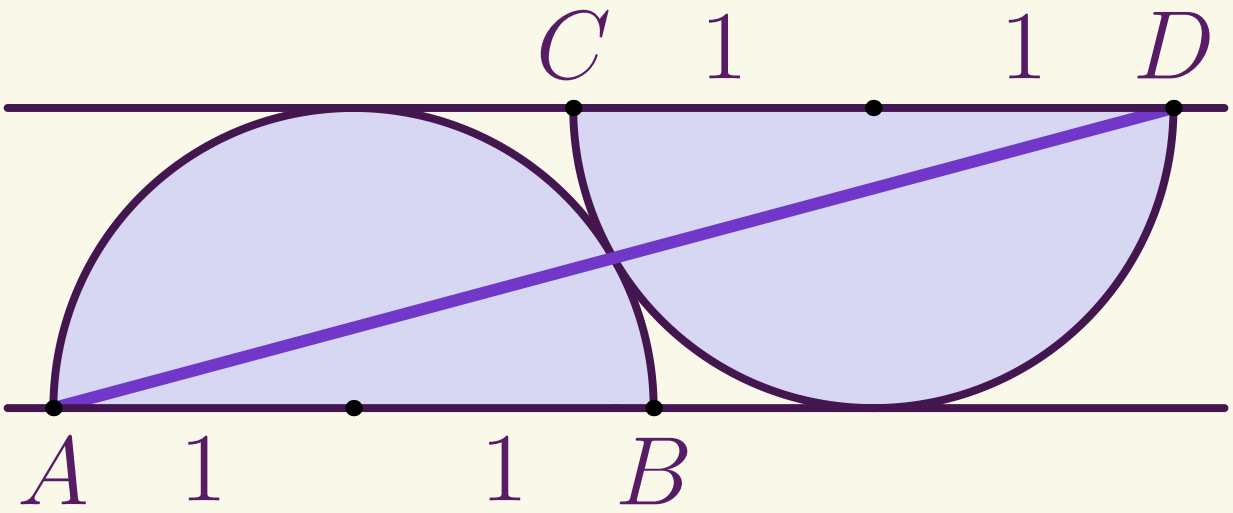
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Ekspertas

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2023

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2023. Ekspertas

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autoriai ir sudarytojai
Paulius Drungilas, Juozas Juvencijus Mačys, Aivaras Novikas, Marytė Skakauskienė

Redaktorius
Juozas Juvencijus Mačys

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Paulius Drungilas, Juozas Juvencijus Mačys, Aivaras Novikas, Marytė Skakauskienė, 2024
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2024

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **5**

Užduočių sprendimai **9**

Atsakymai **26**

Pratarmė

Matematikas mokytojas Peter O'Halloran iš Sidnėjaus aštuntajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje pradėjo organizuoti matematikos konkursą australų mokiniams, kuris sulaukė stulbinančio pasisekimo. Konkurso užduotys buvo testinės (reikėjo pasirinkti vieną iš keleto pateiktų atsakymų), o dalyvių atsakymai tikrinami kompiuteriais.

1991 m. prancūzų pedagogų Deledicq šeima, įkvėpti australų sėkmės, suorganizavo panašų matematikos konkursą *Kengūra*, kuriame pirmaisiais metais dalyvavo per 120 tūkstančių mokinių iš Prancūzijos. 1994 m. šis konkursas prasiplėtė į dar 7 šalis: Baltarusiją, Ispaniją, Lenkiją, Olandiją, Rumuniją, Rusiją ir Vengriją. 1994 m. įsteigta asociacija „Kengūra be sienų“ vienija konkurso *Kengūra* šalis-nares. Kasmet vykstančiame asociacijai priklausančių šalių atstovų suvažiavime parenkamos konkurso užduotys ir sprendžiami organizaciniai klausimai.

Nuo 2011 m. konkurse visame pasaulyje kasmet dalyvauja per 6 milijonai mokinių, o asociacija „Kengūra be sienų“ vienija per 60 šalių. Daugiau informacijos apie matematikos konkursą *Kengūra* galima rasti čia:

`http://aksf.org/`

Lietuvoje konkursas *Kengūra* pradėtas rengti nuo 1995 m. Konkursas organizuojamas 6 amžiaus grupėms: *Nykštukas* (1–2 kl.), *Mažylis* (3–4 kl.), *Bičiulis* (5–6 kl.), *Kadetas* (7–8 kl.), *Junioras* (9–10 kl.) ir *Senjoras* (11–12 kl.).

Konkursas kasmet vyksta trečiąjį kovo ketvirtadienį. Kiekvienas konkurso dalyvis gauna užduočių lapą ir dalyvio kortelę, kurioje pažymi atsakymus. Visų dalyvių kortelės nuskenuojamos ir apdorojamos kompiuteriu. Kasmet (nuo 2000 m.) paruošiamos uždavinių sprendimo knygelės, kurias galima rasti čia:

`http://kengura.lt/`

2015 m. atsirado nauja *Kengūros* dalyvių grupė nebemokiniams – *Ekspertas*. Šiai grupei konkursas buvo organizuotas „online“ režimu.

Konkurso metu sprendžiama 30 uždavinių, kurių sprendimas vertinamas taip: jei uždavinio atsakymas yra teisingas, skiriami visi prie jo sąlygos nurodyti taškai (3, 4 arba 5); jei atsakymas neteisingas – atimamas ketvirtadalis uždaviniui numatytų taškų; už nepažymėtą atsakymą taškai neskiriami (0 taškų). Be to, kiekvienas dalyvis konkurso pradžioje turi 30 taškų (taigi net visų uždavinių atsakymus pažymėjus neteisingai, iš viso surenkama 0 taškų).

Šioje knygelėje ženklu **!** pažymėti griežti matematiniai sprendimai. Tačiau norint pasirinkti teisingą atsakymo variantą ne visada reikia griežto matematinio sprendimo. Kartais pakanka paaiškinti, kodėl kiti nurodyti atsakymo variantai netinka. Tokie sprendimai pažymėti ženklu **?**. Kai vienų ar kitų sprendimų pateikiama daugiau, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse pakanka net ir klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad skaitytojas nepatingės išsiaiškinti viską iki galo.

Daugiau informacijos apie *Eksperto* grupę galima rasti čia:

`http://www.ekspertas.kengura.lt/`

Viliamės, kad *Eksperto* grupė gausės – juk loginis mąstymas svarbus ne vien mokiniams, jis svarbus žmogui visą gyvenimą. Nestandartinių uždavinių sprendimas leidžia pasitikrinti ir pagilinti matematinius įgūdžius, ugdyti matematinę kultūrą.

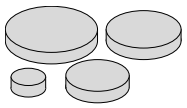
Organizatoriai

2023 m. *Eksperto* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

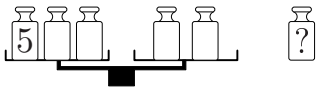
1. Vienoje gatvėje stovi 7 namai, turintys iš viso 25 gyventojus. Kiekviename name gyvena šeima iš 3 arba 4 asmenų. Keli namai turi 4 gyventojus?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

2. Emilija turi 4 skirtingų dydžių skritulius. Ji nori iš 3 skritulių sustatyti tokį bokštą, kad kiekvienas skritulys būtų mažesnis už skritulį po juo. Kiek skirtingų bokštų gali sustatyti Emilija?



A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

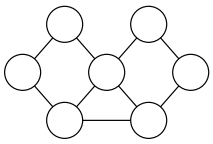
3. Jorė turi šešis svarsčius: 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg ir 6 kg. Ji ant svarstyklių padėjo penkis svarsčius (žr. paveikslėlį), ir svarstyklės liko pusiausviros. Kurio svarsčio Jorė nedėjo ant svarstyklių?



A) 1 kg **B)** 2 kg **C)** 3 kg **D)** 4 kg **E)** Nustatyti neįmanoma

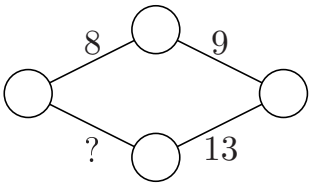
4. Penki vaikai spėliojo, kiek kengūrų gyvena žvėryne. Jų spėjimai tokie: 2, 4, 5, 8 ir 9. Paaiškėjo, kad Matas pasakė 4 kengūromis per daug, o Tomas pasakė 2 kengūromis per mažai. Kiek kengūrų gyvena žvėryne?
A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

5. Kristina nori visus paveikslėlio skrituliukus nuspalvinti taip, kad kiekvienų dviejų atkarpa sujungtų skrituliukų spalva skirtųsi. Kiek mažiausiai skirtingų spalvų pieštukų Kristinai prireiks?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

6. Gerda kiekvienoje rombo viršūnėje ir prie kiekvienos rombo kraštinės taip parašė po vieną skaičių, kad prie kiekvienos rombo kraštinės parašytas skaičius lygus tos kraštinės galuose parašytų skaičių sumai. Kokį skaičių Gerda parašė prie klaustuku pažymėtos kraštinės?

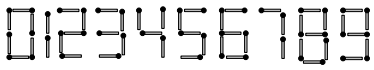


A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

7. Šeimą sudaro penki asmenys. Jų amžių (metais) suma lygi 80. Du jauniausi šeimos nariai yra vaikai – šešiametis ir aštuonmetė. Kokia buvo šeimos amžių (metais) suma prieš 7 metus?
A) 35 **B)** 36 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 52

8. Austėja parašė tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, bet vietoje skaitmenų panaudojo simbolius: □◊◊, ♡△△, ♡△□. Skirtingi simboliai žymi skirtingus skaitmenis, o vienodi simboliai – vienodus skaitmenis. Kam lygus skaičius ♡△□ + 1?
A) ♡♡◊ **B)** □♡□ **C)** ♡△◊ **D)** ♡◊□ **E)** ♡△♡

9. Iš vienodų degtukų skaitmenys dėliojami, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek natūraliųjų skaičių galima gauti tokiu būdu, panaudojant lygiai 6 degtukus?



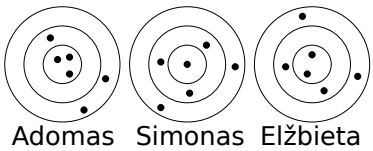
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

10. Viela, kurios ilgis yra 95 m, supjaustyta į tris dalis. Antroji dalis yra 50% ilgesnė nei pirmoji, o trečioji yra 50% ilgesnė nei antroji. Koks yra vielos trečiosios dalies ilgis metrais?

A) 36 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 48

Klausimai po 4 taškus

11. Adomas, Simonas ir Elžbieta mėtė strėlytes į taikinį. Kiekvienas į taikinį metė po šešias strėlytes (žr. pav.). Į tą patį taikinio žiedą pataikiusios strėlytės pelno vienodą taškų skaičių. Adomas iš viso surinko 46 taškus, o Simonas 34 taškus. Kiek taškų surinko Elžbieta?

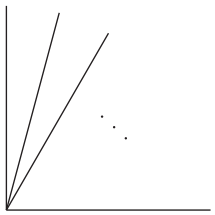


A) 37 **B)** 38 **C)** 39 **D)** 40 **E)** 41

12. Raidės A, B, C, D ir E žymi 5 skirtingus skaitmenis. Padauginus šešiaženklį skaičių $\overline{1ABCDE}$ iš 3, gautas šešiaženklis skaičius $\overline{ABCDE1}$. Kuri raidė žymi skaitmenį 8?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

13. Kotryna iš vieno plokštumos taško išvedė du tiesių spindulius, sudarančius statųjį kampą. Kiek mažiausiai spindulių ji dar turi išvesti iš šio taško, kad su kiekviena reikšme 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° ir 80° kurie nors du Kotrynos išvesti spinduliai sudarytų atitinkamo didumo kampą?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

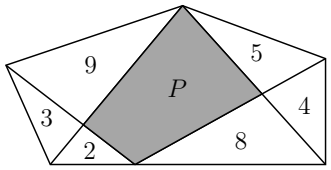
14. 2023 iš eilės einančių sveikųjų skaičių suma lygi 2023. Didžiausią iš šių skaičių pažymėkime n. Kam lygi skaičiaus n skaitmenų suma?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

15. Laima apskaičiavo penkių skirtingų pirminių skaičių aritmetinį vidurkį ir gavo rezultatą – natūralųjį skaičių a. Kokia yra mažiausia galima skaičiaus a reikšmė?

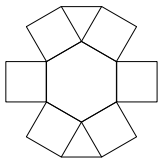
A) 12 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

16. Penkiakampis padalytas į 7 sritis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekvienos srities viduje įrašytas jos plotas. Kam lygus nuspalvintos srities plotas P?



A) 15 **B)** 15,5 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

17. Devynis skaičius 1, 2, 3, …, 9 reikia po vieną įrašyti pavaizduotos figūros langeliuose. Du langeliai vadinami gretimais, jei turi bendrą kraštinę. Jokiuose dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių sandauga negali būti didesnė nei 15. Keliais būdais galima užpildyti langelius?



A) 12 **B)** 8 **C)** 32 **D)** 24 **E)** 16

18. Dėžėje guli rutuliai. Sofija ir Rimas žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu žaidėjas turi iš dėžės ištraukti 1, 2, 3, 4 arba 5 rutulius. Pralaimi žaidėjas, po kurio ėjimo dėžė lieka tuščia. Kai po Rimo ėjimo dėžėje liko 10 rutulių, Sofija pastebėjo, kad ji gali laimėti, kaip Rimas bežaistų. Kiek rutulių Sofija turi palikti dėžėje savo ėjimu, kad laimėtų?
A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

19. Raminta skaičių 1015 išreiškė penkių natūraliųjų skaičių, kurių kiekvieno visi skaitmenys lygūs 7, suma (žr. pav.). Šioje išraiškoje skaitmuo 7 panaudotas lygiai 10 kartų. Tokiu pat būdu, 19 kartų panaudodama skaitmenį 7, Raminta išreiškė skaičių 2023. Keli dėmenys toje išraiškoje lygūs 77?

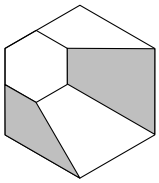
$$\begin{array}{r} 777 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ +\quad 7 \\ \hline 1015 \end{array}$$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

20. Kiek yra natūraliųjų skaičių, iš kurių dalijasi skaičius $2^{20} \cdot 3^{23}$, bet ne skaičius $2^{10} \cdot 3^{20}$?
A) 13 **B)** 30 **C)** 273 **D)** 460 **E)** Kitas atsakymas

Klausimai po 5 taškus

21. Taisyklingasis šešiakampis sudėtas iš keturių keturkampių ir vieno mažojo taisyklingojo šešiakampio, kaip parodyta paveikslėlyje. Figūros užtušuotos dalies ir mažojo šešiakampio plotų santykis lygus $\frac{4}{3}$. Kam lygus mažojo šešiakampio ir didžiojo šešiakampio plotų santykis?



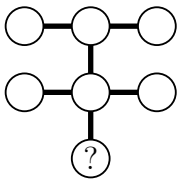
A) $\frac{3}{11}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{5}$

22. Julija turi tris žetonus. Kiekvieno žetono abiejose pusėse užrašyta po vieną skaičių. Iš viso užrašyti šeši iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Julija tris kartus metė šiuos tris žetonus. Po pirmojo metimo žetonai atsivertė skaičiais 6, 7 ir 8, kaip parodyta paveikslėlyje. Po antrojo metimo atsivertusių skaičių suma buvo lygi 23, o po trečiojo metimo 17. Kam lygi pirmuoju metimu neatsivertusių skaičių suma?

A) 18 **B)** 19 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 30

23. Praėjusio sezono septintose, aštuntose ir devintose rungtynėse rankinio komanda įmetė atitinkamai 24, 17 ir 25 įvarčius. Šios komandos pirmųjų 9 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkis buvo didesnis už jos pirmųjų 6 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkį. Be to, šios komandos pirmųjų 10 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkis buvo didesnis už 22. Kiek mažiausiai įvarčių ši komanda galėjo įmesti per dešimtąsias rungtynes?
A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

24. Trys atkarpos jungia 7 skritulius (žr. pav.), kuriuose įrašyta po vienaženklį natūralųjį skaičių. Įrašytieji 7 skaičiai skirtingi. Daina apskaičiavo kiekvienos atkarpos trijų skaičių sandaugą ir pastebėjo, kad visos trys sandaugos yra lygios. Koks skaičius įrašytas apatiniame skritulyje?

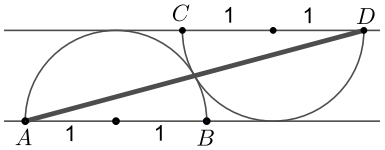


A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

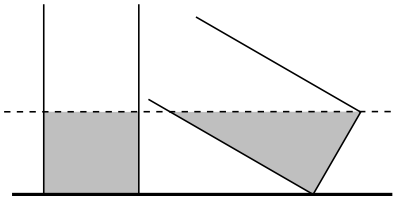
25. Iš triženklio natūraliojo skaičiaus n atėmus jo skaitmenų sumą, gautas triženklis natūralusis skaičius, kurio visi skaitmenys lygūs. Kiek yra tokių skaičių n?
A) 10 **B)** 20 **C)** 25 **D)** 30 **E)** Kitas atsakymas

26. Koks yra visų skaičių $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, kur n yra bet koks natūralusis skaičius, didžiausias bendras daliklis?
A) $2^9 \cdot 3^3$ **B)** $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ **C)** $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ **D)** $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ **E)** $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

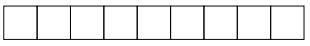
27. Tiesės AB ir CD lygiagrečios, o atkarpų AB ir CD ilgiai abu lygūs 2. Du pusapskritimiai su skersmenimis AB ir CD liečia šias tieses ir vienas kitą, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra atkarpos AD ilgio kvadratas?
A) 16 **B)** $8 + 4\sqrt{3}$ **C)** 12 **D)** 9 **E)** $5 + 2\sqrt{3}$



28. Dviejose vienodose ritinio formos talpyklose įpilta po tiek pat vandens. Vieną talpyklą atrėmus į kitą, vandens lygis jose liko vienodas (žr. pav.). Kiekvienos talpyklos pagrindas yra skritulys, kurio plotas lygus 3π m^2. Kiek vandens įpilta į vieną talpyklą?
A) $3\sqrt{3}\pi$ m^3 **B)** 6π m^3 **C)** $\frac{3\pi}{4}$ m^3 **D)** 9π m^3
E) Neįmanoma nustatyti



29. Visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 9 reikia taip po vieną įrašyti į langelius (žr. pav.), kad kiekviena trijų gretimų skaičių suma dalytųsi iš 3. Keliais būdais tai galima padaryti?
A) 6^4 **B)** 6^3 **C)** 2^9 **D)** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ **E)** $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$



30. Šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga yra dvylikos skaitmenų skaičius $\overline{ABBCDDCDDABB}$. Skaitmenis A, B, C, D užrašius tam tikra tvarka, vėlgi gaunami iš eilės einantys sveikieji skaičiai. Kuris skaitmuo yra D?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Eksperto užduočių sprendimai

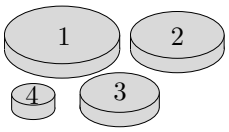
1. (D) 4

? Tikrinant pateiktus atsakymus, pakanka pastebėti, kad tinka atsakymas **D)** 4: jei gatvėje yra lygiai 4 namai, kuriuose yra po 4 gyventojus, tai likusiuose $7 - 4 = 3$ namuose yra po 3 gyventojus, o 7 namuose gyventojų yra iš viso $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 25$.

Renkamės atsakymą **D**.

! Gatvės gyventojus paranku nusakyti taip: kiekviename iš 7 namų gyvena po tris gyventojus, o kai kuriuose namuose dar po vieną. Taigi iš viso gatvėje gyventojų yra $3 \cdot 7 = 21$ ir dar tiek, kiek yra namų, kuriuose gyventojų yra vienu daugiau nei trys. Kadangi gatvėje gyventojų yra $25 = 21 + 4$, tai joje yra 4 namai, kuriuose yra po keturis gyventojus.

2. (C) 4

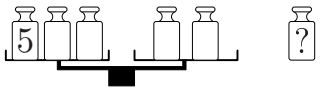


! Sunumeruokime skritulius skersmens mažėjimo tvarka skaičiais 1, 2, 3, 4. Emilija pasirinkti tris skritulius gali taip: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ – keturi būdai. Kiekvieną kartą, pasirinkus 3 skritulius, bokštą galima statyti vieninteliu būdu – pradedant didžiausiu skrituliu ir baigiant mažiausiu. Taigi pasirinkus skritulius 1, 2 ir 3, bokštas (surašius skritulius nuo apatinio iki viršutinio) bus 123. Kiti bokštai atitinkamai bus 124, 134, 234 – iš viso 4 bokštai.

Teisingas atsakymas **C**.

!! Dar paprasčiau galvoti ne kokius skritulius pasirinkti, o kokių neimti. Kad liktų 3 skrituliai, neimti reikia 1 skritulio. Tai padaryti galima keturiais būdais – kiekvieną kartą atmetant vis kitą skritulį. O kai 3 skrituliai jau pasirinkti, yra tik vienintelis būdas juos sukrauti į bokštą – dedant juos vieną ant kito pradedant didžiausiu ir baigiant mažiausiu.

3. (A) 1 kg



? Bandykime atsakymą **A** – atidėtas 1 kg. Tada ant svarstyklių yra $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ kg, kairėje 10 kg, vadinasi, čia dar yra du mažiausi svarsčiai 2 kg ir 3 kg (kitaip bus per daug). Dešinėje lieka $4 + 6$ kg.

Renkamės atsakymą **A**.

! Kadangi svarstyklės pusiausviros, tai lėkštėse vienodas svoris, taigi ant svarstyklių lyginė suma. Visų svarsčių svorių suma $1+2+3+4+5+6 = 21$ kg – nelyginė ir turi būti atidėtas nelyginis skaičius. Bet ant svarstyklių matome 5, taigi atidėtas 3 arba 1.

Jeigu atidėtas 3, tai ant svarstyklių 18, kiekvienoje lėkštėje 9. Bet tada kairėje $5+1+2 = 8$ – per mažai, o $5 + 1 + 4 = 10$ – per daug. Vadinasi, atidėti galima tik 1. Tada viskas išeina: ant svarstyklių 20, lėkštėse po 10, kairėje $5 + 2 + 3 = 10$, dešinėje $4 + 6 = 10$.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Gražiausi sprendimai – kai nespėliojama. Pavyzdžiui, toks.

Kadangi kairėje „didelis“ svarstis 5, tai dešinėje yra 6 – kitaip dešinėje būtų $\leqslant 4+3$, o kairėje $\geqslant 5+1+2$.

Ant svarstyklių turėsime:

$$\boxed{5}+\boxed{}+\boxed{}=\boxed{6}+\boxed{}$$

Dešinėje nėra 1 – ten būtų per mažai. Bet svarsčio 1 nėra ir kairėje: tada lėkštėse būtų po 6 kg ir dar po lygų svarstį, o lygių svarsčių neturime. Vadinasi, 1 kg svarstis atidėtas. (Sudėlioti likusius svarsčius pusiausvirai jau mokame.)

4. (B) 4

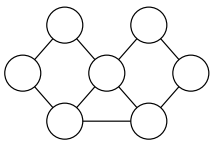
? Jei kengūrų žvėryne yra 3, 6, 7 arba 8, tai Mato spėjimas, didesnis už tikrąjį kengūrų skaičių, atitinkamai būtų 7, 10, 11 arba 12. Tačiau nė vieno iš šių skaičių nėra tarp vaikų spėjimų 2, 4, 5, 8, 9. Todėl atsakymai **A**, **C**–**E** yra klaidingi.

Renkamės atsakymą **B**.

! Pamėginkime tarp vaikų spėjimų 2, 4, 5, 8, 9 aptikti Mato ir Tomo pasakytus skaičius. Kadangi Matas tikrąjį kengūrų skaičių padidino 4, o Tomas sumažino 2, tai Mato skaičius yra $4+2=6$ didesnis nei Tomo. Tarp skaičių 2, 4, 5, 8, 9 tėra vienintelė skaičių pora, kurioje vienas skaičius yra 6 didesnis nei kitas: 2 ir $8=2+6$. Taigi Mato ir Tomo spėjimai atitinkamai yra 8 ir 2, o žvėryne yra $8-4=2+2=4$ kengūros.

5. (B) 3

! Aišku, kad keturiems skrituliukams, sudarantiems kvadratą, užtenka dviejų spalvų, pavyzdžiui, R ir M:



O štai trims skrituliukams, sudarantiems trikampį, reikia jau trijų spalvų – R, M, G:

Dabar aišku, kad trijų spalvų Kristinai užteks: iš pradžių ji spalvina apatinį trikampį, o kiekvienam iš kvadratų užtenka kad ir tų dviejų spalvų, kurios jau panaudotos bendrai su trikampiu kraštinėje.

6. (B) 12

! Prie klaustuku pažymėtos kraštinės parašytą skaičių pažymėkime x. Prie bet kurių dviejų priešingų rombo kraštinių parašytų skaičių suma lygi visose rombo viršūnėse parašytų skaičių sumai. Taigi $8+13=x+9$. Iš čia randame, kad $x=12$.

Beje, kairiojoje rombo viršūnėje galima įrašyti bet kurį skaičių a. Tada kitose viršūnėse (pagal laikrodžio rodyklę) bus $8-a$, $a+1$, $12-a$, ir uždavinio sąlyga išpildyta. Jeigu norime, kad visi skaičiai būtų natūralieji ir skirtingi, tai a reikia imti 1, 2 arba 5.

Teisingas atsakymas **B**.

7. (D) 46

! Svarbu pastebėti, kad jauniausiam šeimos nariui tėra 6 metai, todėl prieš 7 metus jo nebuvo. Likusių keturių šeimos narių amžių (metais) suma dabar yra $80 - 6 = 74$. Jauniasiai iš šių keturių narių dabar yra 8 metai. Tad kiekvienam iš jų dabar yra daugiau nei 7 metai, o prieš 7 metus buvo 7 metais mažiau. Vadinasi, prieš 7 metus šeimą sudarė keturi asmenys, o jų amžių (metais) suma buvo $74 - 7 - 7 - 7 - 7 = 46$.

8. (E) $\heartsuit\triangle\heartsuit$

! Skaičiai $\square\lozenge\lozenge$ ir $\heartsuit\triangle\triangle$ yra iš eilės einantys. Kadangi prie skaičiaus $\square\lozenge\lozenge$ pridėjus 1, keičiasi dešimčių skaitmuo, tai $\lozenge = 9$ ir $\triangle = 0$. Be to, skaitmuo $\heartsuit$ yra vienetu didesnis už skaitmenį $\square$. Kita vertus, $\heartsuit\triangle\triangle + 1 = \heartsuit\triangle\square$. Todėl $\square = 1$. Taigi $\heartsuit = \square + 1 = 1 + 1 = 2$. Vadinasi, $\heartsuit\triangle\square + 1 = 201 + 1 = 202 = \heartsuit\triangle\heartsuit$.

Teisingas atsakymas **E**.

9. (C) 6

! Tarkime, kad natūralųjį skaičių n galima gauti uždavinio sąlygoje nurodytu būdu, panaudojant lygiai 6 degtukus. Pastebėkime, kad bet kuriam skaitmeniui reikia mažiausiai 2 degtukų. Todėl skaičius n turi ne daugiau negu $\frac{6}{2} = 3$ skaitmenis. Nagrinėkime tris atvejus: a) skaičius n yra vienženklis; b) skaičius n yra dviženklis; c) skaičius n yra triženklis.

a) skaičius n yra vienženklis. Vadinasi, n yra skaitmuo, sudarytas iš lygiai 6 degtukų. Nesunku įsitikinti, kad $n = 6$ arba 9 (skaičius 0 netinka, nes nėra natūralusis skaičius).

b) skaičius n yra dviženklis. Tuomet vienas skaitmuo sudėtas iš lygiai 2 degtukų ir kitas – iš 4 arba kiekvienas iš skaitmenų sudėtas iš 3 degtukų. Vienintelis skaitmuo 1 yra sudėtas iš 2 degtukų ir vienintelis skaitmuo 4 yra sudėtas iš 4 degtukų. Be to, vienintelis skaitmuo 7 yra sudėtas iš 3 degtukų. Taigi šiuo atveju $n = 14$, 41 arba 77.

c) skaičius n yra triženklis. Tuomet kiekvienas jo skaitmuo sudėtas iš 2 degtukų. Kadangi vienintelis skaitmuo 1 yra sudėtas iš 2 degtukų, tai $n = 111$.

Taigi $n = 6$, 9, 14, 41, 77 arba 111.

Teisingas atsakymas **C**.

10. Ⓒ 45

! Vielos pirmosios, antrosios ir trečiosios dalių ilgius metrais atitinkamai pažymėkime x_1, x_2, x_3. Tada $x_1 + x_2 + x_3 = 95$ (m).

Jei skaičius a yra 50% didesnis už skaičių b, tai jis gaunamas, prie skaičiaus b pridėjus $\frac{50\%}{100\%} = \frac{1}{2}$ skaičiaus b, t. y. $a = \frac{3}{2}b$. Vadinasi,

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1, \qquad x_3 = \frac{3}{2}x_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}x_1\right) = \frac{9}{4}x_1,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4}{9}x_3 + \frac{2}{3}x_3 + x_3 = x_3 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 1\right) = x_3 \cdot \frac{4+6+9}{9} = \frac{19}{9}x_3,$$

$$95 = \frac{19}{9}x_3, \qquad x_3 = 95 : 19 \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45 \text{ (m)}.$$

11. Ⓓ 40

! Uždavinio sąlygos paveikslėlyje matyti, kad į kiekvieną taikinio žiedą Elžbieta įsmeigė dvigubai mažiau strėlyčių negu į tą patį žiedą įsmeigė Adomas ir Simonas kartu paėmus. Vadinasi, Elžbieta surinko $\frac{46+34}{2} = 40$ taškų.

Teisingas atsakymas **D**.

12. Ⓒ C

! Įsivaizduokime, kad skaičius $\overline{1ABCDE}$ dauginamas iš 3 stulpeliu:

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,D\,E \\ \times \qquad\qquad 3 \\ \hline A\,B\,C\,D\,E\,1 \end{array}$$

Kadangi $E \cdot 3$ baigiasi skaitmeniu 1, tai $E = 7$. Suskaičiavus $E \cdot 3 = 21$, po brūkšniu parašomas skaitmuo 1, o skaitmuo 2 paliekamas mintyse ir pridedamas prie $D \cdot 3$. Kadangi $D \cdot 3 + 2$ baigiasi skaitmeniu $E = 7$, tai $D \cdot 3$ baigiasi skaitmeniu 5. Tada $D = 5$. Suskaičiavus $D \cdot 3 + 2 = 17$, po brūkšniu parašomas skaitmuo $E = 7$, o skaitmuo 1 paliekamas mintyse ir pridedamas prie $C \cdot 3$. Kadangi $C \cdot 3 + 1$ baigiasi skaitmeniu $D = 5$, tai $C \cdot 3$ baigiasi skaitmeniu 4. Tada $C = 8$ – radome reikiamą skaitmenį.

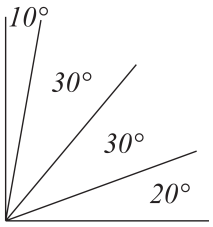
!! Pastebėkime, kad

$$\overline{1ABCDE} = 100000 + \overline{ABCDE}, \qquad \overline{ABCDE1} = \overline{ABCDE} \cdot 10 + 1,$$
$$\overline{ABCDE} \cdot 10 + 1 = 3 \cdot (100000 + \overline{ABCDE}) = 300000 + \overline{ABCDE} \cdot 3,$$
$$\overline{ABCDE} \cdot (10 - 3) = 300000 - 1 = 299999, \qquad \overline{ABCDE} = 299999 : 7.$$

Dalydami 299999 iš 7 kampu, gauname $\overline{ABCDE} = 42857$. Dalybos metu pakanka rasti trečiąjį dalmens skaitmenį $C = 8$.

13. (B) 3

! Akivaizdu, kad neužtenka dviejų papildomų spindulių (nubrėžus keturis spindulius, išeinančius iš vieno taško, susidaro daugiausiai šeši smailieji kampai). Vadinasi, reikia išvesti bent tris papildomus spindulius. Paveikslėlyje pavaizduota, kad trijų papildomų spindulių pakanka.



Teisingas atsakymas **B**.

14. (A) 4

! Nagrinėkime 2023 iš eilės einančius sveikuosius skaičius: -1011, -1010, $\ldots,$, -1, 0, 1, $\ldots$, 1010, 1011. Pastebėkime, kad jų suma lygi 0. Prie kiekvieno iš šių skaičių pridėjus po 1, gausime 2023 iš eilės einančius skaičius -1010, -1009, $\ldots,$, -1, 0, 1, $\ldots$, 1011, 1012, kurių suma lygi 2023. Lieka pastebėti, kad tai vienintelis 2023 iš eilės einančių sveikųjų skaičių rinkinys, kurių suma lygi 2023. (Prie bet kurio 2023 iš eilės einančių sveikųjų skaičių rinkinio kiekvieno skaičiaus paeiliui pridedant po 1 arba atimant po 1, galima gauti bet kuriuos 2023 iš eilės einančius sveikuosius skaičius.) O didžiausio skaičiaus skaitmenų suma lygi $1+0+1+2 = 4$.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Mūsų skaičiai atvirkščia tvarka lygūs

$$n,\ n-1,\ \ldots,\ n-2022.$$

Po jais parašykime tuos pačius skaičius didėjimo tvarka:

$$n-2022,\ n-2021,\ \ldots,\ n.$$

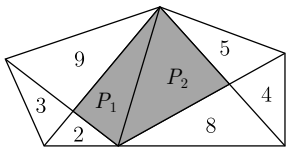
Kiekvienos poros suma lygi $2n-2022$. Porų yra 2023, visų jų suma lygi visų surašytų skaičių sumai: $2023 \cdot (2n-2022) = 2 \cdot 2023$. Iš čia $n-1011 = 1$, $n = 1012$.

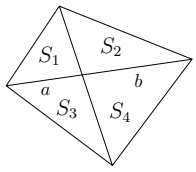
15. (E) 6

! Kuo mažesni penki duotieji pirminiai skaičiai, tuo mažesnė jų suma s ir tuo mažesnis vidurkis $a = \frac{s}{5}$. Tad natūralu patikrinti, ar uždavinio sąlygos netenkina penki mažiausi pirminiai skaičiai 2, 3, 5, 7, 11. Tačiau jų suma 28 nesidalija iš 5, todėl jų vidurkis nėra natūralusis skaičius.

Nors iš pirmo karto nepavyko atspėti tinkamo pirminių skaičių penketo, bet sužinojome, jog $s \geqslant 28$. Kadangi $s = 5a$ dalijasi iš 5, tai $s \geqslant 30$ ir $a \geqslant \frac{30}{5} = 6$. Kita vertus, nesunku pastebėti, jog reikšmė $a = 6$ yra galima. Kad ją gautume, tiesiog skaičių penkete 2, 3, 5, 7, 11 skaičių 11 pakeiskime taip pat pirminiu skaičiumi 13. Tada penkių skirtingų pirminių skaičių suma 28 padidės 2, ir gausime $s = 28+2 = 30$ bei $a = 6$. Vadinasi, tai ir yra mažiausia galima a reikšmė.

16. Ⓒ 16





! Padalykime nuspalvintą sritį į du trikampius, o jų plotus pažymėkime P_1 ir P_2, kaip parodyta paveikslėlyje. Papildomai nubrėžta atkarpa dalija didįjį penkiakampį į du keturkampius. Vieną iš jų įstrižainės dalija į trikampius, kurių plotai lygūs 2, 3, 9, P_1, o kitą – į trikampius, kurių plotai lygūs 8, 4, 5, P_2. Turime rasti $P = P_1 + P_2$.

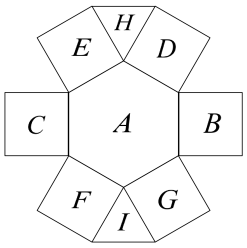
Plotus P_1 ir P_2 rasime pasinaudodami tokiu pastebėjimu: jei įstrižainės dalija keturkampį į keturis trikampius, kurių plotai yra S_1, S_2, S_3, S_4, kaip parodyta paveikslėlyje, tai $S_1 : S_2 = S_3 : S_4$. Pastebėjimas išplaukia iš to, kad trikampiai, kurių plotai yra S_1 ir S_2, turi bendrą aukštinę, tad jų plotų santykis $S_1 : S_2$ lygus atitinkamų pagrindų, į kuriuos nuleista aukštinė, ilgių santykiui $a : b$, ir analogiškai $S_3 : S_4 = a : b$. Vadinasi,

$$P_1 : 2 = 9 : 3, \qquad P_2 : 5 = 8 : 4,$$

$$P_1 = 6, \qquad P_2 = 10, \qquad P = 6 + 10 = 16.$$

17. Ⓔ 16

! Figūros langelius pažymėkime raidėmis A, B, C, D, E, F, G, H ir I (žr. pav.).



Langelis, kuriame įrašytas skaičius 8 arba 9, turi tik vieną gretimą langelį ir jame įrašytas skaičius 1. Vadinasi, langelyje A įrašytas skaičius 1, o skaičiai 8 ir 9 įrašyti langeliuose B ir C (du variantai).

Skaičius 7 negali būti įrašytas langelyje H, nes jam gretimame langelyje E arba kitame jam gretimame langelyje D yra įrašytas skaičius, kuris yra ne mažesnis už 3 (tokiu atveju dviejuose gretimuose langeliuose įrašytų skaičių sandauga būtų ne mažesnė už $7 \cdot 3 = 21 > 15$). Panašiai gauname, kad skaičius 7 negali būti įrašytas langelyje I. Taigi skaičius 7 yra įrašytas viename iš langelių D, E, F arba G. Tarkime, kad skaičius 7 įrašytas langelyje G. Tada skaičius 2 įrašytas langelyje I. Langeliui, kuriame įrašytas skaičius 6, gretimuose langeliuose gali būti įrašyti tik skaičiai 1 arba 2. Taigi skaičius 6 įrašytas langelyje F. Lieka trys skaičiai 3, 4 ir 5, kurie įrašyti langeliuose H, D ir E. Kadangi skaičiai 4 ir 5 negali būti įrašyti gretimuose langeliuose ($4 \cdot 5 > 15$), tai skaičius 3 įrašytas langelyje H, o skaičiai 4 ir 5 įrašyti langeliuose E ir D (du variantai).

Taigi yra du būdai įrašyti skaičius 8 ir 9 langeliuose B ir C, keturi būdai įrašyti skaičių 7 viename iš langelių D, E, F arba G ir du būdai įrašyti skaičius 4 ir 5. Vadinasi, yra lygiai $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ būdų užpildyti figūros langelius.

Teisingas atsakymas **E**.

18. Ⓒ 7

! Natūralųjį skaičių vadinkime laimingu, jei tiek rutulių esant dėžėje, ėjimą turintis atlikti žaidėjas gali laimėti, nepriklausomai nuo kito žaidėjo ėjimų (turi pergalės strategiją). Jei pergalės strategiją turi kitas žaidėjas, tai atitinkamą natūralųjį skaičių vadinkime nelaimingu. Dėžėje esant 10 rutulių, Sofija turi savo ėjimu Rimui palikti rutulių skaičių, kuris būtų nelaimingas.

Dėžėje likus vienam rutuliui, kitu ėjimu jis neišvengiamai ištraukiamas, o žaidėjas, priverstas atlikti šį ėjimą, pralaimi. Taigi skaičius 1 yra nelaimingas. Tada skaičiai 2, 3, 4, 5, 6 yra laimingi: dėžėje esant tiek rutulių, vienu ėjimu galima pasiekti, kad dėžėje liktų lygiai vienas rutulys, o tada kitas žaidėjas pralaimės. Tolimesnis skaičius 7 vėl nelaimingas: kad ir kokį ėjimą atliks žaidėjas, rutulių skaičius dėžėje taps laimingas, tad laimėti galės kitas žaidėjas. Šiuos samprotavimus galima tęsti iki begalybės: penki skaičiai 8, 9, 10, 11, 12 vėl yra laimingi, o tolimesnis skaičius 13 vėl nelaimingas, ir t. t. Tačiau jau žinome, kad Sofijai apsimoka ištraukti iš dėžės 3 iš 10 rutulių bei palikti 7 rutulius – ji galės laimėti, kad ir kaip bežaistų Rimas. (O jei Sofija ištrauks 1, 2, 4 arba 5 rutulius, tai toliau Rimas galės laimėti, kad ir kaip bežaistų ji.)

Apibendrinus šio sprendimo samprotavimus didesniems skaičiams, galima įrodyti tokį teiginį: natūralusis skaičius yra nelaimingas tada ir tik tada, kai dalijasi iš 6 su liekana 1, o priešingu atveju jis yra laimingas. Pergalės strategija šiame žaidime yra kitam žaidėjui savo ėjimu visada palikti rutulių skaičių, kuris būtų nelaimingas.

19. Ⓔ 6

! Kadangi $7777 > 2023$, tai skaičiaus 2023 išraiškoje gali būti tik skaičiai 7, 77 ir 777. Tarkime, kad Raminta, išreikšdama skaičių 2023, skaičių 777 panaudojo a kartų, skaičių 77 – b kartų, o skaičių 7 – c kartų. Tada

$$a \cdot 777 + b \cdot 77 + c \cdot 7 = 2023.$$

Be to, šioje išraiškoje skaitmuo 7 panaudotas lygiai 19 kartų. Todėl $3a + 2b + c = 19$. Iš čia matyti, kad $b \leqslant 9$ ir $c \leqslant 19$.

Įrodysime, kad $a = 2$. Iš tikrųjų, jei $a \geqslant 3$, tuomet $a \cdot 777 \geqslant 3 \cdot 777 = 2331 > 2023$. Vadinasi, $a \leqslant 2$. Tarkime, kad $a = 1$. Šią reikšmę įstatę į lygybę $a \cdot 777 + b \cdot 77 + c \cdot 7 = 2023$, suprastinę panašius narius ir abi gautosios lygybės puses padaliję iš 7, gauname lygybę $11b + c = 178$. Kadangi $b \leqslant 9$ ir $c \leqslant 19$, tai $11b + c \leqslant 11 \cdot 9 + 19 = 118 < 178$. Vadinasi, $a = 2$.

Reikšmę $a = 2$ įrašę lygybėse $a \cdot 777 + b \cdot 77 + c \cdot 7 = 2023$ ir $3a + 2b + c = 19$ ir jas pertvarkę, gauname atitinkamai lygybes $11b + c = 67$ ir $2b + c = 13$. Iš pirmosios lygybės panariui atėmę antrąją, gauname $9b = 54$, o iš čia – $b = 6$. Tada $c = 13 - 2b = 1$. Nesunku patikrinti, kad

$$2 \cdot 777 + 6 \cdot 77 + 7 = 2023.$$

Teisingas atsakymas **E**.

20. (C) 273

! Reikia nustatyti, kiek skaičius $a = 2^{20} \cdot 3^{23}$ turi teigiamų daliklių, kurie nėra skaičiaus $b = 2^{10} \cdot 3^{20}$ teigiami dalikliai.

Skaičiaus a teigiami dalikliai yra skaičiai

$$2^x \cdot 3^y, \quad \text{kur} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 20, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 23.$$

Čia vieną iš skaičiaus x reikšmių ir vieną iš skaičiaus y reikšmių galima pasirinkti laisvai. Tų reikšmių yra atitinkamai 21 ir 24, todėl a turi $21 \cdot 24$ teigiamų daliklių.

Skaičiaus b teigiami dalikliai yra skaičiai

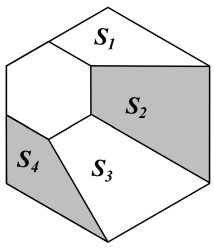
$$2^x \cdot 3^y, \quad \text{kur} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 20.$$

Čia x ir y reikšmių yra atitinkamai po 11 ir 21, tad b turi $11 \cdot 21$ teigiamų daliklių. Kiekvienas iš jų yra ir skaičiaus a teigiamas daliklis. Vadinasi, skaičiaus a teigiamų daliklių, kurie nėra skaičiaus b teigiami dalikliai, yra

$$21 \cdot 24 - 11 \cdot 21 = 21 \cdot (24 - 11) = 21 \cdot 13 = 21 \cdot 10 + 21 \cdot 3 = 210 + 63 = 273.$$

21. (A) $\frac{3}{11}$

! Didžiojo šešiakampio plotą pažymėkime S, mažojo – s, o keturių keturkampių plotus pažymėkime S_1, S_2, S_3 ir S_4 (žr. pav.):



Dėl simetrijos akivaizdu, kad $S_1 = S_4$ ir $S_2 = S_3$. Tuomet $S = s + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = s + 2(S_2 + S_3)$. Taigi užtušuotos figūros plotas $S_2 + S_3$ lygus $\frac{S-s}{2}$. Kadangi užtušuotos figūros dalies ir mažojo šešiakampio plotų santykis lygus $\frac{4}{3}$, tai

$$\frac{\frac{S-s}{2}}{s} = \frac{4}{3}.$$

Iš čia randame santykį $\frac{s}{S} = \frac{3}{11}$.

Teisingas atsakymas **A**.

!! Mažojo šešiakampio plotą laikykime lygiu 1. Tada bendras abiejų užtušuotųjų keturkampių plotas $\frac{4}{3}$, toks pat dėl simetrijos ir abiejų neužtušuotųjų keturkampių plotas. Todėl didžiojo šešiakampio plotas lygus $1 + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$, o ieškomas santykis yra $1 : \frac{11}{3} = \frac{3}{11}$.

22. (A) 18

! Mažiausią iš visų ant žetonų užrašytų skaičių pažymėkime n. Tada ant žetonų yra užrašyti šeši iš eilės einantys natūralieji skaičiai n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ ir $n+5$. Kadangi po trečiojo metimo atsivertusių skaičių suma lygi 17, tai trijų mažiausių skaičių suma $n + (n + 1) + (n + 2) \leqslant 17$. Iš čia gauname, kad $n \leqslant 4$.

Kadangi po antrojo metimo atsivertusių skaičių suma buvo 23, tai trijų didžiausiųjų skaičių suma $(n + 3) + (n + 4) + (n + 5) \geqslant 23$, iš čia $3n \geqslant 11$, $n \geqslant 4$. Vadinasi, $n = 4$ ir ant žetonų užrašyti skaičiai 4, 5, 6, 7, 8 ir 9. Taigi pirmuoju metimu neatsivertusių skaičių suma lygi $4 + 5 + 9 = 18$.

Lieka įsitikinti, kad ant žetonų galima taip užrašyti skaičius 4, 5, 6, 7, 8 ir 9, kad būtų tenkinamos uždavinio sąlygos. Iš tikrųjų, jei ant pirmojo žetono užrašysime skaičius 5 ir 6, ant antrojo – skaičius 4 ir 8, o ant trečiojo – skaičius 7 ir 9, tuomet toks žetonų rinkinys tenkins uždavinio sąlygas ($6 + 8 + 9 = 23$, $4 + 6 + 7 = 17$ ir $4 + 5 + 9 = 18$).

Teisingas atsakymas **A**.

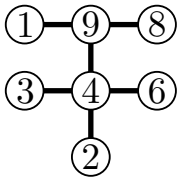
23. (C) 24

! Septintosiose, aštuntosiose ir devintosiose rungtynėse rankinio komandos įmestų įvarčių vidurkis buvo $\frac{24+17+25}{3} = 22$. Todėl pirmosiose šešeriose rungtynėse įmestų įvarčių vidurkis buvo mažesnis negu 22. Vadinasi, per pirmąsias šešerias rungtynes rankinio komanda įmetė ne daugiau negu $6 \cdot 22 - 1 = 131$ įvartį. Šios komandos pirmųjų 10 rungtynių įvarčių skaičiaus vidurkis buvo didesnis už 22. Todėl per pirmąsias 10 rungtynių komanda įmetė mažiausiai $10 \cdot 22 + 1 = 221$ įvartį. Taigi per dešimtąsias rungtynes komanda įmetė mažiausiai $221 - 131 - 66 = 24$ įvarčius. Lieka įsitikinti, kad komanda galėjo taip sužaisti 10 rungtynių, kad būtų tenkinamos uždavinio sąlygos ir per dešimtąsias rungtynes ši komanda būtų įmetusi 24 įvarčius. Pavyzdys pateiktas lentelėje.

Rungtynių nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Įvarčių sk.	22	22	22	22	22	21	24	17	25	24

Teisingas atsakymas **C**.

24. (A) 2



? Dainos apskaičiuotų sandaugų reikšmę pažymėkime P, o ieškomą apatinio skritulio skaičių pažymėkime x. Norint pasirinkti tinkamą atsakymą, pakanka sugalvoti bent vieną tinkamą skaičių surašymą skrituliuose. Tačiau ir taip spėliojant, verta pasiremti naudingais pastebėjimais.

Visų pirma, tarp skaičių 1, 2, 3, …, 9 yra vienintelis skaičius, dalus iš pirminio skaičiaus 7, – pats skaičius 7. Jei jis būtų įrašytas viename iš skritulių, tai viena iš trijų Dainos apskaičiuotų sandaugų dalytųsi iš 7. Visos trys sandaugos lygios, todėl visos trys turėtų dalytis iš 7, o visos trys atkarpos turėtų kirsti skritulį, kuriame įrašytas skaičius 7. Tačiau visos trys atkarpos jokio skritulio nekerta, todėl skaičiaus 7 tarp įrašytųjų nėra. Analogiškai atmetamas ir skaičius 5.

Vadinasi, 7 skrituliuose įrašyti likę 7 skaičiai 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Jie visi yra skaičiaus P dalikliai. Jei trys skaičiai kurioje nors atkarpoje yra 1, a, b, tai $P = 1 \cdot a \cdot b \leqslant 1 \cdot 8 \cdot 9 = 72$. Kita vertus, skaičius P dalijasi iš 8 ir iš 9, todėl ir iš $8 \cdot 9 = 72$. Vadinasi, $P = 72$, o vienoje atkarpoje su skaičiumi 1 tegali būti skaičiai 8 ir 9 (kitaip $P = 1 \cdot a \cdot b < 72$). Kadangi $P = 72$, tai su skaičiumi 9 vienoje atkarpoje gali būti skaičiai 1 ir 8 arba skaičiai 2 ir 4, o su skaičiumi 3 – tik skaičiai 4 ir 6.

Galima gauti daugiau įvairių pastebėjimų ir juos naudojant atspėti skaičių surašymo skrituliuose pavyzdį. Vienas iš jų parodytas paveikslėlyje.

Renkamės atsakymą **A**.

! Dainos apskaičiuotų sandaugų reikšmę pažymėkime P, o ieškomą apatinio skritulio skaičių pažymėkime x. Galima įrodyti, kad 7 skrituliuose įrašyti 7 skaičiai 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Tuo įsitikinome **?** dalyje.

Kiekvienos iš dviejų horizontalių atkarpų skaičių sandauga lygi P, todėl šių atkarpų visų 6 skaičių sandauga lygi P^2, o visų 7 skaičių skrituliuose sandauga lygi

$$xP^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4.$$

Padalijus $2^7 \cdot 3^4$ iš x, gaunamas sveikojo skaičiaus kvadratas. Taigi $x = 2^a \cdot 3^b$, kur a ir b yra neneigiami sveikieji skaičiai, o skaičiuje $2^7 \cdot 3^4 : x = 2^{7-a} \cdot 3^{4-b}$ rodikliai $7-a$ ir $4-b$ yra abu lyginiai. Tinka tik $x = 2 = 2^1 \cdot 3^0$ ir $x = 8 = 2^3 \cdot 3^0$. Pastaruoju atveju $P = \sqrt{2^7 \cdot 3^4 : 8} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Tačiau viename iš skritulių įrašytas skaičius 8, todėl P yra šio bei dar dviejų natūraliųjų skaičių sandauga ir dalijasi iš 8. Vadinasi, vienintelė galima x reikšmė yra 2. (Skaičių surašymo skrituliuose pavyzdys pateiktas **?** dalyje.)

25. Ⓑ 20

! Tarkime, kad triženklis skaičius $n = \overline{ABC}$ tenkina uždavinio sąlygą: skaičius

$$\overline{ABC} - (A + B + C) = 100A + 10B + C - (A + B + C) = 99A + 9B$$

lygus triženkliam skaičiui $\overline{DDD} = 111D$. Tada $9 \cdot (11A + B) = 111D$ dalijasi iš $9 = 3 \cdot 3$, o $111D : 3 = 37D$ dalijasi iš 3. Kadangi skaičius 37 nesidalija iš pirminio skaičiaus 3, tai iš 3 dalijasi skaičius D. Čia $1 \leqslant D \leqslant 9$, todėl $D = 3$, 6 arba 9.

Tegu $D = 3$. Tada $11A+B = 3\cdot 111 : 9 = 37$. Jei $A < 3$, tai $11A+B \leqslant 11\cdot 2+9 < 37$, o jei $A > 3$, tai $11A+B \geqslant 11\cdot 4 > 37$. Taigi $A = 3$ ir $B = 37-11A = 4$. Iš tiesų kiekvienas skaičius $\overline{34C}$, kur $C = 0, 1, 2, \ldots, 9$, tenkina uždavinio sąlygą: $\overline{34C} - (3 + 4 + C) = 340 - 7 = 333$.

Tegu $D = 6$. Tada $11A+B = 6\cdot 111 : 9 = 37\cdot 2 = 74$. Jei $A < 6$, tai $11A+B \leqslant 11\cdot 5+9 < 74$, o jei $A > 6$, tai $11A + B \geqslant 11 \cdot 7 > 74$. Taigi $A = 6$ ir $B = 74 - 11A = 8$. Iš tiesų kiekvienas skaičius $\overline{68C}$, kur $C = 0, 1, 2, \ldots, 9$, tenkina uždavinio sąlygą: $\overline{68C} - (6+8+C) = 680 - 14 = 666$.

Kai $D = 3$ ir $D = 6$, gavome po 10 tinkamų n reikšmių. Likęs atvejis $D = 9$ yra negalimas, nes

$$9 \cdot (11A + B) \leqslant 9 \cdot (11 \cdot 9 + 9) < 9 \cdot 111 = 999.$$

Vadinasi, iš viso yra 20 tinkamų n reikšmių.

!! Tarkime, kad skaičius $n = \overline{ABC}$ tenkina uždavinio sąlygą:

$$n - (A + B + C) = \overline{DDD}.$$

Pasinaudokime tokiu teiginiu: kiekvieno natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip pats skaičius. Taigi n dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip $A + B + C$, o skaičius $n - (A + B + C) = \overline{DDD}$ dalijasi iš 9 su liekana 0. Tada šio skaičiaus skaitmenų suma $3D$ dalijasi iš 9, o skaičius D dalijasi iš 3. Kadangi $1 \leqslant D \leqslant 9$, tai $D = 3$, 6 arba 9.

Pastebėkime, kad skaičius $A+B+C$ yra tarp skaičių $1+0+0 = 1$ ir $9+9+9 = 27$. Todėl $n = \overline{DDD} + (A + B + C)$ yra tarp skaičių $\overline{DDD} + 1$ ir $\overline{DDD} + 27$. Jei $D = 9$, tai skaičius $n \geqslant 999 + 1$ nėra triženklis. Taigi arba $D = 3$ ir $334 \leqslant n \leqslant 360$, arba $D = 6$ ir $667 \leqslant n \leqslant 693$. Pirmuoju atveju $A = 3$, o skaičius

$$333 = \overline{3BC} - (3 + B + C) = \overline{3B0} - (3 + B)$$

baigiasi skaitmeniu 3, todėl $B = 4$. Antruoju atveju analogiškai skaičius $\overline{6B0} - (6+B)$ baigiasi skaitmeniu 6, todėl $B = 8$.

Visi 20 likusių skaičių $\overline{34C}$ ir $\overline{68C}$, kur $C = 0, 1, 2, \ldots, 9$, tinka:

$$\overline{34C} - (3 + 4 + C) = 340 - 7 = 333, \qquad \overline{68C} - (6 + 8 + C) = 680 - 14 = 666.$$

Vadinasi, yra 20 tinkamų n reikšmių.

26. (E) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

? Nagrinėkime bet kokį natūralųjį skaičių n ir skaičių

$$N = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Pasinaudosime tokiu pastebėjimu: jei turime k iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, tai lygiai vienas iš jų dalijasi iš k. Kadangi vienas iš skaičių n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ dalijasi iš 5, tai ir N dalijasi iš 5. Vienas iš skaičių n, $n+1$, $n+2$ dalijasi iš 3, todėl N dalijasi iš 3. Samprotaudami apie dalumą iš 2 ir iš 4, būkime kiek atsargesni. Porose $(n, n+1)$ ir $(n+2, n+3)$ yra po vieną skaičių, dalų iš 2. Vienas iš jų dalijasi ir iš 4, nes toks skaičius turi būti ketverte $(n, n+1, n+2, n+3)$. Todėl N dalijasi iš $2 \cdot 4 = 8$.

Skaičius N dalijasi iš 3, 5 ir 8. Bet kurie du iš šių trijų daliklių yra tarpusavyje pirminiai, todėl N dalijasi iš $3 \cdot 5 \cdot 8 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, o

$$N^3 = n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$$

dalijasi iš $d = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ kiekvienam natūraliajam n. Vadinasi, visos galimos N^3 reikšmės turi bendrą daliklį d. Jis sutampa su atsakymu **E** – didžiausiu iš duotųjų, todėl tai ir turėtų būti ieškomas didžiausias bendrasis daliklis.

Renkamės atsakymą **E**.

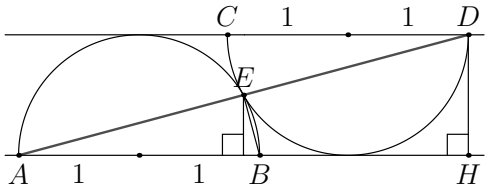
! Kad **?** dalies sprendimas būtų pilnas, liko įsitikinti, kad reiškinio

$$N^3 = n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$$

reikšmių bendras daliklis $d = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ yra didžiausias. Iš tiesų, didesnio bendro daliklio negali būti, nes viena iš N^3 reikšmių lygi d (kai $n = 1$) ir neturi didesnio daliklio nei šis skaičius.

27. (B) $8+4\sqrt{3}$

? Pusapskritimių skersmenų ilgiai lygūs 2, todėl spindulių ilgiai lygūs 1. Pusapskritimių lietimosi tašką pažymėkime E. Iš D į tiesę AB nuleiskime statmenį DH (žr. pav.). Pažymėkime $AD = 2x$.



Galima nuspėti pusapskritimių simetriją taško E atžvilgiu, o kartu tai, kad E yra atkarpoje AD per vidurį tarp A ir D bei per vidurį tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD. Taigi $AE = AD : 2 = x$, o atstumas h nuo E iki tiesės AB lygus pusei atstumo tarp tiesių AB ir CD – pusei pusapskritimio spindulio ilgio 1. Tada trikampio ABE plotas S lygus $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Kita vertus, kadangi $\angle AEB = 90^\circ$ (įbrėžtinis kampas remiasi į skersmenį AB), tai

$$\frac{1}{2} = S = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot x \cdot BE, \qquad BE = \frac{1}{x}.$$

Lygybę $BE = \frac{1}{x}$ galima gauti ir pasirėmus trikampių ADH bei ABE panašumu (statieji trikampiai turi bendrą smailųjį kampą): $AD : DH = AB : BE$, taigi $2x : 1 = 2 : BE$.

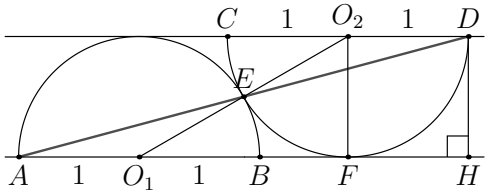
Pritaikykime Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui ABE:

$$4 = AB^2 = AE^2 + BE^2 = x^2 + x^{-2} = y + y^{-1}, \text{ kur } y = x^2;$$

$$y - 4 + y^{-1} = 0, \qquad y^2 - 4y + 1 = 0, \qquad y = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Vadinasi, $AD^2 = 4x^2 = 4y = 8 \pm 4\sqrt{3}$. Atsakymo $8 - 4\sqrt{3}$ tarp pateiktųjų nėra, tad renkamės atsakymą **B)** $8 + 4\sqrt{3}$.

! Pusapskritimių skersmenų ilgiai lygūs 2, todėl spindulių ilgiai lygūs 1. Atkarpų AB ir CD vidurio taškus (pusapskritimių centrus) pažymėkime atitinkamai O_1 ir O_2. Pusapskritimių lietimosi tašką ir vieno iš pusapskritimių lietimosi su tiese AB tašką pažymėkime atitinkamai E ir F. Iš D į tiesę AB nuleiskime statmenį DH:



Pusapskritimių spinduliai O_1E ir O_2E abu yra statmeni pusapskritimių bendrai liestinei taške E, todėl taškai O_1, E, O_2 yra vienoje tiesėje. Taigi $O_1O_2 = O_1E + O_2E = 1 + 1 = 2$. Pusapskritimio spindulys O_2F statmenas šio pusapskritimio liestinei AB, todėl atstumas tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD lygus $O_2F = 1$. Atkarpos DH ir O_2F yra statmenos tiesei AB, taigi ir tiesei CD. Tada keturkampis O_2DHF yra stačiakampis, $DH = O_2F = 1$ ir $FH = O_2D = 1$.

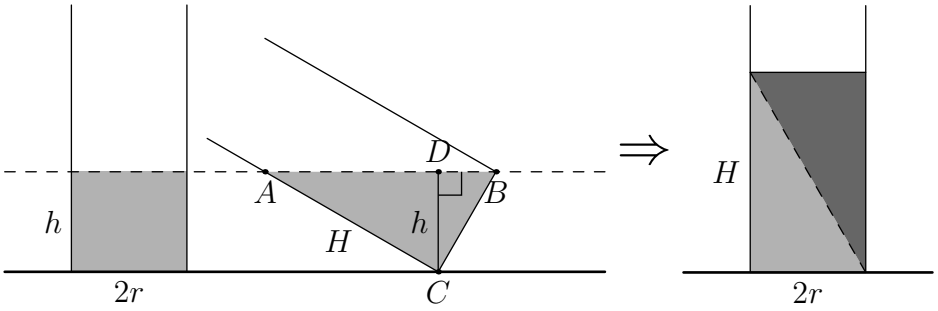
Pritaikykime Pitagoro teoremą statiesiems trikampiams O_1O_2F ir ADH:

$$O_1F^2 = O_1O_2^2 - O_2F^2 = 2^2 - 1^2 = 3, \qquad O_1F = \sqrt{3},$$

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 = (AO_1 + O_1F + FH)^2 + 1^2 = (1 + \sqrt{3} + 1)^2 + 1 = 8 + 4\sqrt{3}.$$

28. (D) 9π m^3

! Paveikslėlyje horizontali punktyrinė linija žymi horizontalią plokštumą p, kertančią du ritinius (vandens talpyklas). Žiūrint iš šono, vandens talpyklose vaizdai yra stačiakampis ir statusis trikampis ABC. Jų matmenis metrais pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Čia h yra atstumas tarp p ir paviršiaus, ant kurio stovi talkpyklos; r yra kiekvienos talpyklos pagrindo spindulys, o $2r$ – skersmuo. Taigi pagrindo plotas 3π (m^2) lygus πr^2, ir $r = \sqrt{3}$.



Įsivaizduokime, jog dešinioji talpykla kartu su plokštuma p pakreipiamos taip, kad talpykla stovėtų stačiai. Jei vandens talpykloje būtų įpilta iki aukščio H, tai dėl simetrijos plokštuma p dalytų vandens stulpelį (ritinį) į dvi vienodas dalis (žr. pav.). Vadinasi, tokiu atveju vandens talpykloje būtų dvigubai daugiau, nei yra įpilta dabar. Talpyklose įpilta po tiek pat vandens, todėl ritinio, kurio aukštinės ilgis yra H m, tūris yra dvigubai didesnis nei ritinio su tokiu pačiu pagrindu, bet aukštinės ilgiu h m:

$$H \cdot 3\pi = 2h \cdot 3\pi, \qquad H = 2h.$$

Stačiajame trikampyje ACD turime $AC = 2CD$, todėl $\angle CAD = 30°$, o stačiajame trikampyje ABC turime $AB = 2BC$. Vadinasi,

$$\begin{aligned} AB = 2BC = 4r \text{ (m)}, &\qquad AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (Pitagoro teorema)}, \\ (4r)^2 = H^2 + (2r)^2, &\qquad (2h)^2 = H^2 = (4r)^2 - (2r)^2 = 12r^2 = 36, \\ 2h = \sqrt{36} = 6, &\qquad h = 3. \end{aligned}$$

Šią h reikšmę galima gauti ir kitaip:

$$2h = H = AC = BC \cdot \operatorname{ctg} 30° = 2r \cdot \sqrt{3} = 6.$$

Į vieną talpyklą įpilto vandens tūris lygus $h \cdot 3\pi = 9\pi$ (m^3).

29. (A) 6^4

? Tarkime, kad turime kelių sveikųjų skaičių sumą. Jei prie bet kurio dėmens pridėsime arba atimsime skaičiaus 3 kartotinį, tai per skaičiaus 3 kartotinį pakeisime ir visą sumą, taigi nepakeisime sumos dalybos iš 3 liekanos. Pavyzdžiui, dėmenį 4 tokioje sumoje galima būtų pakeisti skaičiumi 1 arba 7 – nuo to sumos dalybos iš 3 liekana nesikeistų.

Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose reikiamu būdu. Skaičiai 1, 4 ir 7 dalijasi iš 3 su ta pačia liekana 1 (skiriasi vienas nuo kito per skaičiaus 3 kartotinį). Todėl šiuos tris skaičius langeliuose bet kaip keisdami vietomis, vis tiek gausime tinkamus skaičių 1, 2, 3, ..., 9 surašymus – visos trijų gretimų skaičių sumos ir toliau dalijasi iš 3. Analogiškai galime keisti vietomis skaičius 2, 5, 8 bei skaičius 3, 6, 9. Vadinasi, tinkamai surašyti 9 skaičius langeliuose reiškia tinkamai suskirstyti 9 langelius į tris trejetus – po vieną trejetą skaičiams 1, 4, 7, skaičiams 2, 5, 8 ir skaičiams 3, 6, 9. Toliau kiekvienus tris skaičius jiems skirtuose trijuose langeliuose galima surikiuoti bet kokia tvarka.

Langelių tinkamų suskirstymų į tris trejetus skaičių pažymėkime a. Pasirinkus vieną tokį suskirstymą, kiekviename langelių trejete atitinkamus skaičius galima surikiuoti $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdais. Todėl skaičius 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose yra iš viso $a \cdot 6^3$ tinkamų būdų. Teisingas atsakymas dalijasi iš 3^3, tad galime atmesti atsakymus **C** ir **D**.

Uždavinio sąlygą tenkina skaičių 1, 2, 3, ..., 9 du surašymai langeliuose, kai skaičiai išrikiuojami didėjimo arba mažėjimo tvarka. Šie du surašymai atitinka du skirtingus langelių suskirstymus į tris trejetus: vienu atveju kairysis langelis skirtas skaičiams 1, 4, 7, o kitu – skaičiams 3, 6, 9. Todėl $a \geqslant 2$, ir netinka atsakymas **B**.

Liko atsakymai **A** ir **E**. Pastarasis būtų teisingas tik tuo atveju, jei visi įmanomi skaičių 1, 2, 3, ..., 9 surašymai langeliuose būtų tinkami. Tačiau uždavinio sąlygos netenkina, pavyzdžiui, joks surašymas, kai pirmieji trys iš kairės skaičiai yra 1, 2, 4.

Renkamės atsakymą **A**.

! Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 tam tikra tvarka įrašyti langeliuose:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9

Skaičių a_1, a_2, a_3, ..., a_9 dalybos iš 3 liekanas atitinkamai pažymėkime r_1, r_2, r_3, ..., r_9. Kiekviena iš šių liekanų lygi 0, 1 arba 2. Trys liekanos lygios 1 (skaičiai 1, 4, 7), trys lygios 2 (skaičiai 2, 5, 8), o likusios trys lygios 0 (skaičiai 3, 6, 9).

Suma $a_1+a_2+a_3$ skiriasi nuo sumos $r_1+r_2+r_3$ per skaičiaus 3 kartotinį. Todėl $a_1+a_2+a_3$ dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai $r_1+r_2+r_3$ dalijasi iš 3. Savo ruožtu $r_1+r_2+r_3$ dalijasi iš 3 dviem atvejais: kai r_1, r_2, r_3 yra tam tikra tvarka surikiuoti skaičiai 0, 1, 2 ir kai $r_1 = r_2 = r_3$. T. y. jei skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose reikiamu būdu, tai arba r_1, r_2, r_3 yra trys skirtingi skaičiai, arba trys vienodi skaičiai. Šis pastebėjimas analogiškai galioja skaičių trejetams (r_2, r_3, r_4), (r_3, r_4, r_5) ir t. t.

Tarkime, kad skaičiai 1, 2, 3, ..., 9 įrašyti langeliuose reikiamu būdu. Jei $r_1 = r_2 = r_3$, tai r_2, r_3, r_4 negali būti trys skirtingi skaičiai. Tada $r_2 = r_3 = r_4 (= r_1)$. Tačiau visos liekanos r_1, r_2, r_3, r_4 negali būti lygios, nes tarp jų yra daugiausiai po tris lygias 0, 1 ir 2. Vadinasi, r_1, r_2, r_3 yra tam tikra tvarka surikiuoti skaičiai 0, 1, 2. Kadangi $r_2 \neq r_3$, tai r_2, r_3, r_4 taip pat turi būti trys skirtingi skaičiai 0, 1, 2. Tada $r_4 = r_1$. Analogiškai $r_5 = r_2$, $r_6 = r_3$ ir t. t. Tai reiškia, kad seka r_1, r_2, r_3, ..., r_9 gaunama, tam tikra tvarka užrašius skaičius 0, 1, 2, o tada šį sekos fragmentą pakartojus dar dusyk.

Taigi kiekvienas tinkamas skaičių 1, 2, 3, ..., 9 surašymas langeliuose gaunamas taip:

1) pirmieji trys (iš kairės) langeliai užpildomi vienu iš 6 būdų

0	1	2
1	2	0

0	2	1
2	0	1

1	0	2
2	1	0

,

o tolimesniuose dviejuose langelių trejetuose pakartojama ta pati trijų skaičių seka;

2) trys įrašytieji vienetai bet kuria tvarka pakeičiami skaičiais 1, 4, 7, dvejetai – skaičiais 2, 5, 8, o nuliai – skaičiais 3, 6, 9.

Kiekvienas taip gautas skaičių surašymas langeliuose tinka: liekanų sekoje bet kurių trijų gretimų liekanų suma $r_i + r_{i+1} + r_{i+2}$ dalijasi iš 3, todėl iš 3 dalijasi ir kiekviena suma $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$. Be to, visi taip gaunami surašymai skirtingi: 1-uoju veiksmu pasirenkama viena iš $a = 6$ galimybių, kuriuose langelių trejetuose atsidurs skaičiai 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9; o 2-uoju veiksmu kiekvienas iš trijų skaičių trejetų laisvai išrikiuojamas jam skirtuose langeliuose (po $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ galimybes). Iš viso gauname $6 \cdot 6^3 = 6^4$ būdų tinkamai surašyti skaičius 9 langeliuose.

30. C 3

! Pažymėkime $n = \overline{ABBCDDCDDABB}$. Nei paties skaičiaus n, nei šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių m, $m+1$, …, $m+5$, kurių sandauga lygi n, nustatyti nebūtina.

Vienas iš penkių skaičių m, $m+1$, …, $m+4$ dalijasi iš 5, todėl $n = m\cdot(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+5)$ dalijasi iš 5. Vienas iš skaičių m ir $m+1$ yra lyginis, todėl n dalijasi ir iš 2. Kadangi n dalijasi iš 2 ir iš 5, tai dalijasi iš 10 ir baigiasi skaitmeniu $B = 0$.

Kadangi $B = 0$ yra vienas iš keturių iš eilės einančių sveikųjų (neneigiamų) skaičių, tai šie skaičiai yra 0, 1, 2, 3, t. y. skaitmenys A, C, D yra tam tikra tvarka surašyti skaitmenys 1, 2, 3.

Vienas iš trijų skaičių m, $m+1$, $m+2$ dalijasi iš 3, todėl n dalijasi iš 3. Tada ir skaičiaus n skaitmenų suma dalijasi iš 3. Ji lygi

$$\begin{aligned}2A+4B+2C+4D &= 2A+2C+4D = \\ &= 2(A+C+D)+2D = 2(1+2+3)+2D = 12+2D.\end{aligned}$$

Skaičius $12+2D = 3\cdot 4+2D$ dalijasi iš 3, todėl iš 3 dalijasi ir skaičius $2D$. Kadangi $D = 1$, 2 arba 3, tai $D = 3$.

Nors D reikšmę jau nustatėme, raskime ir patį skaičių n. Tarp keturių skaičių m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ du yra lyginiai, o vienas iš jų dalijasi ne tik iš 2, bet ir iš 4. Todėl n dalijasi iš $2\cdot 4$, o $n : (4\cdot 25) = \overline{\ldots A}$ dalijasi iš 2. Taigi skaitmuo A yra lyginis ir turi būti lygus 2. Tada $C = 1$ ir

$$n = 200\,133\,133\,200 = 74\cdot 75\cdot 76\cdot 77\cdot 78\cdot 79.$$

Ekspertas

Nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	A
4	B
5	B
6	B
7	D
8	E
9	C
10	C
11	D
12	C
13	B
14	A
15	E
16	C
17	E
18	C
19	E
20	C
21	A
22	A
23	C
24	A
25	B
26	E
27	B
28	D
29	A
30	B