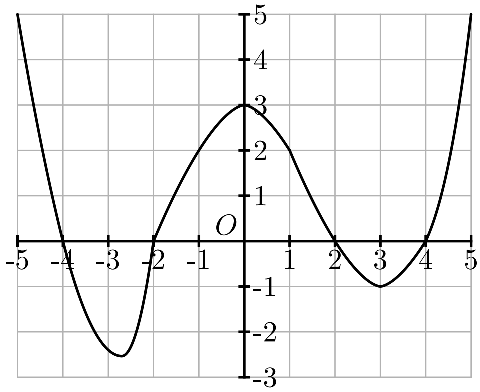
19. Liczby całkowite od 1 do 1000 wypisujemy w pewnej kolejności w rzędzie jedna za drugą i obliczamy wszystkie sumy trzech kolejnych z tych liczb. Co najwyżej ile spośród wszystkich tych sum jest liczbami nieparzystymi?
A) 997 **B)** 996 **C)** 995 **D)** 994 **E)** 993

20. Kwadraty $ABCD$, $DEFG$ i $FHKL$ przylegają do siebie bokami jak na rysunku. Punkty B, E i K są współliniowe. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe 36, a pole $DEFG$ jest równe 16. Jakie jest pole trójkąta BGK?
A) $14\frac{2}{3}$ **B)** $15\frac{1}{3}$ **C)** 16 **D)** $17\frac{2}{3}$ **E)** 18



Pytania po 5 punktów

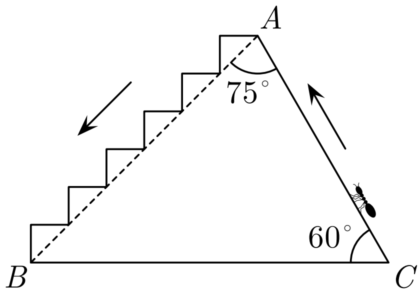
21. Na rysunku pokazano wykres funkcji $f : [-5; 5] \to \mathbb{R}$. Ile różnych rozwiązań ma równanie $f(f(x)) = 0$?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8



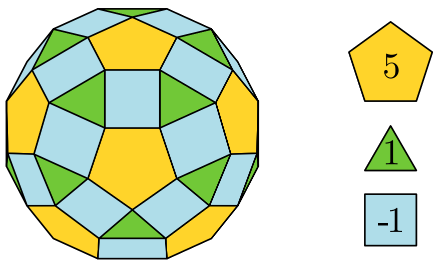
22. Na tablicy zapisano liczby 1, 2, 7, 9, 10, 15 i 19. Dwaj gracze usuwają na zmianę po jednej liczbie, aż na tablicy pozostanie tylko jedna liczba. Jaka liczba pozostanie na tablicy, jeśli suma liczb usuniętych przez jednego gracza będzie dwukrotnie większa od sumy liczb usuniętych przez drugiego gracza?
A) 2 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 19

23. Dla funkcji f określonej na liczbach naturalnych zachodzi $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ dla wszystkich x i y oraz $f(1) = 2$. Jaką liczbą jest suma $\dfrac{f(2)}{f(1)} + \dfrac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \dfrac{f(2021)}{f(2020)}$?
A) 0 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 2 **D)** 2020 **E)** Inną liczbą

24. Mrówka wspięła się ścieżką CA z punktu C na wierzchołek A i zeszła z niego po schodach do punktu B (patrz rysunek). Ile wynosi stosunek długości drogi, jaką przebyła mrówka z punktu A do punktu B, do długości drogi, którą przebyła z punktu C do punktu A?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

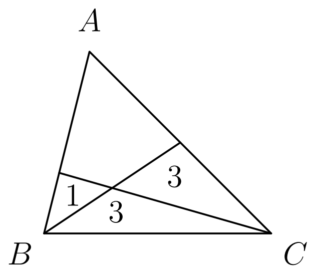


25. Na rysunku pokazano bryłę, której dwanaście ścian jest pięciokątami foremnymi, a każda z pozostałych ścian jest albo kwadratem, albo trójkątem równobocznym. Każda ściana pięciokątna jest otoczona przez pięć ścian kwadratowych, a każda ściana trójkątna jest otoczona przez trzy ściany kwadratowe. Janek zapisał liczbę 5 na każdej ścianie pięciokątnej, liczbę -1 na każdej ścianie kwadratowej i liczbę 1 na każdej ścianie trójkątnej. Ile wynosi suma liczb zapisanych na wszystkich ścianach?
A) 20 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 120

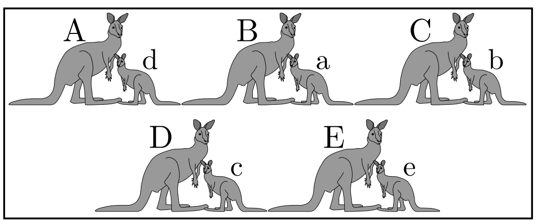


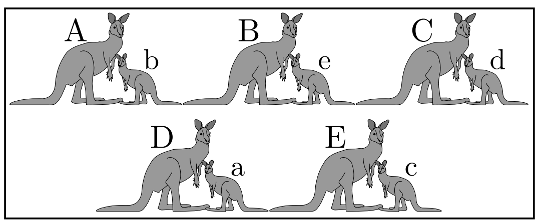
26. Liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych. Różnica $a - b$ jest liczbą pierwszą. Która z poniższych liczb nie może być ani liczbą a, ani liczbą b?
A) 144 **B)** 400 **C)** 625 **D)** 729 **E)** 2500

27. W trójkącie ABC połączono odcinkami wierzchołki B i C z przeciwległymi bokami, otrzymując małe trójkąty o polach 3, 3 i 1 (patrz rysunek). Czemu jest równe pole trójkąta ABC?
A) 12 **B)** 12,5 **C)** 13 **D)** 13,5 **E)** 14



28. Każda z pięciu kangurzyc oznaczonych literami A, B, C, D i E ma po jednym dziecku. Kangurzątka oznaczone są literami a, b, c, d oraz e. Na lewym rysunku dokładnie dwójka dzieci stoi przy swoich matkach, zaś na prawym – dokładnie trójka. Czyim dzieckiem jest a?





A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

29. Dla liczby rzeczywistej k niech $M(k)$ oznacza największą wartość wyrażenia $|4x^2 - 4x + k|$ dla $x \in [-1; 1]$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $M(k)$?
A) 4 **B)** $4\frac{1}{2}$ **C)** 5 **D)** $5\frac{1}{2}$ **E)** 8

30. Płaskie zwierciadła OP i OQ nachylone są względem siebie pod kątem ostrym. Równoległy do OQ promień świetlny XY odbija się od OP w punkcie Y, po czym odbija się od OQ, raz jeszcze odbija się od OP i uderza pod kątem prostym w OQ w punkcie R odległym od O o 5 cm. Jaka jest odległość d (cm) promienia XY od zwierciadła OQ?
A) 4 **B)** $4\frac{1}{2}$ **C)** 5 **D)** $5\frac{1}{2}$ **E)** 6