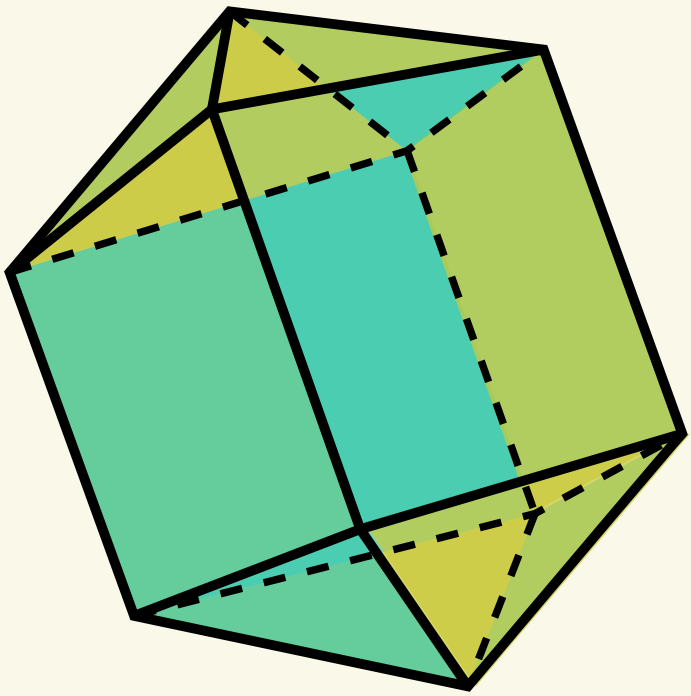
Tarptautinis matematikos konkursas

KENGŪRA

Junioras

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



2024

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VILNIAUS UNIVERSITETAS
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

KENGŪRA 2024. Junioras

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Maketavo
Ugnė Gudžinskaitė

© Aivaras Novikas, 2025
© *Kengūros* konkurso organizavimo komitetas, 2025

Turinys

Pratarmė **4**

Sąlygos **6**

Užduočių sprendimai **10**

Atsakymai **24**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra tik kelios dešimtys (tiesa, labai nekasdieniškų) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „Jie neturi ką veikti, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi ką veikti šitokioje pramogų gadynėje.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia nors ir įveikiami, bet labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali užsikabinti pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 30300 Lietuvos 1–12 klasių mokinių, dalyvavusių konkurse 2024 metais.

Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

Keliasdešimt lemtingų darbo minučių kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos teigdamos, kad galvą laužyti prasminga, kad ir matematikos užduotis sprendžiant galima patirti žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik dalyvių atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto rinktis labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip milijonai sprendėjų perpranta, kokia šmaikšti gali būti užduotis, kaip iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali sukristi jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pra-

dininkai. Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Nuo 2016 m. rugsėjo lietuviškoji *Kengūra* glaudžiasi po Lietuvos matematikų draugijos sparnu. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek matematiniuose, tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei niekada nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2024 metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintys pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Organizatoriai

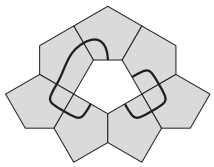
2024 m. *Junioro* užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kokia yra reiškinio $\dfrac{2 \cdot 0{,}24}{20 \cdot 2{,}4}$ reikšmė?

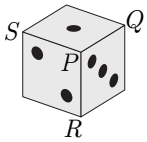
A) 0,01 **B)** 0,1 **C)** 1 **D)** 10 **E)** 100

2. Elzė sudarė figūrą iš 8 vienodų detalių ir ant jos neatitraukdama pieštuko nubrėžė uždarą liniją, kuri kerta pati save. Elzė pašalino vidurinę detalę, kaip parodyta paveikslėlyje dešinėje. Kaip atrodo pašalintoji detalė?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

3. Paveikslėlyje pavaizduotas lošimo kauliukas, kurio kiekvienose dviejose priešingose sienelėse yra lygiai 7 akutės. Pasirinkus tris sieneles, turinčias bendrą viršūnę, jai priskiriamas tų trijų sienelių bendras akučių skaičius. Pavyzdžiui, viršūnės P skaičius yra $1+2+3 = 6$. Linas apskaičiavo viršūnių Q, R ir S skaičius. Didžiausias iš jų yra

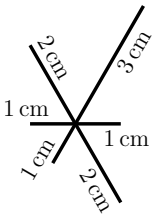


A) 7 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 15

4. Milda ant žemės viena eile nubrėžė 48 langelius ir šokinėja iš vieno langelio į kitą. Į pirmąjį langelį ji įšoka kaire koja, į antrąjį – abiem, į trečiąjį – dešine, į ketvirtąjį – abiem, o toliau šiuos šuolius vis kartoja: į penktąjį langelį vėl įšoka kaire koja, į šeštąjį – vėl abiem, ir t. t. (žr. pav.). Keliuose langeliuose Milda paliečia žemę kaire koja?

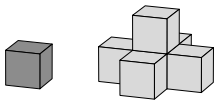
A) 12 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

5. Neatitraukdamas pieštuko nuo popieriaus lapo, Tomas nubrėžė figūrą, kurią sudaro šešios atkarpos. Paveikslėlyje parodyta ši figūra ir visų atkarpų ilgiai. Kokį trumpiausią kelią galėjo popieriumi nueiti pieštukas, Tomui brėžiant figūrą?



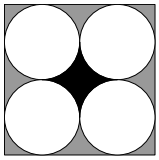
A) 14 cm **B)** 15 cm **C)** 16 cm **D)** 17 cm **E)** 18 cm

6. Ignas ant stalo padėjo kubą, o tada apdėjo jį dar penkiais kubais, pilnai uždengdamas visas penkias matomas pradinio kubo sienas (žr. pav.). Kiek mažiausiai kubų Ignui prireiks, kad jais apdėtų gautąją figūrą ir pilnai uždengtų visą jos matomą paviršių?



A) 9 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 17 **E)** 21

7. Keturi apskritimai liečia kvadrato kraštines ir vienas kitą, kaip parodyta paveikslėlyje. Koks yra kvadrato juodosios srities ploto ir pilkosios srities ploto santykis?



A) $1:4$ **B)** $3:4$ **C)** $\pi:1$ **D)** $2:3$ **E)** $1:3$

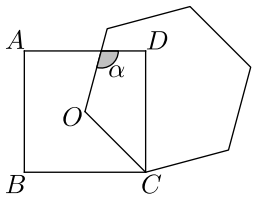
8. Natūralusis triženklis skaičius prasideda ir baigiasi tuo pačiu skaitmeniu bei dalijasi iš 6. Didžiausio tokio skaičiaus skaitmenų suma yra
A) 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

9. Ant stalo dugnu aukštyn stovi 6 stiklinės. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurias 4 stiklines ir jas apversti. Per kiek mažiausiai ėjimų galima pasiekti, kad visos 6 stiklinės stovėtų dugnu žemyn?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10. Sklypas, aptvertas 40 m ilgio tvora, yra stačiakampio formos. Šio stačiakampio kraštinių ilgiai metrais yra pirminiai skaičiai. Koks yra didžiausias galimas sklypo plotas?
A) 51 m^2 **B)** 65 m^2 **C)** 75 m^2 **D)** 91 m^2 **E)** 99 m^2

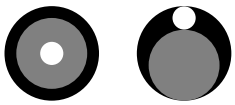
Klausimai po 4 taškus

11. Kvadratas $ABCD$ su centru O ir taisyklingasis šešiakampis, turintis kraštinę OC, kertasi, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada $\alpha =$
A) 105° **B)** 110° **C)** 115° **D)** 120° **E)** 125°

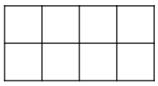


12. Jei lentoje užrašytas skaičius n, tai leidžiama jį nutrinti bei užrašyti vieną iš skaičių $6n$ ir $10n$. Kurio skaičiaus neįmanoma gauti tokiu būdu, pradžioje turint užrašytą skaičių 1?
A) $2^{100} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ **B)** $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ **C)** $2^{110} \cdot 3^{80} \cdot 5^{30}$ **D)** $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{70}$ **E)** $2^{50} \cdot 5^{50}$

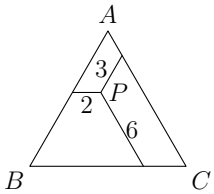
13. Rokas tris popierinius skritulius pradžioje sudėjo, kad sutaptų skritulių centrai, o vėliau – kad bet kurie du skritulius ribojantys apskritimai liestųsi (žr. pav.). Pirmosios gautos figūros juodosios srities plotas yra 7 kartus didesnis nei baltosios srities plotas. Koks yra dviejų gautųjų figūrų juodųjų sričių plotų santykis?
A) 3 : 1 **B)** 4 : 3 **C)** 6 : 5 **D)** 7 : 6 **E)** 9 : 7



14. Elena turi kiekviename 2×4 lentelės langelyje įrašyti po vieną raidę (žr. pav.). Kiekvienoje iš dviejų eilučių ir kiekviename iš trijų 2×2 kvadratų turi būti po keturias skirtingas raides A, B, C ir D. Keliais būdais Elena gali užpildyti lentelę?
A) 12 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 96 **E)** 198

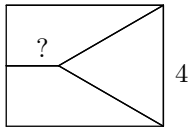


15. Lygiakraščio trikampio ABC viduje pažymėtas taškas P, o iš jo į trikampio kraštines išvestos trys atkarpos. Kiekviena iš trijų atkarpų yra lygiagreti su viena iš trikampio kraštinių, kaip parodyta paveikslėlyje. Jame nurodyti ir šių atkarpų ilgiai. Koks yra trikampio ABC perimetras?
A) 22 **B)** 26 **C)** 33 **D)** 39 **E)** 44



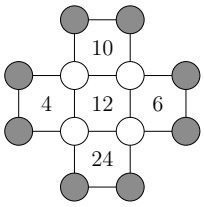
16. Janinos duktė šiandien pagimdė mergaitę. Janinos ir jos dukters amžiai (metais) yra lyginiai skaičiai. Po dvejų metų Janinos, jos dukters ir anūkės amžių (metais) sandauga bus lygi 2024. Kiek metų šiandien yra Janinai?
A) 42 **B)** 44 **C)** 46 **D)** 48 **E)** 50

17. Stačiakampį sudaro trys lygiaplotės dalys: dvi lygios trapecijos ir lygiakraštis trikampis, kurio kraštinės ilgis yra 4 (žr. pav.). Koks yra klaustuku pažymėtos atkarpos ilgis?



A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $6-2\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{3}$ **E)** Kitas atsakymas

18. Kiekviename iš 12 pavaizduotųjų skritulių įrašyta po natūralųjį skaičių. Kiekvienas skaičius, įrašytas kvadrato viduje, lygus keturių skaičių to kvadrato viršūnėse sandaugai. Kokia yra 8 skaičių pilkuosiuose skrituliuose sandauga?



A) 20 **B)** 40 **C)** 80 **D)** 120
E) Sandauga gali įgyti daugiau nei vieną reikšmę

19. Kęstutis pasirinko 8 iš 12 skaičių 1, 2, …, 12 ir juos tam tikra tvarka surašė ratu. Kiekvienų dviejų gretimų to rato skaičių suma dalijasi iš 3. Kurių keturių iš 12 skaičių Kęstutis nepasirinko?
A) 1, 5, 9, 12 **B)** 3, 5, 7, 9 **C)** 1, 2, 11, 12 **D)** 5, 6, 7, 8 **E)** 3, 6, 9, 12

20. Nojus laiko saldainius keturiose striukės kišenėse. Jis užrašė, po kiek saldainių yra kiekvienoje kišenėje. Jo sesuo Lėja užrašė, keliose kišenėse yra lygiai vienas saldainis, keliose lygiai du, keliose lygiai trys, o keliose – nė vieno saldainio. Lėja užrašė tuos pačius keturis skaičius kaip ir Nojus. Kiek iš viso saldainių yra striukės kišenėse?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Klausimai po 5 taškus

21. Ernestas nudažė medinį kubą žaliai ir supjaustė jį į n^3 vienodų kubelių (čia $n > 2$). Taip jis gavo po tiek pat kubelių, turinčių lygiai vieną žalią sienelę, ir kubelių, neturinčių nė vienos žalios sienelės. Kokia yra skaičiaus n reikšmė?
A) 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** Kitas atsakymas

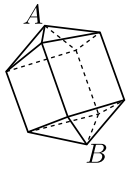
22. Mikė Melagėlis nusprendė visą laiką meluoti tik kas antrą dieną, o likusiomis dienomis sakyti tik tiesą. Vieną dieną Mikė pasakė lygiai keturis iš penkių teiginių **A**–**E**. Kurio teiginio jis nepasakė?
A) „Skaičius 2024 dalijasi iš 11.“ **B)** „Ir vakar melavau, ir rytoj meluosiu.“
C) „Šiandien ir rytoj kalbu tik tiesą.“ **D)** „Vakar buvo trečiadienis.“
E) „Rytoj bus šeštadienis.“

23. Skaičius n yra natūralusis. Skaičius $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ yra užrašytas kaip pirminių skaičių sandauga, dauginamuosius rašant didėjimo tvarka:

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 43 \cdot 47.$$

Kiek šioje sandaugoje yra dauginamųjų, lygių 17?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24. Įterpus kubą tarp dviejų taisyklingųjų keturkampių piramidžių, gautas erdvinis kūnas, turintis 12 sienų (žr. pav.). Jo 8 sienos yra lygiakraščiai trikampiai, o kiekvienos briaunos ilgis lygus 1. Koks yra atstumas tarp šio kūno viršūnių A ir B?



A) $1+\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $\frac{5}{2}$ **D)** $\sqrt{5}$ **E)** $1+\sqrt{2}$

25. Natūralųjį skaičių N padidinus 1, jo skaitmenų suma sumažėjo 3 kartus. Kokia yra mažiausia galima skaičiaus N skaitmenų suma?
A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 27

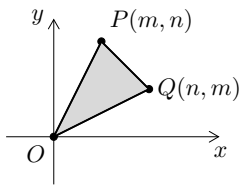
26. Sofija turi sudėti $3\times3\times3$ kubą iš 27 vienodų kubelių. Kiekvieną kubelį ji turi nudažyti viena iš trijų spalvų: geltonai, žaliai arba raudonai. Sudėjus kubą, lygiai trečdalis jo paviršiaus turi būti geltonas, lygiai trečdalis – žalias ir lygiai trečdalis – raudonas. Sofija nustatė, kad geltonai jai reikia nudažyti mažiausiai m kubelių, o daugiausiai M kubelių. Kam lygus skirtumas $M-m$?
A) 1 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 9 **E)** Kitas atsakymas

27. Lukas pažymėjo 20 apskritimo taškų, kad atstumai tarp gretimų taškų būtų lygūs. Kiekvieną pažymėtųjų taškų porą jis sujungė atkarpa. Kiek atkarpų, ilgesnių nei apskritimo spindulys, bet trumpesnių nei jo skersmuo, nubrėžė Lukas?
A) 90 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 140 **E)** 160

28. Ona pasivaikščiojo parke. Pusę parke praleisto laiko ji ėjo 2 km/h greičiu. Pusę parke nueito atstumo ji ėjo 3 km/h greičiu. Likusį laiką Ona ėjo 4 km/h greičiu. Kurią pasivaikščiojimo laiko dalį Ona ėjo 4 km/h greičiu?
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{14}$ **E)** Kitas atsakymas

29. Plokštumoje pasirinktos n skirtingų tiesių t_1, t_2, …, t_n ir pažymėtos visos jų sankirtos. Jokios trys tiesės nesikerta viename taške. Tiesėje t_1 yra lygiai 5 sankirtos, tiesėje t_2 – lygiai 9, o tiesėje t_3 – lygiai 11. Kokios yra galimos skaičiaus n reikšmės?
A) Tik 14 **B)** 13 ir 14 **C)** Tik 13 **D)** 12 ir 13 **E)** Tik 12

30. Koordinačių plokštumoje duoti taškai $P=(m,n)$, $Q=(n,m)$, $O=(0,0)$, kur skaičiai m ir $n>m$ yra natūralieji (žr. pav.). Trikampio OPQ plotas lygus 54. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti suma $m+n$?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Kitas atsakymas

Junioro užduočių sprendimai

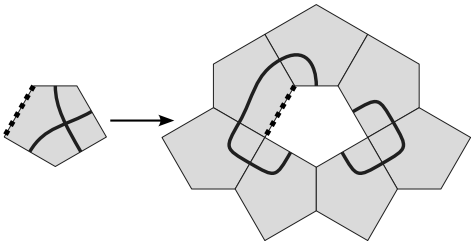
1. (A) 0,01

! Patogu skaičius 2 ir 0,24 atitinkamai padalyti iš 20 ir iš 2,4, o gautuosius dalmenis sudauginti:

$$\frac{2 \cdot 0{,}24}{20 \cdot 2{,}4} = \frac{2}{20} \cdot \frac{0{,}24}{2{,}4} = \frac{2}{2 \cdot 10} \cdot \frac{0{,}24}{0{,}24 \cdot 10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

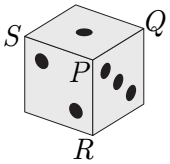
2. (C)

! Svarbu atkreipti dėmesį į detalių formą ir pastebėti, kad penkiakampio viena kraštinė yra trumpesnė už likusias keturias arba kad jo lygiai du kampai akivaizdžiai mažesni už likusius tris. Paaiškėja, kad norint atsakymuose parodytas detales įterpti pašalintos detalės vietoje, jas būtina pasukti 180° kampu – penkiakampio trumpąja kraštine aukštyn. Įsivaizdavus taip pasuktas detales **A**–**E**, lengva pasirinkti atsakymą **C** pagal tai, kurios kraštinės nekerta Elzės nubrėžta linija:



3. (D) 11

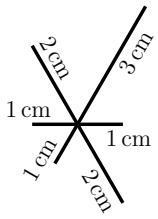
! Matome tris kauliuko sieneles. Kiekvienas iš Lino gautųjų skaičių yra akučių skaičių dviejose matomose sienelėse ir vienoje nematomoje sienelėje suma. Matomose sienelėse du didžiausi akučių skaičiai yra 2 ir 3, o nematomose sienelėse didžiausias akučių skaičius yra 6 (sienelė, priešinga sienelei su viena akute). Taigi viršūnės R skaičius $2 + 3 + 6 = 11$ ir yra didžiausias iš trijų Lino skaičių. (Viršūnių Q ir S skaičiai atitinkamai yra $1 + 3 + 5 = 9$ ir $1 + 2 + 4 = 7$.)



4. (D) 36

! Visus 48 langelius suskirstykime į iš eilės einančių langelių ketvertus. Kiekviename iš $48 : 4 = 12$ ketvertų yra vienas langelis (trečiasis), į kurį Milda įšoka tik dešine koja, ir trys langeliai, į kuriuos Milda įšoka kaire koja (galbūt ir dešine). Vadinasi, Milda paliečia žemę kaire koja tris iš keturių kartų, o kol baigs žaidimą, žemę palies iš viso $3 \cdot 12 = 36$ kartus.

5. (B) 15 cm



? Galima nuspėti, kad pieštuko kelias būtų trumpiausias, jei jis brėžtų atkarpas, keliaudamas tiesiomis linijomis tarp taškų tokia tvarka:

$$A_1 \to O \to A_2 \to O \to A_3 \to O \to A_4 \to O \to A_5 \to O \to A_6.$$

Čia O yra bendras visų šešių atkarpų galas, o taškai A_1, A_2, …, A_6 – tam tikra tvarka pasirinkti antrieji atkarpų galai. Tada pieštuko kelias s lygus

$$OA_1 + 2OA_2 + 2OA_3 + 2OA_4 + 2OA_5 + OA_6,$$

kur šešių atkarpų ilgiai OA_1, OA_2, …, OA_6 tam tikra (kol kas bet kokia) tvarka yra 1, 1, 1, 2, 2 ir 3 centimetrai. Kad gautume kuo mažesnę s reikšmę, natūralu imti kuo trumpesnes atkarpas, kurių ilgiai skaičiuojant s dauginami iš 2, taigi kuo ilgesnes likusias dvi atkarpas OA_1 ir OA_6:

$$OA_1 = 3 \text{ cm}, \quad OA_6 = 2 \text{ cm}, \quad s = 3 + 2 \cdot (1 + 1 + 1 + 2) + 2 = 15 \text{ (cm)}.$$

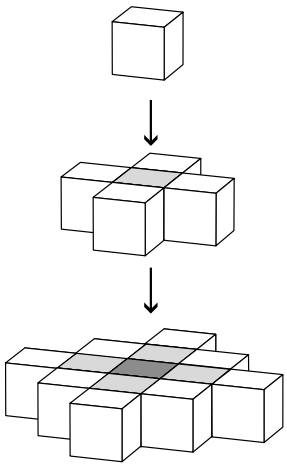
Renkamės atsakymą **B**.

! Pieštukas turėjo nueiti bent jau viengubą kiekvienos atkarpos ilgį, kad jas nubrėžtų. Nagrinėkime bet kurią iš šešių atkarpų, kuri nėra nei pirmoji, kurią Tomas pradėjo brėžti, nei paskutinė, kurią Tomas baigė brėžti. Kad ją pilnai nubrėžtų, pieštukas turėjo kada nors iš visų atkarpų bendro galo O pasiekti kitą tos atkarpos galą bei grįžti atgal į tašką O, taigi turėjo nueiti mažiausiai dvigubą atkarpos ilgį. Taip turėjo nutikti, brėžiant mažiausiai keturias atkarpas. Tokių keturių atkarpų ilgius centimetrais pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4, o likusių dviejų atkarpų ilgius centimetrais pažymėkime x_5 ir x_6. Tada pieštuko nueitas kelias centimetrais yra ne trumpesnis nei

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_6) - x_5 - x_6 \geqslant \\ &\geqslant 2(1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3) - 3 - 2 = 15. \end{aligned}$$

Kita vertus, pieštuko kelias gali būti lygus 15 cm: pieštukas nubrėžia 3 cm atkarpą, eidamas į tašką O iš kito jos galo, tada iš eilės nueina keturiomis atkarpomis, kurių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2 centimetrai, brėždamas kiekvieną atkarpą iš O ir grįždamas ja atgal, bei pabaigoje nubrėžia 2 cm atkarpą iš taško O.

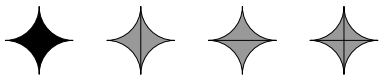
6. (C) 13



! Igno gautoje dviaukštėje figūroje prie kiekvienos neuždengtos kubo sienos reikia priglausti dar po vieną kubą. Apatiniame aukšte šonines sienas uždengia 8 kubai (keturi iš jų uždengia po dvi sienas), viršutiniame aukšte pakanka keturių kubų, ir reikia dar vieno kubo, dėl kurio figūra tampa triaukštė (žr. pav.). Vadinasi, Ignui iš viso prireiks $8 + 4 + 1 = 13$ kubų.

7. (E) 1 : 3

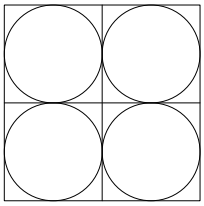
? Kvadrato pilkąją sritį sudaro 8 dalys: keturios mažesnės (ties kvadrato kampais) ir keturios didesnės. Galima įžvelgti, kad iš šių 8 dalių sudaromos trys figūros, lygios juodajai sričiai:



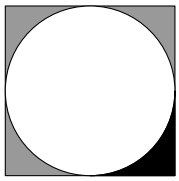
Todėl kvadrato pilkosios srities plotas yra tris kartus didesnis nei juodosios.

Renkamės atsakymą **E**.

! Kvadratą galima dviem atkarpomis padalyti į keturis mažesnius lygius kvadratus. Situacija, parodyta uždavinio paveikslėlyje, gaunama, kiekviename iš mažesniųjų kvadratų įbrėžus po apskritimą: apskritimai liečia kiekvieno iš mažesniųjų kvadratų kraštines jų vidurio taškuose, tad šiuose taškuose liečia didžiojo kvadrato kraštines bei vienas kitą.



Nagrinėkime bet kurį iš mažesniųjų kvadratų (žr. pav.). Jį sudaro baltasis skritulys ir dar keturios dalys: trys pilkos ir viena juoda. Dėl simetrijos šios keturios dalys yra lygios, todėl ir lygiaplotės. Vadinasi, mažesniojo kvadrato pilkosios srities plotas yra tris kartus didesnis nei juodosios srities plotas. Kadangi taip yra kiekviename iš mažesniųjų kvadratų, tai taip yra ir didžiajame kvadrate, kurį sudaro mažesnieji: juodosios ir pilkosios sričių plotų santykis yra 1 : 3.



8. (E) 24

! Natūralusis skaičius dalijasi iš $6 = 2 \cdot 3$ tada ir tik tada, kai dalijasi iš 2 ir iš 3, taigi kai jo paskutinis skaitmuo lyginis, o skaitmenų suma dalijasi iš 3. Vadinasi, turime nustatyti tokį didžiausią skaičių $\overline{ABA}$, kuriam skaitmuo A lyginis, o suma $A + B + A$ dalijasi iš 3. Kadangi $A \neq 9$, tai netinka skaičiai nuo 900 iki 999. Toliau nagrinėkime galimybę $\overline{ABA} \in [800; 899]$. Ieškodami didžiausio tinkamo skaičiaus, mažėjimo tvarka tikrinkime reikšmes $\overline{ABA} = 898$, 888, 878, ... Tinka jau antroji iš jų – skaitmenų suma 24 dalijasi iš 3. Tai ir yra ieškoma didžiausio tinkamo skaičiaus (lygaus 888) skaitmenų suma.

9. (B) 3

! Po pirmojo ėjimo keturios stiklinės stovės dugnu žemyn, o likusios dvi – dugnu aukštyn. Prieš paskutinį ėjimą turi būti atvirkščiai – dvi stiklinės dugnu žemyn, keturios dugnu aukštyn (tada liks apversti tas keturias stiklines). Todėl antrasis ėjimas negali būti paskutinis. Tačiau antruoju ėjimu jau galima gauti šią atvirkščią situaciją. Toks antrasis ėjimas aptinkamas, perrenkant galimybes, kurių tėra trys: apverčiamos dvi dar neliestos stiklinės, viena iš jų arba nė vienos. Tinka antroji galimybė: viena stiklinė apverčiama dugnu žemyn ir trys dugnu aukštyn. Taigi trijų ėjimų pakanka:

$$\underline{\text{A A A A}}\ \text{A A} \Longrightarrow \text{Ž}\ \underline{\text{Ž Ž Ž}}\ \text{A A} \Longrightarrow \text{Ž}\ \underline{\text{A A A}}\ \text{Ž}\ \underline{\text{A}} \Longrightarrow \text{Ž Ž Ž Ž Ž Ž}$$

(Čia „A“ žymi stiklinę dugnu aukštyn, „Ž“ – stiklinę dugnu žemyn.)

10. (D) 91 m^2

? Stačiakampio kraštinių ilgius metrais pažymėkime p ir q. Jo plotas lygus pq m^2. Skaičius pq yra dviejų pirminių skaičių sandauga. Todėl netinka atsakymai **C)** $pq = 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$ ir **E)** $pq = 99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$. Didžiausias iš likusių atsakymų yra **D**. Jis tinka: $91 = pq$, kur $p = 7$ ir $q = 13$ yra pirminiai skaičiai, o stačiakampio su tokiomis kraštinėmis perimetras – tvoros ilgis metrais – lygus $7 + 13 + 7 + 13 = 40$.

Renkamės atsakymą **D**.

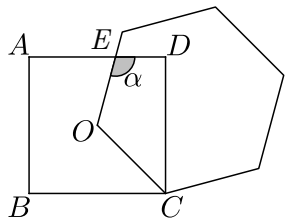
! Stačiakampio kraštinių ilgius metrais pažymėkime p ir q. Tada jo plotas lygus pq m^2, o perimetras lygus

$$40 = p + q + p + q = 2p + 2q \text{ (m)}.$$

Taigi $p + q = 20$. Galime tarti, kad $p \leqslant q$. Tada $p \leqslant 10$ ir $q = 20 - p$. Kadangi skaičius p pirminis, tai $p = 2, 3, 5$ arba 7. Atitinkamai $q = 18, 17, 15$ arba 13. Tinka pirminės reikšmės $q = 17$ ir 13. Taigi sklypo plotas gali būti lygus $3 \cdot 17 = 51$ (m^2) arba $7 \cdot 13 = 91$ (m^2). Jis didesnis antruoju atveju.

11. (A) 105°

! Kvadratas ir šešiakampis kertasi taške C ir dar viename taške, kurį pažymėkime E. Nagrinėkime keturkampį $OCDE$ bei jo kampus.



Šešiakampio kampų suma lygi $180° \cdot (6 - 2) = 180° \cdot 4$. Kadangi šešiakampis taisyklingasis, tai jo kiekvienas kampas lygus $180° \cdot 4 : 6 = 120°$. Taigi $\angle EOC = 120°$.

Kvadrato kampas CDE lygus $90°$. Taškas O yra kvadrato centras, tad dėl simetrijos $\angle OCD = \angle OCB = 90° : 2 = 45°$.

Keturkampio $OCDE$ (kaip ir kiekvieno keturkampio) kampų suma lygi $180° \cdot (4 - 2) = 360°$. Vadinasi,

$$360° = \angle EOC + \angle OCD + \angle CDE + \angle DEO = 120° + 45° + 90° + \alpha,$$
$$360° = \alpha + 255°, \qquad \alpha = 360° - 255° = 105°.$$

12. (B) $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$

? Kadangi lentoje užrašytas skaičius kaskart dauginamas iš $2 \cdot 3$ arba iš $2 \cdot 5$, tai pradėjus nuo skaičiaus 1 galima gauti tik dvejetų, trejetų ir penketų sandaugas. Šios sandaugos negali būti bet kokios. Kaskart sandaugoje atsiranda vienas papildomas dvejetas, o su juo – vienas papildomas trejetas arba penketas. Todėl sandaugoje trejetų ir penketų kartu paėmus turi būti tiek pat, kiek dvejetų. Tačiau skaičius **B)** $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ yra lygus 90 dvejetų ir net $20 + 80 = 100$ trejetų bei penketų sandaugai. Vadinasi, šio skaičiaus nurodytu būdu gauti neįmanoma.

Renkamės atsakymą **B**.

! Kad užbaigtume **?** dalies sprendimą, liko patikrinti, kad keturis skaičius **A**, **C**, **D** ir **E** įmanoma gauti nurodytu būdu.

Jei lentoje užrašytas skaičius iš 6 padauginamas m kartų, o iš 10 padauginamas n kartų, tai, pradėjus nuo 1, lentoje gaunamas skaičius

$$a = 6^m \cdot 10^n = (2^m \cdot 3^m) \cdot (2^n \cdot 5^n) = 2^{m+n} \cdot 3^m \cdot 5^n.$$

Keturis atsakymų skaičius gauname taip:

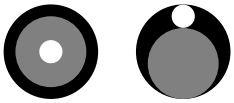
A) $m = 20$, $n = 80$, tada $a = 2^{100} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$;

C) $m = 80$, $n = 30$, tada $a = 2^{110} \cdot 3^{80} \cdot 5^{30}$;

D) $m = 20$, $n = 70$, tada $a = 2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{70}$;

E) $m = 0$, $n = 50$, tada $a = 2^{50} \cdot 5^{50}$.

13. **D** 7 : 6



! Juodojo, pilkojo ir baltojo skritulių plotus atitinkamai pažymėkime S_1, S_2 ir S_3. Jų išreikšti per atitinkamus spindulių ilgius nebūtina. Taip pat nebūtina per daug įdėmiai svarstyti skritulių tarpusavio padėties dviejose Roko gautose figūrose. Pirmojoje ir antrojoje figūrose juodosios srities plotas atitinkamai lygus $S_1 - S_2$ (juodojo skritulio dalis, kurios nedengia pilkasis skritulys) ir $S_1 - S_2 - S_3$ (juodajame skritulyje kiti du padėti be persidengimų). Pirmojoje figūroje baltosios srities plotas lygus S_3 (baltasis skritulys nedengiamas). Taigi

$$S_1 - S_2 = 7S_3, \qquad S_1 - S_2 - S_3 = 7S_3 - S_3 = 6S_3.$$

Vadinasi, ieškomas plotų santykis lygus

$$7S_3 : 6S_3 = 7 : 6.$$

!! Pirmojoje Roko gautoje figūroje juodoji sritis pagal plotą lygi 7 tokiems baltiesiems skrituliams, kokį panaudojo Rokas. Antrojoje figūroje pašalinus baltąjį skritulį, jos juodoji sritis padidės ir plotu taps lygi pirmosios figūros juodajai sričiai (juodojo ir pilkojo skritulių plotų skirtumas), taigi 7 baltiesiems skrituliams. Antrojoje figūroje vėl padėjus baltąjį skritulį, likusi juodoji sritis pagal plotą lygi jau tik $7 - 1 = 6$ baltiesiems skrituliams, o ne 7 kaip pirmojoje figūroje. Vadinasi, ieškomas plotų santykis lygus 7 : 6.

14. (B) 24

! Tarkime, kad lentelės kairysis 2×2 kvadratas jau užpildytas ir kad x_1, y_1, z_1, t_1 paveikslėlyje tam tikra tvarka žymi raides A, B, C, D. Mėginkime pasirinkti tinkamas x_2, y_2, z_2, t_2 reikšmes. Viduriniame 2×2 kvadrate turime $x_2 \neq y_1$, $x_2 \neq t_1$, o viršutinėje eilutėje – dar ir $x_2 \neq x_1$. Todėl x_2 turi sutapti su likusia iš keturių raidžių aibėje $\{x_1, y_1, z_1, t_1\} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, t. y. $x_2 = z_1$. Analogiškai $z_2 = x_1$. Viršutinėje eilutėje y_2 nesutampa su x_1, y_1 ir $x_2 = z_1$, todėl turi sutapti su t_1. Analogiškai $t_2 = y_1$.

x_1	y_1	x_2	y_2
z_1	t_1	z_2	t_2

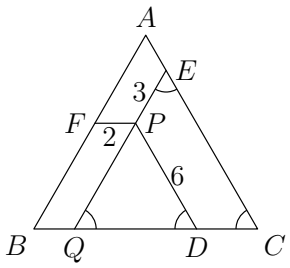
Vadinasi, taip pasirinkus x_1, y_1, z_1, t_1 reikšmes, kad $\{x_1, y_1, z_1, t_1\} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, lentelę įmanoma baigti pildyti vieninteliu būdu (žr. pav.). Analogišką rezultatą gautume, pradėję pildyti lentelę ne nuo kairiojo kvadrato, bet, pavyzdžiui, nuo viršutinės eilutės. Lengva patikrinti, kad kiekviena tokia lentelė tenkina uždavinio sąlygą: eilutėse ir 2×2 kvadratuose yra po keturis skirtingus simbolius x_1, y_1, z_1, t_1, kurie tam tikra tvarka žymi raides A, B, C, D.

x_1	y_1	z_1	t_1
z_1	t_1	x_1	y_1

Liko suskaičiuoti, keliais būdais galima surašyti raides lentelės kairiajame 2×2 kvadrate. Langelyje vietoj x_1 galima įrašyti bet kurią iš 4 raidžių A, B, C, D, tada vietoj y_1 – bet kurią iš likusių 3 raidžių, vietoj z_1 – bet kurią iš likusių 2 raidžių, pagaliau vietoj t_1 – paskutinę likusią raidę. Vadinasi, yra $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ būdai užpildyti 2×2 kvadratą bei visą lentelę.

15. (C) 33

! Pratęskime vieną iš atkarpų ir pažymėkime atkarpų galus, kaip parodyta paveikslėlyje.



Atkarpos DP, EQ ir FP yra atitinkamai lygiagrečios su lygiakraščio trikampio ABC kraštinėmis CA, AB ir BC. Be to, keturi kampai, pažymėti paveikslėlyje, yra lygūs $60°$ (atitinkamųjų kampų poros: $\angle CEQ$ ir $\angle CAB = 60°$; $\angle EQC$ ir $\angle ABC = 60°$; $\angle BDP$ ir $\angle BCA = 60°$). Todėl:

a) keturkampis $BFPQ$ yra lygiagretainis (priešingos kraštinės lygiagrečios) ir $BQ = FP = 2$;

b) trikampis DPQ lygiakraštis (du kampai lygūs $60°$) ir $QD = PD = 6$;

c) keturkampis $CDPE$ yra lygiašonė trapecija (dvi kraštinės lygiagrečios, kampai prie vienos iš jų lygūs) ir $DC = PE = 3$.

(Nors išvadas a, b ir c pagrindėme, atsakymą galima gauti, vien jas nuspėjus.) Vadinasi,

$$BC = BQ + QD + DC = 2 + 6 + 3 = 11,$$

o trikampio ABC perimetras lygus

$$AB + BC + CA = 3BC = 33.$$

16. (B) 44

? Jei Janinai dabar yra n metų, tai skaičius 2024 dalijasi iš $n+2$. Todėl netinka atsakymas **C**: skaičius 2024 nesidalija iš 3, todėl nesidalija iš $3 \cdot 16 = 48 = 46 + 2$, o Janinai negali būti 46 metai. Panašiai galima atmesti atsakymus **D** ir **E**: skaičius 2024 nesidalija nei iš $48 + 2 = 5 \cdot 10$, nei iš $50 + 2 = 13 \cdot 4$, nes nesidalija nei iš 5, nei iš 13.

Atsakymo **A)** 42 taip atmesti nepavyks, nes 2024 dalijasi iš 44. Tačiau jei Janinai yra 42 metai, tai po dvejų metų jos amžius dalysis iš 4, jos dukters amžius bus lyginis skaičius, anūkei bus dveji, o visų trijų amžių sandauga dalysis iš $4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$. Taip negali būti, nes $2024 = 2000 + 24 = 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 + 2^3 \cdot 3$ iš 2^4 nesidalija. Taigi netinka ir atsakymas **A**. (Pastebėkime, kad analogiškai galima atmesti atsakymus **C** ir **E**.)

Renkamės atsakymą **B**.

! Dabartiniai Janinos, jos dukters ir anūkės amžiai (metais) atitinkamai lygūs $2a$, $2b$ ir 0, kur a ir b yra sveikieji skaičiai, $a > b > 0$. Po dvejų metų trijų amžių sandauga bus lygi

$$2024 = (2a+2) \cdot (2b+2) \cdot 2 = 2^3 \cdot (a+1)(b+1),$$
$$(a+1)(b+1) = 2024 : 2^3 = 1012 : 2^2 = 506 : 2 = 253.$$

Skaičius $253 = 230 + 23 = 23 \cdot (10+1) = 23 \cdot 11$ turi keturis teigiamus daliklius 1, 11, 23 ir 253. Kadangi $a+1 > b+1 > 1$, tai tinka tik $a+1 = 23$, $b+1 = 11$. Tada dabartinis Janinos amžius yra

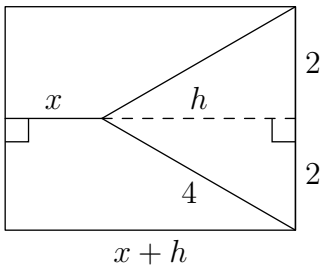
$$2a = 2 \cdot (23-1) = 44 \text{ (metai)}.$$

17. (D) $\sqrt{3}$

? Vienos iš trapecijų pagrindų ilgius pažymėkime x ir $x+h$ (čia $h > 0$). Reikia rasti x. Nesunku nuspėti, kad h yra lygiakraščio trikampio aukštinės ilgis, o trapecijos aukštinės ilgis H lygus pusei stačiakampio kraštinės ilgio 4, taigi $H = 2$ (žr. pav.).

Remiantis lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis yra a, ploto formule $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, duotojo trikampio plotas lygus $4\sqrt{3}$. Kita vertus, jis lygus $\frac{1}{2} \cdot h \cdot 4 = 2h$ bei lygus trapecijos plotui $\frac{1}{2} \cdot H \cdot (x + (x+h)) = 2x + h$. Vadinasi,

$$2x + h = 2h = 4\sqrt{3}, \qquad h = 2\sqrt{3}, \qquad 2x = 4\sqrt{3} - h = 2\sqrt{3}, \qquad x = \sqrt{3}.$$



! Nors uždavinyje kalbama apie lygiakraščio trikampio ir trapecijų plotus, jį galima išspręsti, nesinaudojant atitinkamomis ploto formulėmis.

Pastebėkime, kad dvi lygios trapecijos yra stačiosios (turi po bendrą kampą su stačiakampiu). Todėl klaustuku pažymėta atkarpa yra statmena stačiakampio kraštinei. Iš dešiniojo šios atkarpos galo išvesta lygiakraščio trikampio aukštinė yra statmena priešingai stačiakampio kraštinei, todėl yra vienoje tiesėje su klaustuku pažymėta atkarpa. Klaustuku pažymėtos atkarpos ir nubrėžtosios aukštinės ilgius atitinkamai pažymėkime x ir h (žr. **?** dalies pav.). Tada stačiakampio kraštinių ilgiai yra 4 ir $x + h$ (atstumas tarp jo vertikalių kraštinių).

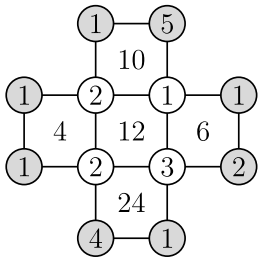
Nubrėžtoji trikampio aukštinė kartu yra jo pusiaukraštinė. Ji dalija trikampį į du stačiuosius trikampius, turinčius po statinį, kurio ilgis yra $4 : 2 = 2$, ir po įžambinę, kurios ilgis yra 4 (lygiakraščio trikampio kraštinė). Pagal Pitagoro teoremą, $h^2 + 2^2 = 4^2$ ir $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Lygiakraščio trikampio plotas S lygus $\frac{1}{2} \cdot h \cdot 4 = 4\sqrt{3}$, o stačiakampio – trigubai didesnis:

$$4(x + h) = 3S = 12\sqrt{3}, \qquad x + 2\sqrt{3} = x + h = 3\sqrt{3}, \qquad x = \sqrt{3}.$$

18. (B) 40

! Sugalvoti tinkamą skaičių surašymą skrituliuose nėra sunku (žr. pav.). Tačiau tokių surašymų yra daug (net 68). Visada gausime tą pačią skaičių pilkuosiuose skrituliuose sandaugą, bet negalėsime atmesti atsakymo **E**, kol nepatikrinsime visų galimybių. To ir nereikia – tikrinimų galima išvengti.



Nagrinėkime du kvadratus, kuriuose įrašyti skaičiai 4 ir 6. Šių kvadratų viršūnėse yra 8 skaičiai, kurių sandauga lygi $4 \cdot 6 = 24$. Keturi iš 8 skaičių yra baltuosiuose skrituliuose. Viduriniame kvadrate nurodyta, kad jų sandauga lygi 12. Todėl likusių keturių skaičių (esančių pilkuosiuose skrituliuose) sandauga lygi $24 : 12 = 2$.

Nagrinėdami du kvadratus, kuriuose įrašyti skaičiai 10 ir 24, analogiškai gauname, kad keturių skaičių, esančių šių kvadratų keturiuose pilkuosiuose skrituliuose, sandauga lygi $(10 \cdot 24) : 12 = 20$.

Vadinasi, visų 8 skaičių pilkuosiuose skrituliuose sandauga yra lygi $2 \cdot 20 = 40$.

19. (E) 3, 6, 9, 12

? Skaičius 1, 2, ..., 12 suskirstykime į tris ketvertus: 1, 4, 7 ir 10; 2, 5, 8 ir 11; 3, 6, 9 ir 12. Kiekviename iš jų visi skaičiai dalijasi iš 3 su ta pačia liekana: atitinkamai su liekana 1, su liekana 2 ir su liekana 0. Sudėjus bet kurį pirmojo ketverto ir bet kurį antrojo ketverto skaičius, gautoji suma dalijasi iš 3. Tai išplaukia ir iš formalios lygybės $(3m+1)+(3n+2) = 3(m+n+1)$. Vadinasi, Kęstutis galėjo sudartyti 8 skaičių ratą, pakaitomis rašydamas pirmojo ir antrojo ketverto skaičius. Pavyzdžiui,

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 7, \quad 8, \quad 10, \quad 11, \quad 1, \quad \ldots$$

Taigi Kęstutis galėjo nepasirinkti keturių skaičių 3, 6, 9, 12.

Renkamės atsakymą **E**.

! Jei Kęstučio skaičių rate yra skaičius a, kuris dalijasi iš 3, tai du jam gretimi skaičiai b ir c taip pat turi dalytis iš 3 (kitaip atitinkamos dviejų gretimų skaičių sumos iš 3 nesidalytų). Analogiškai iš 3 turi dalytis ir skaičiai, gretimi skaičiams b ir c, ir t. t. Tokiu atveju visi aštuoni rato skaičiai dalytųsi iš 3. Tačiau nuo 1 iki 12 yra tik keturi skaičiaus 3 kartotiniai: 3, 6, 9, 12. Vadinasi, skaičių rate nėra nė vieno skaičiaus, dalaus iš 3, o Kęstutis nepasirinko skaičių 3, 6, 9, 12.

Pastebėsime, kad uždavinio situacija yra galima: pavyzdys pateiktas **?** dalyje.

20. (C) 4

? Tarkime, kad Lėja iš eilės užrašė keturis skaičius x_1, x_2, x_3 ir x_0. Kiekvienas x_i parodo, keli Nojaus skaičiai lygūs i (čia $i = 1, 2, 3, 0$). Nojaus skaičiai tie patys kaip Lėjos. Taigi pakanka atspėti arba išmąstyti konkretų neneigiamų sveikųjų skaičių ketvertą (x_1, x_2, x_3, x_0), kur kiekvienas x_i parodo, keli skaičiai šiame rinkinyje lygūs i (čia $i = 1, 2, 3, 0$). Tokio rinkinio du tinkami pavyzdžiai yra $(2, 1, 0, 1)$ ir $(0, 2, 0, 2)$. Taigi saldainių keturiose kišenėse gali būti 2, 1, 0 ir 1 arba 0, 2, 0 ir 2. Bet kuriuo iš dviejų atvejų matome, kad saldainių iš viso gali būti 4.

Renkamės atsakymą **C**.

! Nojaus keturių skaičių suma s_1 parodo, kiek iš viso saldainių yra kišenėse. Šį skaičių ir turime nustatyti. Jis sutampa su Lėjos keturių skaičių suma s_2, parodančia, kiek yra kišenių, kuriose yra 1, 2, 3 arba 0 saldainių. Kadangi tėra keturios kišenės, tai $s_2 \leqslant 4$. Be to, jei $s_2 < 4$, tai bent vienoje kišenėje turi būti ne mažiau nei 4 saldainiai ir tada $s_1 \geqslant 4$. Gauname prieštarą: $4 \leqslant s_1 = s_2 < 4$. Vadinasi, $s_2 = 4$. Kadangi $s_1 = s_2 = 4$, tai striukės kišenėse yra iš viso 4 saldainiai.

Pastebėsime, kad uždavinio situacija yra galima: du skaičių ketverto (x_1, x_2, x_3, x_0) pavyzdžiai pateikti **?** dalyje. Nustačius, kad

$$4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_0 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_0,$$

ir atlikus atvejų perranką, galima įrodyti, kad kitų tinkamų ketvertų nėra.

21. (D) 8

! Nagrinėkime Ernesto gautus kubelius, kurių nė viena sienelė nėra žalia. Būdami didžiojo $n \times n \times n$ kubo viduje, jie sudaro mažesnį $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$ kubą, ir jų yra $(n-2)^3$.

Nagrinėkime Ernesto gautus kubelius, kurių lygiai viena sienelė yra žalia. Kiekvieną tokį kubelį galima priskirti lygiai vienai didžiojo kubo sienai, kuriai priklausė kubelio žalioji sienelė. Kiekviena didžiojo kubo siena yra $n \times n$ kvadratas. Jame nagrinėjamų kubelių žaliosios sienelės sudaro mažesnį $(n-2) \times (n-2)$ kvadratą (visi $n \times n$ lentelės langeliai, nesantys ties jos kraštu). Taigi gauname $(n-2)^2$ tokių kubelių, o kadangi kubas turi 6 sienas, tai nagrinėjamų kubelių iš viso yra $6(n-2)^2$.

Vadinasi, $(n-2)^3 = 6(n-2)^2$ ir

$$(n-2) \cdot (n-2)^2 = 6 \cdot (n-2)^2, \qquad n-2 = 6, \qquad n = 8.$$

22. (A) „Skaičius 2024 dalijasi iš 11.“

! Keturi Mikės teiginiai turi būti arba visi teisingi, arba visi klaidingi. Teiginys „skaičius 2024 dalijasi iš 11“ yra teisingas, nes

$$2024 = 1000 + 1000 + 24 = 990 + 10 + 990 + 10 + 22 + 2 = 990 + 990 + 22 + 22.$$

O teiginys „šiandien ir rytoj kalbu tik tiesą“ garantuotai klaidingas, nes Mikė niekada nekalba tiesos dvi dienas iš eilės. Taigi Mikė šių teiginių negalėjo pasakyti tą pačią dieną, ir vieno iš jų jis nepasakė. Tada jis tikrai pasakė likusius tris teiginius **B**, **D** ir **E**. Kadangi pastaraisiais dviem teiginiais Mikė pasakė, kad „vakar buvo trečiadienis“ ir tuo pačiu metu „rytoj bus šeštadienis“, tai jis sumelavo. Vadinasi, toji diena buvo Mikės melo diena, ir jis negalėjo pasakyti teisingo teiginio **A** (bet galėjo pasakyti klaidingus teiginius **B**–**E**, jei melo diena nebuvo nei ketvirtadienis, nei penktadienis).

23. (C) 3

! Didžiausias pirminis skaičius duotojoje pirminių skaičių sandaugoje yra 47. Tai parodo, kad $n \geqslant 47$. Todėl sandaugoje $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ yra dauginamieji 17 ir $34 = 2 \cdot 17$. Spėjimas, kad galbūt $n < 51 = 3 \cdot 17$ ir todėl sandaugoje $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 47$ tėra du dauginamieji, lygūs 17, būtų skubotas. Skaičiai 48, 49, 50, 51 ir 52 nėra pirminiai, todėl didžiausias dauginamasis pirminių skaičių sandaugoje būtų 47, kai $n = 47$, 48, 49, 50, 51 arba 52. Jei $47 \leqslant n < 51$, tai sandaugoje $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 47$ yra du dauginamieji, lygūs 17, bet jei $n = 51$ arba 52 – tai trys.

Pirminių skaičių sandaugos paskutinio dauginamojo 47 nagrinėti nė nebūtina. Svarbu atkreipti dėmesį į dauginamuosius

$$\ldots \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots$$

Kadangi šioje sandaugoje pirminiai skaičiai surašyti didėjimo tvarka, tai joje yra lygiai keturi dauginamieji, lygūs 13. Todėl sandaugoje $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ yra dauginamieji

$$13, \qquad 2 \cdot 13 = 26, \qquad 3 \cdot 13 = 39, \qquad 4 \cdot 13 = 52,$$

bet nėra dauginamojo $65 = 5 \cdot 13$. Vadinasi, $52 \leqslant n \leqslant 65$, o sandaugoje $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ yra dauginamieji

$$17, \qquad 34 = 2 \cdot 17, \qquad 51 = 3 \cdot 17,$$

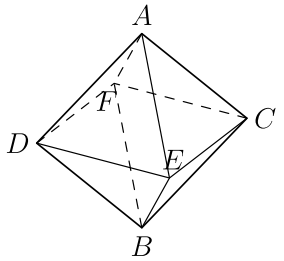
bet nėra dauginamojo $68 = 4 \cdot 17 > 65$, nei tuo labiau dar didesnių skaičiaus 17 kartotinių. Atitinkamai sandaugoje $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 47$ yra lygiai trys dauginamieji, lygūs 17.

Pastebėsime, kad nors n reikšmės rasti nebūtina, bet ją galima nustatyti vienareikšmiškai. Jau žinome, kad $n \geqslant 52$, o kadangi sandaugoje $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 47$ nėra pirminio skaičiaus 53, tai $n < 53$. Vadinasi, $n = 52$. Tada

$$n! = 2^{49} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^{8} \cdot 11^{4} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$$

yra 113 pirminių skaičių sandauga.

24. (E) $1+\sqrt{2}$



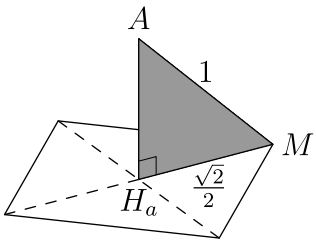
? Galima nuspėti, kad pašalinus kubą, skiriantį piramides, ir jas suglaudus, atstumas tarp piramidžių viršūnių A ir B sumažėja per kubo briaunos ilgį 1. Taip gauname naują erdvinį kūną $ABCDEF$ (žr. pav.). Kadangi šio kūno visos 8 sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, tai galima nuspėti, kad ir pats kūnas yra tam tikra prasme taisyklingas: toks pats, žiūrint iš jo bet kurios viršūnės.

Kūną $ABCDEF$ sudaro taisyklingosios piramidės $ACEDF$ ir $BCEDF$, kurių bendras pagrindas yra kvadratas $CEDF$. Tačiau dėl kūno taisyklingumo jį taip pat sudaro suglaustos dvi tokios pačios piramidės $CAEBF$ ir $DAEBF$, kurių bendras pagrindas $AEBF$ vėlgi yra kvadratas. Atkarpa AB yra šio kvadrato, kuriame $AE = 1$, įstrižainė. Taigi čia $AB = \sqrt{2}$, o duotajame kūne (prieš pašalinant kubą) atstumas AB lygus $1+\sqrt{2}$.

! Nagrinėkime tą iš dviejų taisyklingųjų piramidžių, kurios viršūnė yra A. Jos pagrindas yra kvadratas, su kurio centru sutampa piramidės aukštinės AH_a pagrindas H_a. Taisyklingosios piramidės, kurios viršūnė yra B, aukštinės BH_b pagrindas H_b taip pat yra piramidės pagrindo (kvadrato) centras. Atkarpa H_aH_b jungia kubo priešingų sienų centrus bei yra šioms sienoms statmena. Kadangi atkarpos AH_a ir BH_b taip pat yra statmenos atitinkamoms kubo sienoms, tai taškai A, H_a, H_b ir B yra vienoje tiesėje,

$$AB = AH_a + H_aH_b + BH_b.$$

Čia $H_aH_b = 1$: atstumas tarp priešingų kubo sienų lygus jo briaunos ilgiui.



Kvadrato centrą H_a sujunkime su bet kuria iš to kvadrato viršūnių. Ją pažymėkime M (žr. pav.). Kvadrato įstrižainių ilgiai lygūs $\sqrt{2}$. Jos kertasi kvadrato centre ir dalija viena kitą pusiau, todėl $MH_a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kadangi piramidės aukštinė AH_a yra statmena jos pagrindui – kvadratui, tai ji statmena atkarpai MH_a. Stačiajam trikampiui AMH_a pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$1^2 = AM^2 = AH_a^2 + MH_a^2 = AH_a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \qquad AH_a = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Analogiškai $BH_b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vadinasi,

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}.$$

25. (B) 12

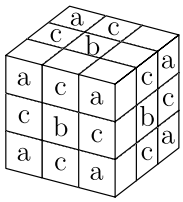
? Jei natūralusis skaičius n nesibaigia skaitmeniu 9, tai skaičių n padidinus 1 jo paskutinis skaitmuo padidėja 1, o kiti skaitmenys nepakinta. Taigi šiuo atveju skaičiaus skaitmenų suma padidėja, o ne sumažėja. Reikšmė $N = 9$ netinka: skaičiaus $N + 1 = 10$ skaitmenų suma yra 9 kartus, o ne 3 kartus mažesnė nei skaičiaus N. Vadinasi, skaičius N turi skaitmenį 9 ir dar bent vieną nenulinį skaitmenį, o jo skaitmenų suma yra didesnė nei 9. Mažiausias iš likusių galimų atsakymų **B)** 12 gaunamas, pastebėjus tinkamą reikšmę $N = 39$: skaičiaus $N+1 = 40$ skaitmenų suma $4+0 = 4$ yra tris kartus mažesnė nei skaičiaus N skaitmenų suma $3+9 = 12$.

Renkamės atsakymą **B**.

! Užbaigiant **?** dalies sprendimą liko įrodyti, kad N skaitmenų suma negali būti lygi 10 arba 11. Iš tiesų, ji yra tris kartus didesnė nei skaičiaus $N + 1$ skaitmenų suma, todėl dalijasi iš 3, o skaičiai 10 ir 11 iš 3 nesidalija.

26. (E) Kitas atsakymas

! Jei $3\times3\times3$ kubas sudėtas iš 27 kubelių, tai kiekvieną jo sieną sudaro $3\cdot3 = 9$ langeliai, o visą kubo paviršių sudaro $6 \cdot 9 = 54$ langeliai. Geltonų, žalių ir raudonų langelių turi būti po $54 : 3 = 18$. Šie langeliai yra kubelių sienelės, esančios kubo paviršiuje. Tokias sieneles vadinkime išorinėmis.



Sudėjus kubą, kiekvienas kubelis turi daugiausiai tris išorines sieneles. Tai galima nusakyti ir tiksliau:

a) 8 kubeliai kubo kampuose turi po 3 išorines sieneles;

b) 12 kubelių ties kiekvienos kubo briaunos centru turi po 2 išorines sieneles;

c) 6 kubeliai ties kiekvienos kubo sienos centru turi po vieną išorinę sienelę;

d) likęs kubelis, esantis ties kubo centru, neturi išorinių sienelių.

Kiekvienam kubeliui priskyrę jo išorinių sienelių skaičių, gauname 27 skaičius:

8 trejetai, 12 dvejetų, 6 vienetai, 1 nulis.

Nudažyti kubelius trimis skirtingomis spalvomis ir iš jų sudėti tinkamą kubą reiškia šiuos 27 skaičius suskirstyti (kaip dėmenis) į tris sumas, lygias 18. Skaičius m parodo, kiek mažiausiai dėmenų gali būti vienoje iš sumų, o skaičius M – kiek daugiausiai.

Pirmoji iš lygybių

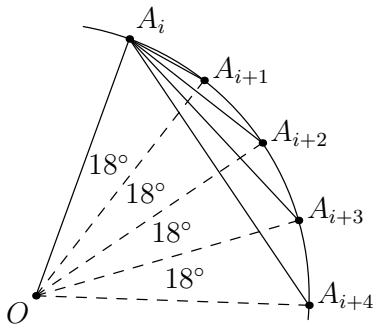
$$18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3, \qquad 18 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

parodo, kad, net imant didžiausius galimus dėmenis (trejetus), sumai 18 gauti reikia bent 6 dėmenų. Panašiai antroji lygybė parodo, kad, net imant mažiausius galimus dėmenis (nulį, tada visus 6 vienetus, tada dvejetus), sumai 18 gauti pakanka 13 dėmenų, o 14 dėmenų jau būtų per daug. Taigi $m \geqslant 6$ ir $M \leqslant 13$. Kita vertus, iš 6 skaičių (6 trejetai) arba iš 13 skaičių (nulis, 6 vienetai, 6 dvejetai) sudarius sumą, lygią 18, likusius iš 27 skaičių lengva suskirstyti į dvi sumas, taip pat lygias 18. Tai galima nujausti: juk čia skirstyti skaičius į sumas galime bet kaip, nesirūpindami dėmenų skaičiumi. Tačiau tai galima ir patikrinti. Pavyzdžiui, pirmuoju atveju dviejose sumose gali būti po trejetą, 6 dvejetus ir 3 vienetus (vienoje iš sumų – dar ir nulis), o antruoju – po 4 trejetus ir 3 dvejetus. Vadinasi, $m = 6$, $M = 13$ ir $M - m = 7$.

27. Ⓒ 120

! Nagrinėkime bet kokį apskritimą. Jo centrą pažymėkime C, o vieną jo tašką – A. Taškui B judant apskritimu, kad $\angle ACB$ didėtų nuo $0°$ iki $180°$, ilgėja (trumpesnysis) apskritimo lankas AB bei styga AB. Kai $\angle ACB = 60°$, tai lygiašonio trikampio ABC ($CA = CB$) kiti du kampai taip pat lygūs $60°$. Tada trikampis ABC lygiakraštis, o atkarpos AB ilgis lygus apskritimo spindulio CA ilgiui. Kai $\angle ACB = 180°$, tai apskritimo styga AB yra jo skersmuo. Taigi apskritimo styga AB ilgesnė už jo spindulį, bet trumpesnė už skersmenį, kai $60° < \angle ACB < 180°$.

Duotojo apskritimo centrą pažymėkime O, o 20 nagrinėjamų taškų iš eilės pagal laikrodžio rodyklę pažymėkime A_1, A_2, …, A_{20}. Dėl patogumo laikykime, kad $A_{21} = A_1$, $A_{22} = A_2$ ir t. t. Turime taisyklingąjį 20-kampį $A_1A_2 \ldots A_{20}$. Apskritimo spinduliai OA_1, OA_2, …, OA_{20} pilnąjį kampą dalija į 20 lygių kampų. Taigi $\angle A_iOA_{i+1} = 360° : 20 = 18°$ kiekvienam i.



Nagrinėkime Luko nubrėžtas atkarpas. Kiekviena iš jų jungia dvi taisyklingojo 20-kampio viršūnes. Kai šios viršūnės yra toliausiai viena nuo kitos (priešingos), tai viena iš jų yra 10-oji, skaičiuojant nuo kitos pagal laikrodžio rodyklę. Visais kitais atvejais viena iš dviejų viršūnių yra k-toji, kur $k < 10$, skaičiuojant pagal laikrodžio rodyklę nuo kitos. Todėl kiekvieną atkarpą galima užrašyti pavidalu A_iA_{i+k}, kur $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, 10$. Kampas A_iOA_{i+k} lygus $k \cdot 18°$ (žr. pav.): atitinkamai $18°$, $36°$, $54°$, $72°$, …, $180°$. Atkarpa A_iA_{i+k} yra ilgesnė už apskritimo spindulį, bet trumpesnė už skersmenį, kai $60° < k \cdot 18° < 180°$, taigi kai $4 \leqslant k \leqslant 9$.

Liko suskaičiuoti, kiek yra atkarpų A_iA_{i+k}, kai $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Atkarpų A_iA_{i+4}, t. y. tokių, kurių galus apskritime skiria trys Luko pažymėti taškai, yra 20. Analogiškai yra po 20 atkarpų A_iA_{i+5}, A_iA_{i+6}, A_iA_{i+7}, A_iA_{i+8}, A_iA_{i+9}, o iš viso tinkamų atkarpų yra $20 \cdot 6 = 120$.

28. Ⓓ $\dfrac{1}{14}$

! Tarkime, kad Ona buvo parke T h, o 4 km/h greičiu ėjo t h. Turime nustatyti $t : T$ reikšmę.

Onos ėjimo 2 km/h greičiu laikas yra $\frac{T}{2}$ h, ėjimo 3 km/h arba 4 km/h greičiu laikas taip pat yra $\frac{T}{2}$ h, ėjimo 4 km/h greičiu laikas yra t h, o ėjimo 3 km/h greičiu laikas yra $\left(\frac{T}{2} - t\right)$ h. Tada 2 km/h, 3 km/h ir 4 km/h greičiu Onos nueitas atstumas (kilometrais) atitinkamai lygus

$$\frac{T}{2} \cdot 2 = T, \qquad \left(\frac{T}{2} - t\right) \cdot 3 = \frac{3T}{2} - 3t, \qquad t \cdot 4 = 4t.$$

Kadangi 3 km/h greičiu Ona nuėjo tokį patį atstumą kaip eidama kitu greičiu, tai

$$\frac{3T}{2} - 3t = T + 4t, \qquad \frac{3T}{2} - T = 4t + 3t, \qquad \frac{T}{2} = 7t, \qquad T = 14t, \qquad t : T = \frac{1}{14}.$$

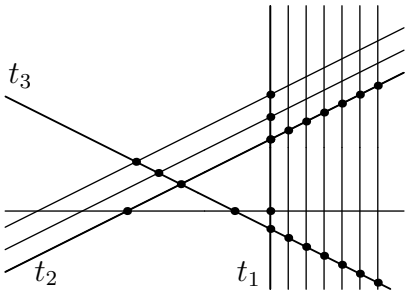
29. (E) Tik 12

! Jei dvi tiesės lygiagrečios, tai kiekviena kita tiesė arba jas abi kerta, arba nekerta nė vienos iš jų. Taigi jei dvi iš n duotųjų tiesių lygiagrečios, tai jose yra po tiek pat nagrinėjamų sankirtų. Tai reiškia, kad tiesės t_1, t_2 ir t_3 viena kitą kerta. Kiekviena iš likusių tiesių t_i arba yra lygiagreti su viena iš tiesių t_1, t_2, t_3 bei kerta kitas dvi iš jų, arba kerta visas tris tieses t_1, t_2, t_3.

Tiesių, lygiagrečių su t_1, su t_2 ir su t_3, skaičių atitinkamai pažymėkime x_1, x_2 ir x_3. Tiesių, kertančių tiesę t_1, ir tiesių, kertančių tiesę t_3, aibės skiriasi tik tuo, kad pirmojoje iš jų yra tiesė t_3 ir dar x_3 tiesių, lygiagrečių su ja, o antrojoje vietoj to – tiesė t_1 ir dar x_1 tiesių, lygiagrečių su ja. Kadangi tiesėje t_3 sankirtų yra 6 daugiau nei tiesėje t_1, tai $x_1 = x_3 + 6$. Analogiškai gauname, kad $x_2 = x_3 + 2$.

Tiesė t_2 kerta tieses t_1 ir t_3 bei visas tieses, lygiagrečias su jomis. Taigi joje yra bent $2 + x_1 + x_3$ sankirtų. Jei $x_3 \geqslant 1$, tai $x_1 \geqslant 7$ ir $2 + x_1 + x_3 \geqslant 2 + 7 + 1 > 9$. Tiesėje t_2 yra tik 9 sankirtos, todėl $x_3 = 0$, $x_1 = x_3 + 6 = 6$ ir $x_2 = x_3 + 2 = 2$.

Vadinasi, turime $6 + 1 = 7$ tarpusavyje lygiagrečias tieses, viena iš kurių yra t_1. Taip pat turime $2 + 1 = 3$ tarpusavyje lygiagrečias tieses, viena iš kurių yra t_2. Šios 3 tiesės bei tiesė t_3 (nelygiagreti su jokia kita) kerta tiesę t_1. Kadangi tiesėje t_1 yra 5 sankirtos, tai yra dar viena tiesė – vienintelė, kertanti t_1, t_2 ir t_3. Taigi vienintelė galima n reikšmė yra $7 + 3 + 1 + 1 = 12$. Remdamiesi gautais duomenimis, galime pateikti pavyzdį, kuris tenkina uždavinio sąlygą (žr. pav.).



!! Kaip ir **!** dalyje, pastebėkime: tiesės t_1, t_2 ir t_3 viena kitą kerta, o kiekviena iš likusių tiesių t_i arba yra lygiagreti su viena iš tiesių t_1, t_2, t_3 bei kerta kitas dvi iš jų, arba kerta visas tris tieses t_1, t_2, t_3.

Tarkime, kad tarp duotųjų tiesių yra lygiai k tiesių, kertančių ir t_1, ir t_2. Tiesę t_1 kerta 5 tiesės: k tiesių, kertančių ir tiesę t_2, pati tiesė t_2 ir visos tiesės, lygiagrečios su t_2. Tad pastarųjų yra $5 - 1 - k = 4 - k$. Analogiškai yra lygiai $9 - 1 - k = 8 - k$ tiesių, lygiagrečių su t_1. Taigi turime:

a) $9 - k$ tarpusavyje lygiagrečių tiesių, viena iš kurių yra t_1;

b) $5 - k$ tarpusavyje lygiagrečių tiesių, viena iš kurių yra t_2;

c) likusias duotąsias tieses – visas, kurios kerta ir t_1, ir t_2; jų yra k.

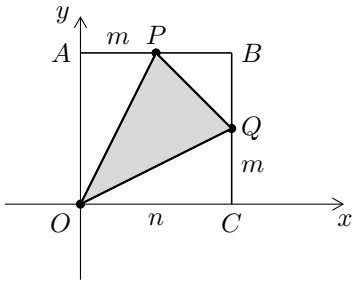
Todėl $n = (9 - k) + (5 - k) + k = 14 - k$. Kadangi yra bent $(9 - k) + (5 - k) = 14 - 2k$ tiesių, kertančių t_3, tai

$$14 - 2k \leqslant 11, \qquad 2k \geqslant 3, \qquad k \geqslant 2, \qquad n = 14 - k \leqslant 12.$$

Kita vertus, tiesę t_3 kerta 11 kitų tiesių, todėl $n \geqslant 1 + 11 = 12$. Vadinasi, $n = 12$.

30. (A) 2

! Tiesės $x = n$ ir $y = n$ bei koordinačių ašys riboja $n \times n$ kvadratą $OABC$, kurį sudaro trikampis OPQ ir statieji trikampiai OAP, PBQ, OCQ (žr. pav.).



Trikampio OPQ plotą S_{OPQ} išreikškime per kitų figūrų plotus:

$$\begin{aligned} S_{OPQ} &= S_{OABC} - S_{OAP} - S_{PBQ} - S_{OCQ} = \\ &= n^2 - \frac{mn}{2} - \frac{(n-m)^2}{2} - \frac{mn}{2} = \\ &= \frac{2n^2 - mn - (n^2 - 2mn + m^2) - mn}{2} = \frac{n^2 - m^2}{2} = \frac{(n+m)(n-m)}{2}. \end{aligned}$$

Taigi m ir n yra bet kokie natūralieji skaičiai, kuriems $n > m$ ir

$$(n+m)(n-m) = 2 \cdot 54 = 2^2 \cdot 3^3.$$

Natūraliųjų skaičių $n - m (> 0)$ ir $n + m$ sandauga dalijasi iš 2, todėl bent vienas iš jų lyginis. Skaičius $n + m = (n - m) + 2m$ yra to paties lyginumo kaip skaičius $n - m$, taigi abu šie skaičiai lyginiai. Natūraliųjų skaičių $\frac{n+m}{2}$ ir $\frac{n-m}{2}$ sandauga lygi 3^3. Be to, $\frac{n-m}{2} < \frac{n+m}{2}$, todėl tinka nebent tik $\frac{n-m}{2} = 1$ ir $\frac{n-m}{2} = 3$. Atitinkamai $\frac{n+m}{2} = 27$ ir $\frac{n+m}{2} = 9$. Pagal formules

$$m = \frac{n+m}{2} - \frac{n-m}{2}, \qquad n = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2}$$

lengvai gaunamos poros $(m, n) = (26, 28)$ ir $(m, n) = (6, 12)$, kurioms $(n+m)(n-m) = 2 \cdot 54$ ir $n > m$. Vadinasi, yra lygiai dvi tinkamos $m + n$ reikšmės: 54 ir 18.

Atsakymai

Uždavinio nr.	Atsakymas
1	A
2	C
3	D
4	D
5	B
6	C
7	E
8	E
9	B
10	D
11	A
12	B
13	D
14	B
15	C
16	B
17	D
18	B
19	E
20	C
21	D
22	A
23	C
24	E
25	B
26	E
27	C
28	D
29	E
30	A