Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Junioras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavimas
Paulius Šarka

© Aivaras Novikas, 2013
© Kengūros organizavimo komitetas, 2013

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašai **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Sprendimai **13**

Atsakymai **25**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 9–10 klasių (*Junioro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Nykštukas, 1 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Nykštukas, 2 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

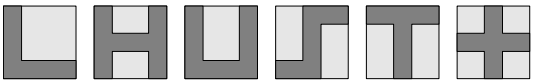
Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Skaičius 200013 − 2013 nesidalija iš:
A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11

2. Gretutė ant vienodų kvadratinių lapelių užtušavo pavaizduotas figūras.

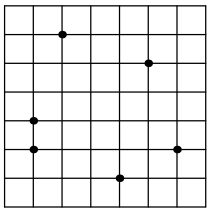


Kelių figūrų perimetrai lygūs lapelio perimetrui?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

3. Ponia Aurelija pamatė parduotuvėje tokį skelbimą: „Kukurūzų akcija!!! 20 centų už burbuolę! Kas šešta burbuolė nemokama!“ Ji tučtuojau nupirko po 4 burbuoles kiekvienam iš savo 4 vaikų. Kiek ji sumokėjo?
A) 0,80 Lt **B)** 1,20 Lt **C)** 2,80 Lt **D)** 3,20 Lt **E)** 80 Lt

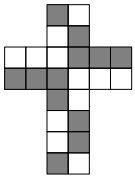
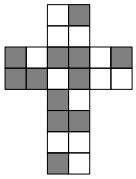
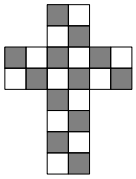
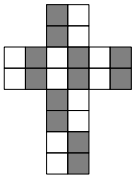
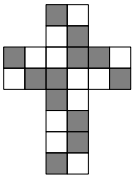
4. Sudauginus tris iš skaičių 2, 4, 16, 25, 50, 125, gauta sandauga 1000. Kam lygi tų trijų skaičių suma?
A) 70 **B)** 77 **C)** 131 **D)** 143 **E)** Kitas skaičius

5. Popieriaus lapas padalytas į kvadratinius vienetinio ploto langelius. Jame pažymėti šeši taškai (žr. pav.). Sujungus tris iš jų atkarpomis, susidarė trikampis. Koks yra mažiausias galimas to trikampio plotas?
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** 2



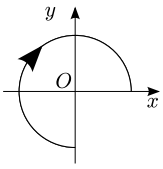
6. Skaičių 4^{15} ir 8^{10} suma yra dvejeto laipsnis. Ji lygi:
A) 2^{10} **B)** 2^{15} **C)** 2^{20} **D)** 2^{30} **E)** 2^{31}

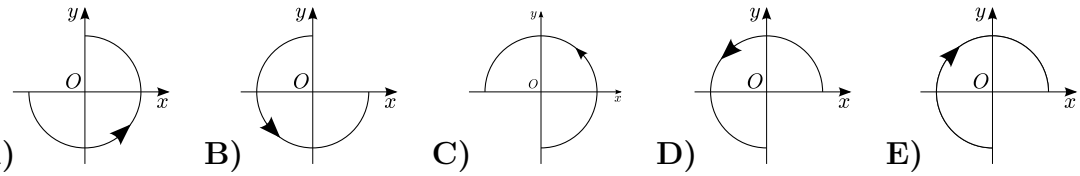
7. Popierinis kubas nudažytas juodai ir baltai, ir atrodo taip, tarsi jį sudarytų keturi balti ir keturi juodi kubeliai. Kokį vaizdą galime gauti iškloję kubą?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

8. Imame skaičiaus 4 didžiausią triženklį kartotinį ir skaičiaus 4 mažiausią triženklį kartotinį. Kam lygus tų dviejų kartotinių skirtumas?
A) 900 **B)** 899 **C)** 896 **D)** 225 **E)** 224

9. Brėžinyje šalia matome apskritimą be ketvirčio ir jame pažymėtą rodyklę. Kokį vaizdą gausime, pasukę tą figūrą 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę aplink tašką O, o tada pakeitę ją veidrodiniu atspindžiu Ox ašies atžvilgiu?





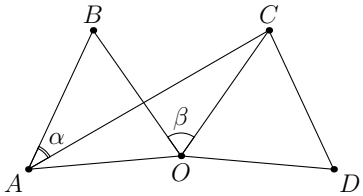
10. Kuris iš išvardytų skaičių yra didžiausias?

A) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{20}\cdot 13$ **C)** $20\cdot\sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{201}\cdot 3$ **E)** $\sqrt{2013}$

Klausimai po 4 taškus

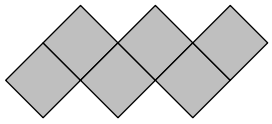
11. Lygiakraštį trikampį AOB pasukus aplink tašką O, gautas trikampis COD. Žinoma, kad $\beta = \angle BOC = 70°$ (žr. pav.). Kam lygus kampas $\alpha = \angle BAC$?

A) 20° **B)** 25° **C)** 30° **D)** 35° **E)** 40°



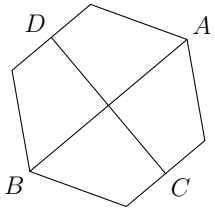
12. Paveikslėlyje pavaizduotas „zigzagas“, sudarytas iš šešių vienetinių langelių. Jo perimetras lygus 14. Kam lygus sudaryto iš 2013 langelių „zigzago“ perimetras?

A) 2022 **B)** 4028 **C)** 4032 **D)** 6038 **E)** 8050



13. Atkarpa AB jungia dvi priešingas taisyklingojo šešiakampio viršūnes. Atkarpa CD jungia jo dviejų priešingų kraštinių vidurio taškus (žr. pav.). Raskite šių atkarpų ilgių sandaugą, jei šešiakampio plotas lygus 60.

A) 40 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 100

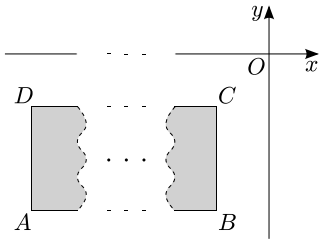


14. Vienos klasės mokiniai parašė testą. Jei kiekvienas berniukas būtų gavęs 3 balais daugiau, klasės pažymių vidurkis būtų didesnis 1,2 balo. Kurią klasės dalį sudaro mergaitės?

A) 20% **B)** 30% **C)** 40% **D)** 60% **E)** Nustatyti neįmanoma

15. Stačiakampis $ABCD$ yra III koordinačių sistemos ketvirtyje, o jo kraštinės lygiagrečios su koordinačių ašimis (žr. pav.). Kiekvienai viršūnei priskiriamas skaičius, lygus jos koordinačių santykiui $y:x$. Kurios viršūnės skaičius bus mažiausias?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** Nustatyti neįmanoma

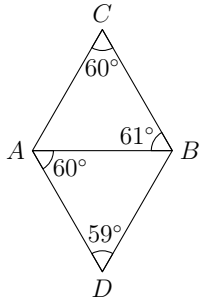


16. Šiandien ir pono Jono, ir jo sūnaus gimtadienis. Jų amžių (metais) sandauga lygi 2013. Kuriais metais gimė ponas Jonas?

A) 1981 **B)** 1982 **C)** 1953 **D)** 1952 **E)** Nustatyti neįmanoma

17. Rugilė mėgino nubrėžti iš lygiakraščių trikampių sudarytą rombą, bet išmatavusi kampus suprato suklydusi (žr. pav.). Kuri iš penkių atkarpų yra ilgiausia?

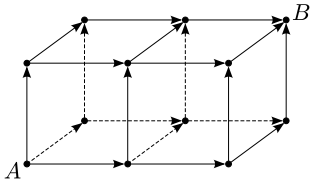
A) AD **B)** AC **C)** AB **D)** BC **E)** BD



18. Penki iš eilės einantys natūralieji skaičiai pasižymi tokia savybe: trijų iš jų suma lygi kitų dviejų sumai. Kiek yra tokių skaičių penketų?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Daugiau nei 3

19. Keliais būdais įmanoma iš taško A patekti į tašką B, einant rodyklių nurodyta kryptimi (žr. pav.)?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15



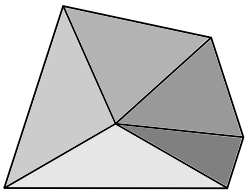
20. Duotas šešiaženklis natūralusis skaičius, kurio skaitmenų suma lyginė, o sandauga – nelyginė. Kuris iš šių teiginių apie duotąjį skaičių gali būti teisingas?
A) Lyginiai yra du arba keturi jo skaitmenys **B)** Tokio skaičiaus nėra
C) Jo nelyginių skaitmenų skaičius nelyginis **D)** Visi šeši jo skaitmenys skirtingi
E) Teiginiai **A**–**D** klaidingi

Klausimai po 5 taškus

21. Skaičius $\frac{1}{1024000}$ užrašytas baigtine dešimtaine trupmena, kurios paskutinis skaitmuo nenulinis. Kiek skaitmenų užrašyta po kablelio?
A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 1024000

22. Kiek yra natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas dalijasi iš 2013 ir turi lygiai 2013 natūraliųjų daliklių (įskaitant 1 ir patį skaičių)?
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** Kitas skaičius

23. Keli lygiašoniai trikampiai, suglausti šoninėmis kraštinėmis, sudaro iškyląjį daugiakampį (žr. pav.). Trikampių kampų, turinčių bendrą viršūnę, dydžiai laipsniais yra natūralieji skaičiai 24°, 48°, 72°, 96°, 120°, gauti dauginant mažiausiąjį iš 1, 2, 3, ... Linas tokiu pat būdu suglaudė tiek lygiašonių trikampių, kiek tik įmanoma. Kiek laipsnių turi mažiausias iš bendraviršūnių kampų Lino brėžinyje?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 8



24. Sakoma, kad su skaičių trejetu atlikta operacija „SUMOS“, jei kiekvienas iš trijų skaičių pakeičiamas kitų dviejų suma. Pvz., skaičius $3, 4, 6$ operacija „SUMOS“ paverčia skaičiais $10, 9, 7$, o šiuos savo ruožtu – skaičiais $16, 17, 19$. Pradėkime nuo skaičių $1, 2, 3$. Po kelių tokių operacijų trejete pirmą kartą pasirodys skaičius 2013?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 2013 **E)** Skaičiaus 2013 negausime

25. Skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 surašome ratu (nebūtinai iš eilės). Prie kiekvieno skaičiaus pridėję du jam gretimus, gauname 10 sumų. Mažiausiąją iš jų pažymime s. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti s?
A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

26. Linas skaičius nuo 1 iki 22 suskirstė į 11 porų. Didesnįjį kiekvienos poros skaičių jis padalijo iš mažesniojo. Kiek daugiausiai natūraliųjų skaičių galėjo gauti Linas?
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

27. Sujungus tris duotojo taisyklingojo trylikakampio viršūnes, susidarė trikampis. Trylikakampio centras atsidūrė to trikampio viduje. Kiek yra tokių trikampių?
A) 72 **B)** 85 **C)** 91 **D)** 100 **E)** Kitas skaičius

28. Pirmasis automobilis išvyko iš Greitogalos pastoviu 50 km/h greičiu. Nuo to laiko kas valandą iš Greitogalos išvykdavo po automobilį. Kiekvienas iš jų buvo 1 km/h greitesnis už prieš tai išvykusį. Paskutinis automobilis 100 km/h greičiu išvyko 50 valandų vėliau nei pirmasis. Koks yra automobilio, važiavusio visų kitų priešaky po 100 valandų nuo pirmojo automobilio starto, greitis?
A) 50 km/h **B)** 66 km/h **C)** 75 km/h **D)** 84 km/h **E)** 100 km/h

29. Palei kelią viena eile auga 100 medžių: ąžuolų ir uosių. Nėra tokių dviejų ąžuolų, tarp kurių augtų lygiai 5 medžiai. Kiek daugiausiai ąžuolų auga palei kelią?
A) 48 **B)** 50 **C)** 52 **D)** 60 **E)** Aprašytoji situacija neįmanoma

30. Ūkininkas išėjo apžiūrėti laukų. Jis pamatė traktorių, tempiantį ilgą vamzdį, ir ėmė matuoti vamzdžio ilgį 1 metro žingsniais. Eidamas palei vamzdį traktoriaus judėjimo kryptimi, ūkininkas suskaičiavo 140 žingsnių, o eidamas priešinga kryptimi – 20 žingsnių. Ūkininko ir traktoriaus greičiai pastovūs. Koks yra vamzdžio ilgis?
A) 30 m **B)** 35 m **C)** 40 m **D)** 48 m **E)** 80 m

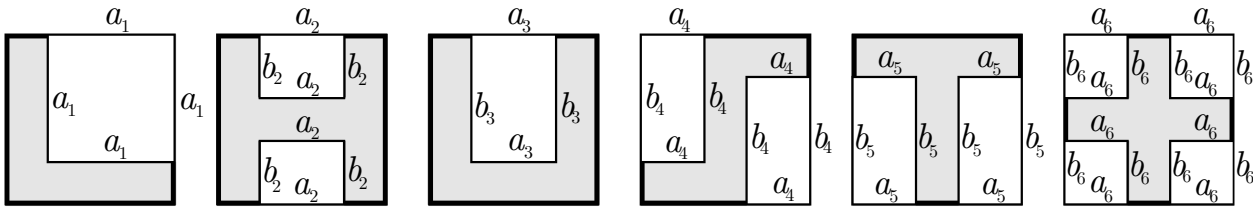
Sprendimai

1. (D) 7

! Perraškyme skirtumą $200013 - 2013 = 200000 - 2000 + 13 - 13 = 2000(100 - 1) = 2000 \cdot 99$. Skaičius $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ dalijasi iš 2 ir 5, o skaičius $99 = 3^2 \cdot 11$ dalijasi iš 3 ir 11. Nei vienas iš jų nesidalija iš 7.

2. (C) 4

! Lyginant perimetro linijų ilgumą, pakanka lyginti tik tas jų dalis, kurios nesutampa. Tas dalis sudarančių atkarpų ilgius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje.



Kai kurių atkarpų ilgiai sutampa, nes jos yra priešingos stačiakampio kraštinės. Kiekvienos figūros (einant iš kairės į dešinę) atveju galioja tokios lygybės ar nelygybės: 1) $2a_1 = 2a_1$; 2) $2a_2 + 4b_2 \neq 2a_2$; 3) $a_3 + 2b_3 \neq a_3$; 4) $2a_4 + 2b_4 = 2a_4 + 2b_4$; 5) $2a_5 + 2b_5 = 2a_5 + 2b_5$; 6) $8a_6 = 8a_6$. Turime keturias lygybes ir keturias figūras, kurių perimetrai lygūs lapelio perimetrui.

3. (C) 2,80 Lt

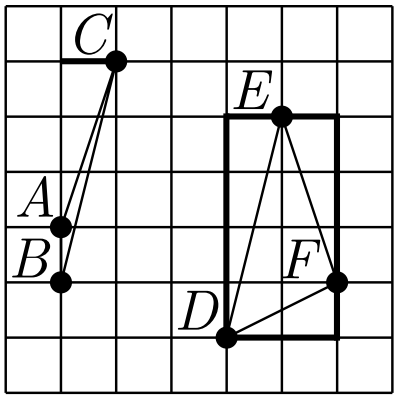
! Ponia Aurelija nupirko $4 \cdot 4 = 16$ burbuolių. Iš jų nemokamos buvo 6-oji ir 12-oji burbuolės, o po 20 centų ponia Aurelija sumokėjo už likusias $16 - 2 = 14$ burbuolių. Todėl ji sumokėjo $14 \cdot 20 = 280$ centų arba $2,80$ Lt.

4. (C) 131

? Tris skaičius iš šešių duotųjų parinkti nesunku: $2 \cdot 4 \cdot 125 = 2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$. Ieškoma suma lygi $2 + 4 + 125 = 131$.

! Įsitikinkime tuo, kad kitaip trijų skaičių parinkti neįmanoma. Jų sandauga 1000 dalijasi iš 5^3, bet ne iš 5^4. Kitaip tariant, turime sudauginti lygiai tris penketus. Jei neimsime skaičiaus 125, tai turėsime imti kitus skaičius, besidalijančius iš 5, t. y. $25 = 5^2$ arba $50 = 2 \cdot 5^2$. Tačiau bet kuris vienas iš jų teturi du penketus, t. y. dalijasi tik iš 25, o du tokie skaičiai jau duoda 4 penketus, jų sandauga dalijasi iš 5^4. Vadinasi, turime imti skaičių 125. Likusių dviejų skaičių sandauga lygi $1000 : 125 = 8$. Ją gausime tik sudauginę du mažiausius skaičius 2 ir 4.

5. (C) $\frac{1}{2}$



! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Riebesnėmis linijomis pažymėkime trikampio ABC aukštinę ir stačiakampį, į kurį įbrėžtas trikampis DEF. Raskime trikampių ABC ir DEF plotus.

Trikampio ABC plotas lygus pusei pagrindo AB ir aukštinės sandaugos: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Stačiakampį DEF, kurio plotas yra $4 \cdot 2 = 8$, sudaro trikampis DEF ir trys statieji trikampiai, kurių plotai yra $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2, \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Tad trikampio DEF plotas lygus $8 - 2 - \frac{3}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$.

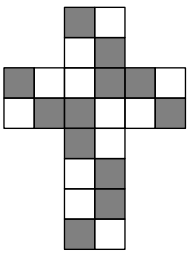
Žinoma, ir iš „iš akies" buvo galima nustatyti, kad trikampio DEF plotas didesnis nei trikampio ABC. Taip pat „iš akies" patikrinus visus ar bent daugelį trikampių, kurių plotai mums rūpi, nesunku nuspėti, kad trikampio ABC plotas ir yra mažiausias. Bet šį ploto skaičiavimo pavyzdį čia pateikėme, kad būtų lengviau pastebėti dėsningumą, dėl kurio mažensio ploto trikampio negausime ne tik šiuo atveju, bet ir jokiu atveju, jei tik taškus žymime languoto popieriaus langelių viršūnėse.

Juk aplink bet kokį trikampį su tokiomis viršūnėmis galima apibrėžti stačiakampį, einantį per trikampio viršūnes ir ribojantį stačiakampę sritį, sudarytą iš vienetinių langelių. Jo plotas bus sveikasis skačius. Tą stačiakampį sudarys pradinis trikampis drauge su stačiaisiais trikampiais, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Stačiųjų trikampių plotai bus sveikieji skaičiai, padalyti iš 2, tad ir pradinio trikampio plotas, gaunamas tuos plotus atėmus iš stačiakampio ploto, bus sveikasis skaičius, padalytas iš 2. Vadinasi, mažesnio ploto nei $1 : 2 = \frac{1}{2}$ trikampis turėti negali.

6. (E) 2^{31}

! Abu dėmenys patys yra dvejeto laipsniai: $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{2 \cdot 15} + 2^{3 \cdot 10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{30+1} = 2^{31}$.

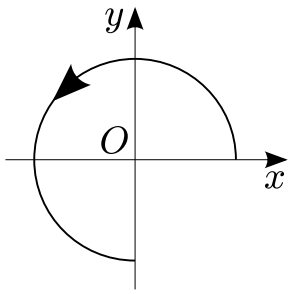
7. (E)



! Kiekvienoje kubo sienoje yra po du baltus ir du juodus langelius (kitaip nei atsakyme B). Jokioje sienoje tos pačios spalvos langeliai neturi bendros kraštinės (kitaip nei atsakymuose A ir D). Pagaliau pastebėkime, kad bendrą kraštinę turintys, bet skirtingose sienose esantys langeliai yra visada tos pačios spalvos (kitaip nei atsakyme C). Jei pradėsime dažyti išklotinę nuo bet kurios sienos, ir kiekvieną sieną nudažysime pagal išvardytas taisykles, tai gausime tokį vaizdą, kaip atsakyme E.

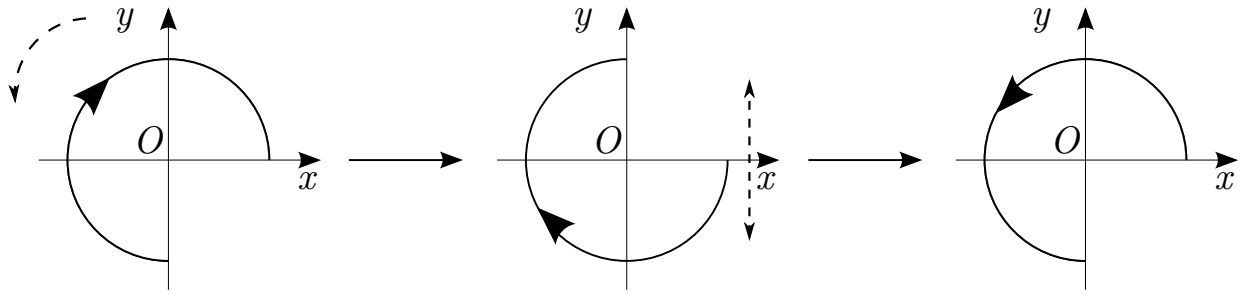
8. (C) 896

! Skaičiaus 4 kartotiniai yra $4, 8, 12, ..., 96, 100, 104, 108, ..., 992, 996, 1000, ...$ Ieškomas skirtumas lygus $996 - 100 = 896$.



9. (D)

! Po posūkio rodyklė atsiduria III koordinačių ketvirtyje, bet jos kryptis nepakinta (žr. pav.). O po atspindėjimo rodyklė grįžta į II ketvirtį, bet ima rodyti kryptį prieš laikrodžio rodyklę.



10. (C) $20 \cdot \sqrt{13}$

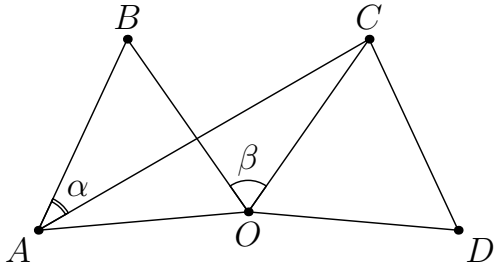
! Dėl patogumo visus skaičius pakelkime kvadratu:

A) $(\sqrt{20} \cdot \sqrt{13})^2 = 20 \cdot 13 = 260 < 4000$;
B) $(\sqrt{20} \cdot 13)^2 = 20 \cdot 169 < 20 \cdot 200 = 4000$;
C) $(20 \cdot \sqrt{13})^2 = 400 \cdot 13 > 400 \cdot 10 = 4000$;
D) $(\sqrt{201} \cdot 3)^2 = 201 \cdot 9 < 201 \cdot 10 = 2010 < 4000$;
E) $(\sqrt{2013})^2 = 2013 < 4000$.

Didžiausias skaičius yra $20 \cdot \sqrt{13}$.

11. (D) $35°$

! Trikampiai AOB ir COD yra lygūs tarpusavyje ir lygiakraščiai, todėl $\angle AOB = \angle BAO = 60°$ ir $AO = BO = CO$. Vadinasi, trikampis AOC lygiašonis ir $\angle CAO = \angle ACO$.

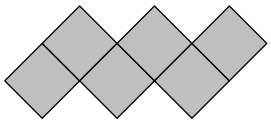


Dabar šiuos kampus galime rasti, užrašę trikampio kampų sumą. Kadangi $180° = \angle CAO + \angle ACO + \angle AOC = \angle CAO + \angle CAO + (\angle AOB + \angle BOC) = 2\angle CAO + 60° + 70° = 2\angle CAO + 130°$, tai $\angle CAO = \frac{180° - 130°}{2} = 25°$.

Pagaliau randame $\alpha = \angle BAC = \angle BAO - \angle CAO = 60° - 25° = 35°$.

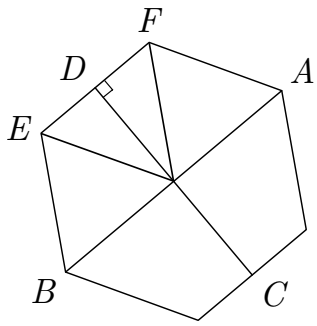
12. (B) 4028

! Perimetro liniją sudaro tarpusavyje nesuglaustos langelių kraštinės. Kiekviena iš jų yra vienetinio ilgio, tad belieka rasti tokių kraštinių skaičių. Vien pažvelgus į pateiktą pavyzdį nesunku suvokti, kad kiekvieno langelio, išskyrus du kraštinius, lygiai dvi kraštinės yra suglaustos su kitomis ir dvi nėra. Iš tiesų kiekvienas iš $2013 - 2 = 2011$ langelių yra suglaustas su dviem gretimais, tik kraštiniai langeliai turi po vieną kaimyninį, todėl po tris su kitomis nesuglaustas kraštines. Gauname perimetrą $2011 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4028$.



13. (D) 80

! Čia neįrodinėsime gerai žinomų ir intuityviai nesunkiai suprantamų taisyklingojo daugiakampio savybių. Kiekvienas taisyklingasis daugiakampis turi centrą – tai yra apie jį apibrėžto apskritimo centras. Jei iš to centro į daugiakampio viršūnes išvesime atkarpas, tai jos bus lygios ir dalys daugiakampį į lygius lygiašonius trikampius. Be to, jei taisyklingasis daugiakampis turi lyginį viršūnių skaičių, tai galime kalbėti apie daugiakampio priešingas viršūnes ir priešingas kraštines. Įstrižainės, jungiančios priešingas viršūnes, eina per centrą ir centras jas dalija pusiau. Priešingos kraštinės yra lygiagrečios, o jų vidurius jungianti atkarpa yra joms statmena, eina per centrą ir jis ją taip pat dalija pusiau. Norint išspręsti šį uždavinį, viso to iš anksto žinoti nebūtina – tai nėra sunku atspėti žiūrint į brėžinį, pastebint jo simetriškumą.

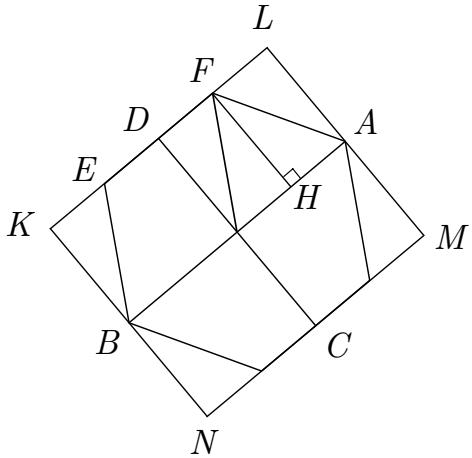


Vadinasi, duotojo šešiakampio centras yra atkarpų AB ir CD sankirta O, dalijanti kiekvieną iš jų pusiau, atkarpa CD yra statmena šešiakampio kraštinei EF, o atkarpa AB – su ja lygiagreti (žr. pav.; todėl ir AB su CD tarpusavyje statmenos).

Tašką O sujungėme su šešiakampio kraštinėmis. Taip padalijome jį į šešis lygius lygiašonius trikampius. Kadangi $360°$ kampą su viršūne O padalijome į šešis lygius kampus, tai tų kampų dydžiai lygūs $360° : 6 = 60°$. Vadinasi, tada ir kiti du kiekvieno lygiašonio trikampio kampai lygūs po $\frac{180°-60°}{2} = 60°$. Šeši trikampiai ne tik lygiašoniai, bet ir lygiakraščiai (todėl $OB = OE = EF$). Kadangi trikampiai lygūs, tai kiekvieno iš jų plotas yra $60 : 6 = 10$.

Kita vertus, trikampio OEF plotas lygus pusei kraštinės ir į ją nuleistos aukštinės sandaugos $\frac{1}{2}(OD \cdot EF)$. Pasinaudokime tuo, kad atkarpos AB ir CD dalija viena kitą pusiau: $10 = \frac{1}{2}(OD \cdot EF) = \frac{1}{2}((\frac{1}{2}CD) \cdot OB) = \frac{1}{2}((\frac{1}{2}CD) \cdot (\frac{1}{2}AB)) = \frac{1}{8}(AB \cdot CD)$. Taip randame $AB \cdot CD = 8 \cdot 10 = 80$.

!! Jei per taškus C ir D nubrėšime tieses, lygiagrečias su atkarpa AB, o per A ir B – tieses, lygiagrečias su atkarpa CD, tai tos tiesės kirsis statmenai (nes atkarpos AB ir CD pačios stamenos). Besikirsdamos tiesės iškirs viena kitoje atkarpas, sudarančias keturkampį su stačiais kampais, t. y. stačiakampį $KLMN$ (žr. pav.). Trys lygiagrečios atkarpos KN, LM ir CD yra lygios, nes būdamos statmenos tiesėms KL ir MN, visos yra lygios atstumui tarp šių lygiagrečių tiesių. Taip pat lygios yra ir atkarpos KL, MN ir AB. Taigi stačiakampio krašinės lygios AB ir CD, o plotas yra $AB \cdot CD$.



Kaip ir ! dalyje, trikampio OFA plotas lygus $60 : 6 = 10$. Aukštinė FH šį lygiakraštį trikampį dalija į dvi lygias dalis, kurių plotas yra $10 : 2 = 5$. Stačiakampį $AHFL$ jo įžambinė taip pat dalija į dvi lygias dalis. Kadangi trikampio AFH plotas yra 5, tai ir trikampio AFL plotas yra 5. Stačiakampį $KLMN$ sudaro pradinis šešiakampis ir keturi trikampiai, kurių kiekvieno plotas, lygus 5, randamas taip pat. Viso stačiakampio plotas lygus $AB \cdot CD = 60 + 4 \cdot 5 = 80$.

14. **D** 60%

! Tarkime, kad klasėje yra b berniukų ir m mergaičių, iš viso $b+m$ vaikų. Mergaičių dalis klasėje lygi $\frac{m}{b+m} \cdot 100\%$.
Visų mokinių surinktą pažymių sumą pažymėkime s. Klasės pažymių vidurkis lygus $\frac{s}{b+m}$. Jei kievienas berniukas gautų 3 balais daugiau, tai pažymių suma padidėtų $3b$ ir būtų lygi $s + 3b$, o naujas vidurkis būtų lygus $\frac{s+3b}{b+m}$. Sudarykime lygtį:

$$\frac{s+3b}{b+m} = \frac{s}{b+m} + 1,2.$$

Pertvarkykime ją:

$$\frac{s+3b}{b+m} - \frac{s}{b+m} = 1,2, \qquad \frac{s+3b-s}{b+m} = 1,2,$$

$$\frac{3b}{b+m} = 1,2, \qquad \frac{b}{b+m} = 0,4,$$

$$1 - \frac{b}{b+m} = 1 - 0,4, \qquad \frac{m}{b+m} = 0,6.$$

Taigi mergaitės sudaro $0,6 \cdot 100\% = 60\%$ mokinių.

15. **D** D

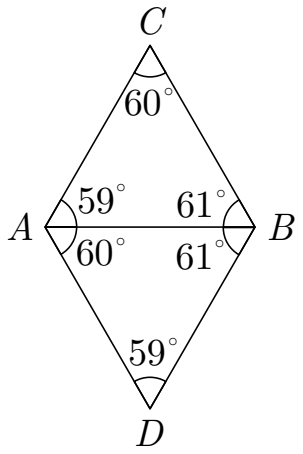
! Pažymėkime taškų koordinates $A(x_1; y_1)$ ir $C(x_2; y_2)$. Kadangi taškai A ir B priklauso tai pačiai horizontaliai tiesei (arba tam pačiam statmeniui, nuleistam į Oy ašį), tai jų koordinatė y yra ta pati. Be to, sutampa taškų C ir D koordinatė y, taškų A ir D koordinatė x, taškų B ir C koordinatė x. Todėl galime taip užrašyti taškus: $B(x_2; y_1)$ ir $D(x_1; y_2)$.
III ketvirčio taškų koordinatės yra neigiamos. Kuo taškas yra dešiniau, tuo jo koordinatė x didesnė. Kuo taškas yra aukščiau, tuo jo koordinatė y didesnė. Todėl $x_1 < x_2 < 0$ ir $y_1 < y_2 < 0$. Jei imsime neigiamų skaičių modulius, tai nelygybės apsivers: $|x_1| > |x_2| > 0$ ir $|y_1| > |y_2| > 0$.
Taškus A, B, C, D atitinka santykiai $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_2}{x_1}$. Šie neigiamų skaičių santykiai bus teigiami skaičiai, todėl nepakis, jei paimsime jų modulius: $\frac{|y_1|}{|x_1|}, \frac{|y_1|}{|x_2|}, \frac{|y_2|}{|x_2|}, \frac{|y_2|}{|x_1|}$.
Dabar, nagrinėjant vien teigiamus skaičius, nesunku suvokti, kuris santykis mažiausias: turime imti kuo mažesnį skaitiklį ir kuo didesnį vardiklį. T. y. skaičius bus mažesnis, jei imsime $|y_2|$, o ne $|y_1|$, ir $|x_1|$, o ne $|x_2|$. Santykis $\frac{|y_2|}{|x_1|}$ atitinka tašką D.

16. (D) 1952

! Kad rastume visas skaičiaus išskaidymo į du dauginamuosius galimybes, išskaidykime jį maksimaliai, užrašykime skaičių 2013 kaip pirminių skaičių sandaugą: $2013 = 3 \cdot 671 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Skaičiai $3, 11, 61$ yra pirminiai, jų neišskaidysi į mažesnius dauginamuosius. Iš jų reikia gauti tėvo ir sūnaus amžių. Imkime didžiausią iš trijų skaičių 61. Iš jo dalijasi arba tėvo, arba sūnaus amžius, kitaip juos sudauginę negausime 2013. Jei tai yra sūnaus amžius, tai tėvui lieka daugiausiai $3 \cdot 11 = 33$ metai. Bet $33 < 61$, taip būti negali, nes tėvas vyresnis už sūnų. Vadinasi, tėvo amžius dalijasi iš 61. Tačiau jei jis nėra lygus 61 metams, tai tų metų yra mažiausiai $61 \cdot 3 = 183$, o juk žmonės tiek negyvena. Todėl ponui Jonui yra 61 metai, o jo sūnui yra $2013 : 61 = 33$ metai. Ponas Jonas gimė $2013 - 61 = 1952$-aisiais metais.

17. (A) AD

! Raskime nepažymėtus trikampių kampus (žr. pav.): $\angle ABD = 180° - 59° - 60° = 61°; \angle BAC = 180° - 61° - 60° = 59°$. Matome, kad abu trikampiai turi tuos pačius kampus $59°, 60°, 61°$. Todėl trikampiai yra panašūs (bet ne lygūs!).



Trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė. Šią savybę pritaikykime dviem duotiesiems trikampiams. Trikampyje ABD turime $AB < BD < AD$, o trikampyje ABC turime $BC < AB < AC$, nes $59° < 60° < 61°$. Matome, kad ilgiausia atkarpa gali būti tik AD arba AC.

Kad palygintume šias skirtingų trikampių atkarpas, pasinaudokime trikampių panašumu. Panašiųjų trikampių atitinkamos kraštinės proporcingos. Imkime kraštines, esančias prieš 60° ir 61° kampus:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}, \qquad AC = \frac{AB}{BD} \cdot AD < AD.$$

Nelygybę gavome, pasinaudoję jau nustatytu faktu $AB < BD$. Taigi atkarpa AD ilgiausia.

18. (C) 2

! Mažiausiąjį iš penkių skaičių pažymėkime n. Turime skaičius $n, n+1, n+2, n+3, n+4$.

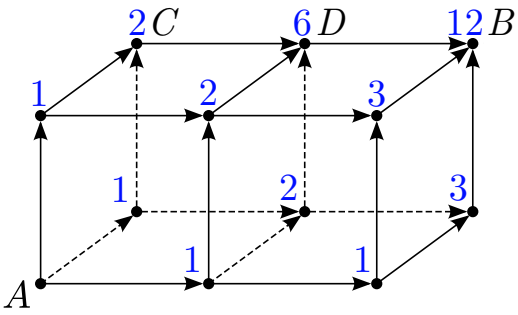
Pastebėkime, kad jau kai $n = 5$, sudėję net tris mažiausius iš penkių skaičių, gausime sumą, didesnę už likusių dviejų: $5 + 6 + 7 = 18 > 8 + 9 = 17$. Tokiu atveju norimos sumų lygybės nepavyks gauti. Jei imsime didesnes n reikšmes, nuo to mažiausias galimas sumų skirtumas tik didės. Iš tiesų jis lygus $n + (n+1) + (n+2) - (n+3) - (n+4) = n - 4$. Kai $n \geq 5$, tas skirtumas $n - 4 \geq 1$, todėl niekada nebus lygus 0.

Reikšmės $n = 2$ ir $n = 4$ tinka: $2 + 3 + 5 = 4 + 6$ ir $4 + 5 + 6 = 7 + 8$.

Reikšmės $n = 1$ ir $n = 3$ netinka. Greičiausias būdas tuo įsitikinti yra pastebėti, kad kai n yra nelyginis, tai visų penkių skaičių suma $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10$ yra nelyginė. Jei dviejų ir trijų skaičių sumos būtų lygios, tarkime, natūraliajam skačiui s, tai sudėję abi sumas gautume, kad nelyginė visų skaičių suma $5n + 10$ lygi lyginiam skaičiui $2s$. Taip negali būti.

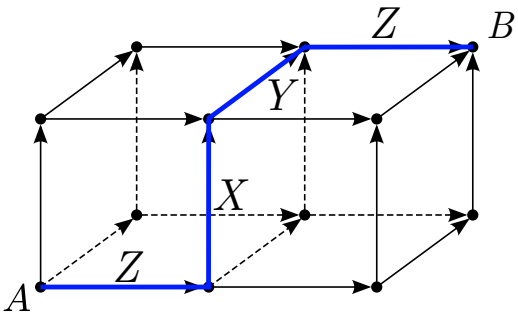
Gavome du skaičių penketus $2, 3, 4, 5, 6$ ir $4, 5, 6, 7, 8$.

19. (D) 12



! Pradėkime nuo taško A ir trijų jam gretimų viršūnių. Iš taško A į kiekvieną iš jų įmanoma patekti vienintelіu būdu, todėl pažymėkime jas skaičiumi 1. Toliau iš eilės nagrinėkime viršūnes, į kurias įmanoma patekti tik iš jau pažymėtųjų, ir prie kiekvienos nurodykime, keliais būdais į ją įmanoma patekti.

Pvz., imkime viršūnę C (žr. pav.). Į ją galima patekti iš dviejų viršūnių, pažymėtų skaičiumi 1: per vieną iš jų vienu būdu, per kitą iš jų vienu būdu, iš viso $1+1=2$ būdais. Taip pat samprotaudami skaičiumi 2 pažymime dar dvi viršūnes. Dabar nagrinėkime viršūnę D. Į ją galima patekti iš trijų viršūnių, pažymėtų skaičiumi 2: per vieną iš jų dviem būdais, per kitą iš jų dviem būdais, ir dviem būdais per trečią, iš viso $2+2+2=6$ būdais. Kiekvienu atveju užrašomas skaičius lygus gretimų viršūnių, iš kurių į pasirinktą viršūnę eina rodyklės, skaičių sumai. Dar vieną viršūnę pažymime skaičiumi 1, tada dar dvi viršūnes skaičiumi $1+2=3$. Pagaliau į viršūnę B galima patekti $3+3+6=12$ būdų.



!! Einant pagal rodykles, teks lygiai vieną kartą pakilti kraštine aukštyn (pavadinkime šį žingsnį X), lygiai vieną kartą kraštine teks žengti gilyn iš priekinės pavaizduoto stačiakampio gretasienio sienos į užpakalinę (pavadinkime šį žingsnį Y) ir lygiai du kartus teks kraštine žengti dešinėn (pavadinkime šį žingsnį Z). Visos rodyklės rodo viena iš šių trijų krypčių, o kol atitinkamo žingsnio neatlikome, jį galime atlikti bet kada. Vadinasi, patekimo į tašką B būdus galima sutapatinti su žingsnių X, Y, Z ir dar kartą Z kombinacijomis. Pvz., kombinaciją $ZXYZ$ atitinka kelias nuo A iki B, pavaizduotas paveikslėlyje.

Belieka rasti, keliais būdais galima išrikiuoti keturias raides X, Y, Z, Z. Visų pirma imkime raides ZZ. Raidę X galima prirašyti trimis būdais: XZZ, ZXZ, ZZX. Kiekvienu iš 3 atvejų likusią raidę Y galima prirašyti 4 būdais (įterpti į vieną iš dviejų tarpų, prirašyti pradžioje arba gale). Iš viso gauname $3 \cdot 4 = 12$ būdų.

20. (E) Teiginiai **A**–**D** klaidingi

! Jei šešių skaitmenų sandauga yra nelyginė, tai ir kiekvienas iš skaitmenų yra nelyginis. Šešių nelyginių skaitmenų suma visada lyginė, todėl informacija apie skaitmenų sumą yra bereikšmė. Ja šiame uždavinyje sąmoningai bandoma supainioti.

Kadangi nelyginiai yra lygiai šeši skaičiaus skaitmenys, o lyginio nei vieno, tai teiginiai A ir C negali būti teisingi.

Skaičius 111111 tenkina uždavinio sąlygą, todėl klaidingas ir teiginys B.

Iš viso tėra penki nelyginiai skaitmenys $1, 3, 5, 7, 9$, tad šešių skirtingų skaitmenų skaičius negali turėti. Todėl visada klaidingas yra ir teiginys D.

Pirmieji keturi teiginiai klaidingi.

21. (C) 13

! Kad nereiktų dalyti kampu, padarykime, kad vardiklyje būtų skaičiaus 10 laipsnis. Mums padeda tai, kad vardiklis dalijasi tik iš pirminių skaičių 2 ir 5, kurie yra skaičiaus 10 dalikliai:

$$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{1024 \cdot 1000} = \frac{1}{2^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{5^{10} \cdot 2^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{10^{10} \cdot 10^3} = \frac{5^{10}}{10^{13}}.$$

Dalyti natūralųjį skaičių iš skaičiaus 10 laipsnio 10^n jau paprasta: tiesiog parašome kablelį prieš n-ąjį skaitmenį iš dešinės (jei dalinys neturi pakankamai skaitmenų, prieš jį parašoma tiek nulių, kiek jų trūksta, kad skaičius turėtų $n+1$ skaitmenį). Gauname n skaitmenų po kablelio, bet jų gali sumažėti, jei dalinys baigiasi vienu ar keliais nuliais. Juos tada tiesiog turėtume nubraukti, kad paskutinis skaitmuo būtų nenulinis.

Daugindami natūralųjį skaičių, besibaigiantį skaitmeniu 5, iš 5, vėl gausime skaičių, besibaigiantį skaitmeniu 5. Todėl trupmenos skaitiklis 5^{10} baigiasi skaitmeniu 5, o ne 0, ir padaliję jį iš 10^{13} gausime 13 skaitmenų po kablelio, iš kurių paskutinis bus lygus 5, o ne 0.

22. (D) 6

! Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Jis dalijasi iš skaičiaus $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ (3, 11, 61 yra pirminiai skaičiaus 2013 dalikliai). Todėl skaičių n galime užrašyti pavidalu $n = 3^a \cdot 11^b \cdot 61^c \cdot m$, čia a, b, c, m yra natūralieji skaičiai ir skaičius m nesidalija nei iš 3, nei 11 ar 61. T. y. $3^a, 11^b, 61^c$ yra maksimalūs pirminių skaičių laipsniai, iš kurių dalijasi skaičius n.

Imkime bet kokį natūralųjį skaičių n_1. Jį taip pat galima užrašyti pavidalu $n_1 = 3^{a_1} \cdot 11^{b_1} \cdot 61^{c_1} \cdot m_1$, čia a, b, c yra neneigiami sveikieji skaičiai ir natūralusis skaičius m_1 nesidalija nei iš 3, nei 11 ar 61. Skaičiai a_1, b_1, c_1 gali būti lygūs 0, nes skaičius n_1 nebūtinai dalijasi iš 3, 11 ar 61. Skaičius n_1 yra skaičiaus n daliklis tada ir tik tada, jei $n : n_1 = 3^{a-a_1} \cdot 11^{b-b_1} \cdot 61^{c-c_1} \cdot \frac{m}{m_1}$ yra sveikasis skaičius. Taip yra tada ir tik tada, kai $0 \le a_1 \le a, 0 \le b_1 \le b, 0 \le c_1 \le c$, o m dalijasi iš m_1. Kiek galimybių mes turime taip parinkti skaičių? Skaičius a_1 gali įgyti $a+1$ reikšmę, skaičius b_1 – $b+1$ reikšmę, skaičius c_1 – $c+1$ reikšmę, o skaičius m_1 – tiek reikšmių, kiek skaičius m turi daliklių. Jei skaičius m turi d daliklių, tai iš viso turime $(a+1)(b+1)(c+1)d$ galimybių.

Nagrinėkime lygybę $(a+1)(b+1)(c+1)d = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Turime $a+1, b+1, c+1 \ge 1+1 = 2$. Jei ir $d \ge 2$, tai kairėje pusėje turime bent keturis nevientinius daugiklius, o dešinėje net maksimaliai išskaidę skaičių į pirminius skaičius, teturime tris nevienetinius daugiklius. Vadinasi, $d = 1$ ir skaičius m teturi vieną daliklį. Tačiau kiekvienas natūralusis skaičius dalijasi iš 1 ir iš savęs paties ir šie du dalikliai sutampa, tik kai tas skaičius lygus 1. Taigi $m = 1$.

Belieka rasti kiek natūraliųjų sprendinių turi lygtis $(a+1)(b+1)(c+1) = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Dešinėje turime vienintelį išskaidymą į tris nevienetinius daugiklius, gali skirtis tik jų tvarka. Todėl trys kairės pusės daugikliai turi tam tikra tvarka sutapti su dešinės pusės daugikliais. Gauname šešias galimybes ir šešis uždavinio sąlygą tenkinačius skačius:

1) $a+1 = 3, b+1 = 11, c+1 = 61$ ir $n = 3^2 \cdot 11^{10} \cdot 61^{60}$;
2) $a+1 = 3, b+1 = 61, c+1 = 11$ ir $n = 3^2 \cdot 11^{60} \cdot 61^{10}$;
3) $a+1 = 11, b+1 = 3, c+1 = 61$ ir $n = 3^{10} \cdot 11^2 \cdot 61^{60}$;
4) $a+1 = 11, b+1 = 61, c+1 = 3$ ir $n = 3^{10} \cdot 11^{60} \cdot 61^2$;
5) $a+1 = 61, b+1 = 3, c+1 = 11$ ir $n = 3^{60} \cdot 11^2 \cdot 61^{10}$;
6) $a+1 = 61, b+1 = 11, c+1 = 3$ ir $n = 3^{60} \cdot 11^{10} \cdot 61^2$.

23. (C) 3

! Tarkime, kad Linas suglaudė m trikampių, o mažiausias bendraviršūnis kampas turi n laipsnių. Tada bendraviršūniai kampai turės po $n, 2n, 3n, ..., mn$ laipsnių. Sudėję juos, gausime pilnąjį kampą $360°$. Turime lygybę $n + 2n + 3n + ... + mn = 360$. Jos kairiajai pusei pritaikykime aritmetinės progresijos sumos formulę: $n+2n+3n+...+mn = n(1+2+3+...+m) = n \cdot \frac{m(m+1)}{2}$.

Iš eilės tikrinkime mažiausias n reikšmes.

Kai $n = 1$, tai $\frac{m(m+1)}{2} = 360$. Pertvarkę lygtį matome, kad tai yra kvadratinė lygtis: $m^2 + m - 720 = 0$. Jos diskriminantas $D = 1 + 4 \cdot 720 = 2841 = 3 \cdot 947$ dalijasi iš 3, bet ne iš 9, todėl iš jo ištraukta šaknis, o kartu ir lygties šaknys nėra sveikieji skaičiai. Kad lygtis $\frac{m(m+1)}{2} = 360$ neturi natūraliųjų sprendinių (juk tik jie mums rūpi), galima pastebėti ir kitaip. Kai $m \leq 26$, tai $\frac{m(m+1)}{2} \leq \frac{26 \cdot 27}{2} = 13 \cdot 27 < 360$. O kai $m \geq 27$, tai $\frac{m(m+1)}{2} \geq \frac{27 \cdot 28}{2} = 14 \cdot 27 > 360$.

Kai $n = 2$, tai $m(m + 1) = 360$ arba $m^2 + m - 360 = 0$. Diskriminantas $D = 1 + 4 \cdot 360 = 1441 = 11 \cdot 131$ dalijasi iš 11, bet ne iš $11^2 = 121$, todėl iš jo ištraukta šaknis, o kartu ir lygties šaknys nėra sveikieji skaičiai. Kad lygtis $m(m+1) = 360$ neturi natūraliųjų sprendinių, galima pastebėti ir kitaip. Kai $m \leq 18$, tai $m(m + 1) \leq 18 \cdot 19 < 360$. O kai $m \geq 19$, tai $m(m + 1) \geq 19 \cdot 20 > 360$.

Kai $n = 3$, tai $3 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 360$ arba $m^2 + m - 240 = 0$. Ši lygtis turi natūraliąją šaknį $m = 15$ (kita šaknis $m = -16$). Vadinasi, įmanoma suglausti 15 trikampių, imant mažiausią bendraviršūnį kampą, lygų $3°$.

24. (E) Skaičiaus 2013 negausime

! Iš trejeto 1, 2, 3 gausime trejetą 3, 4, 5, tada 7, 8, 9, tada 15, 16, 17 ir t. t. Gautieji skaičių trejetai yra gretimų natūraliųjų skaičių trejetai. Kas atsitinka su tokiais trejetais $n, n+1, n+2$ po operacijos „SUMOS"? Gauname naują trejetą $n+(n+1), n+(n+2), (n+1)+(n+2)$ arba $2n + 1, 2n + 2, 2n + 3$. Vėl gavome tris gretimus skaičius. Todėl pradėjus nuo trijų gretimų skaičių, skaičiai kiekviename iš gautųjų trejetų bus gretimi. Dar pastebėkime, kad naujojo trejeto skaičiai yra apytiksliai dvigubai didesni. Tiksliau, vietoj vidurinio iš trijų skaičių $n+1$ gauname lygiai dusyk didesnį vidurinį skaičių $2n+2$. Pradinis vidurinis skaičius yra 2. Vietoj jo po pirmos operacijos gausime $2 \cdot 2 = 4$, tada $2 \cdot 4 = 8$, toliau 16, 32, 64 ir t. t.

Kiekviename gautame skaičių trejete vidurinis skaičius bus dvejeto laipsnis. Kiekvienas trejetas turės pavidalą $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$, čia $n = 1, 2, 3, ...$ Bet skaičius 2013 ir jam gretimi skaičiai 2012 bei 2014 yra tarp dvejeto laipsnių $2^{10} = 1024$ ir $2^{11} = 2048$, nei vienas iš jų pats nėra dvejeto laipsnis. Todėl skaičius 2013 jokiam skaičių trejetui, kurį gausime atlikdami operaciją, nepriklausys.

25. (B) 15

? Tarkime, surašius skaičius tam tikra tvarka $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$, mažiausioji iš sumų $s_1 = x_1 + x_2 + x_3, s_2 = x_2 + x_3 + x_4, ..., s_{10} = x_{10} + x_1 + x_2$ lygi s.

Bandykime įvertinti s. Kievienas iš ratu surašytų skaičių panaudotas skaičiuojant lygiai tris iš sumų. Todėl jei sudėsime visas 10 sumų, tai gausime skaičių $s_1 + s_2 + ... + s_{10} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + ... + 10 \cdot 3 = (1 + 2 + ... + 10) \cdot 3 = 55 \cdot 3 = 165$. Kita vertus, kiekviena suma ne mažesnė už s, todėl visų 10 sumų suma $165 = s_1 + s_2 + ... + s_{10} \geq 10s$. Gauname 16,5$\geq s$, tad $s \leq 16$.

Galima rasti pavyzdį, kur $s = 15$. Pvz., surašykime skaičius ratu tokia tvarka: $1, 5, 9, 7, 2, 6, 8, 3, 4, 10$. Gauname tokias sumas: $15, 21, 18, 15, 16, 17, 15, 17, 15, 16$. Reikšmės $s = 16$ gauti nepavyks, tad natūralu spėti, kad $s = 15$ yra didžiausia galima reikšmė.

! Sunkiausia uždavinio dalis yra įsitikinti, kad neįmanoma gauti $s = 16$. Tam reikia bandyti kiek griežčiau įvertinti 10 sumų. Pastebėkime, kad dvi gretimos trijų skaičių sumos negali būti lygios. Pvz., jei $s_2 = s_3$, tai $x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5$ ir $x_2 = x_5$. Lygiai taip pat $s_1 \neq s_2, s_3 \neq s_4, s_4 \neq s_5, ..., s_9 \neq s_{10}, s_{10} \neq s_1$. Tai reiškia, kad jei kuri nors suma lygi s, tai jai gretimos sumos jau ne mažesnės nei $s + 1$.

Tarkime, kad $s = 16$. Tada bent viena iš sumų s_1 ir s_2 ne mažesnė už 17, bent viena iš sumų s_3 ir s_4 ne mažesnė už 17, ..., bent viena iš sumų s_9 ir s_{10} ne mažesnė už 17. Vadinasi, $s_1 + s_2 \geq 16 + 17 = 33, s_3 + s_4 \geq 16 + 17 = 33, ..., s_9 + s_{10} \geq 16 + 17 = 33$. Jei bent viena iš šių penkių nelygybių yra griežta, tai $165 = s_1 + s_2 + ... + s_{10} > 33 \cdot 5 = 165$. Todėl visos šios nelygybės yra lygybės: $s_1 + s_2 = 16 + 17, s_3 + s_4 = 16 + 17, ..., s_9 + s_{10} = 16 + 17$. Kiekvienoje sumų poroje viena suma lygi 16, o kita 17.

Jei $s_1 = s_4 = 16$ arba 17, tai $s_2 = s_3 = 17$ arba 16. Jau minėjome, kad dvi gretimos sumos negali būti lygios, todėl $s_1 \neq s_4$. Analogiškai $s_2 \neq s_5$. Vadinasi, $s_1 + s_4 = 16 + 17$ ir $s_2 + s_5 = 16 + 17$. Nagrinėkime reiškinį $(s_1 - s_2) + (s_4 - s_5) = ((x_1 + x_2 + x_3) - (x_2 + x_3 + x_4)) + ((x_4 + x_5 + x_6) - (x_5 + x_6 + x_7) = (x_1 - x_4) + (x_4 - x_7) = x_1 - x_7$. Jis lygus $(s_1 - s_2) + (s_4 - s_5) = (s_1 + s_4) - (s_2 + s_5) = (16 + 17) - (16 + 17) = 0$. Gavome prieštarą. Tad $s \neq 16$.

26. (D) 10

! Visų 11 natūraliųjų skaičių gauti nepavyks. Iš tiesų skaičius 17 nedalija jokio iš kitų skaičių, o pats dalijasi tik iš skaičiaus 1. Todėl jis turėtų būti vienoje poroje su skaičiumi 1. Bet tas pats galioja ir kitam dideliam pirminiam skaičiui 19. Jis taip pat turi būti vienoje poroje su skaičiumi 1, bet šis jau „užimtas".

Nėra sunku rasti tokį skaičių suskirstymą į poras, kad gautume 10 natūraliųjų skaičių. Nepatogiausius skaičius 17 ir 19 sudėkime į vieną porą. Dar vieną didelį pirminį skaičių 13 esame priversti poruoti su skaičiumi 1. O pirminį skaičių 11 jau galime suporuoti su skaičiumi 22. Didesniuosius lyginius skaičius stenkimės poruoti su dvigubai mažesniais. Vienas iš galimų variantų yra toks:

$$\frac{22}{11} = 2, \frac{21}{7} = 3, \frac{20}{10} = 2, \frac{19}{17}, \frac{18}{9} = 2, \frac{16}{8} = 2,$$
$$\frac{15}{5} = 3, \frac{14}{2} = 7, \frac{13}{1} = 13, \frac{12}{4} = 3, \frac{6}{3} = 2.$$

27. (C) 91

! Jungiant bet kurias tris trylikakampio viršūnes, iš viso galima gauti $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 22$ trikampių (derinių skaičius). Nustatykime, kiek tokiu būdu galima gauti trikampių, netenkinančių uždavinio sąlygos.
Apie trylikakampį apibrėžkime apskritimą. Jo centras sutaps su trylikakampio centru. Pasirinkime dvi trylikakampio viršūnes A ir B. Jos dalija apskritimą į du nelygius lankus (iš likusių $13 - 2 = 11$ viršūnių trumpesniajam priklausys daugiausiai 5, o didesniajam – bent 6 lygiais tarpais išsidėsčiusios viršūnės). Pasirinkime trečią trylikakampio viršūnę ir gausime trikampį ABC. Jei C priklausys trumpesniajam lankui, tai kampas ACB remsis į ilgesnįjį lanką, kurio ilgis viršija pusę apskritimo ilgio, ir bus bukasis. Jei C priklausys ilgesniajam lankui, tai kampas ACB remsis į trumpesnįjį lanką ir bus smailusis.

Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra trikampio viduje tada ir tik tada, kai trikampis yra smailusis. Tad jei norime gauti trikampį, netenkinantį uždavinio sąlygos, turime gauti bukąjį trikampį: taip parinkti trylikakampio viršūnes, kad viena iš jų priklausytų trumpesniajam iš tų lankų, į kuriuos apibrėžtąjį apskritimą dalija kitos dvi viršūnės. Mums reikia nustatyti, keliais būdais tai galima padaryti.

Pirmiau rinkimės trikampio ABC kraštinę AB, o tada trečiąją trikampio viršūnę C taip, kad kampas ACB būtų bukasis. Kiekviena apibrėžtojo apskritimo styga AB, jungianti dvi trylikakampio viršūnes A ir B, dalija apskritimą į du lankus, kurių trumpesniajam, neskaitant jo galų A ir B, priklauso 5, 4, 3, 2, 1 arba 0 trylikakampio viršūnių. Kiekvienu atveju būdų stygai AB parinkti bus 13 (imame bet kurią vieną iš 13 viršūnių, o antrąją parenkame vienareikšmiškai kaip esančią už atitinkamai 5, 4, 3, 2, 1 arba 0 viršūnių pagal laikrodžio rodyklę). Kiekvienu atveju pasirinkti trečiąją viršūnę C trumpesniajame lanke bus atitinkamai 5, 4, 3, 2, 1 arba 0 būdų. Iš viso gauname $13 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 13 \cdot 15$ būdų.

Trikampių, tenkinačių uždavinio sąlygą, skaičius lygus $13 \cdot 22 - 13 \cdot 15 = 13 \cdot 7 = 91$.

28. (C) 75 km/h

! Automobilis, išvažiavęs k valandų vėliau už pirmąjį, važiuoja $(50+k)$ km/h greičiu (kas valandą išvažiuojančių automobilų greitis didėja po 1 km/h). Čia $k = 0, 1, 2, ..., 50$. Praėjus 100 valandų nuo pirmojo automobilio išvykimo automobilis, praleidęs pirmąsias k valandų, važiavo $100 - k$ valandų ir todėl nuvažiavo $(100 - k)(50 + k) = -k^2 + 50k + 5000$ kilometrų.

Mums rūpi automobilis, spėjęs nuvažiuoti didžiausią atstumą. Su kuria iš reikšmių $k = 0, 1, 2, ..., 50$ kvadratinė funkcija $-k^2+50k+5000$ įgyja didžiausią reikšmę? Tai galima nustatyti ištiriant jos grafiką (parabolę). Kitas būdas būtų išskirti pilnąjį kvadratą: $-k^2 + 50k + 5000 = -(k^2 - 50k) + 5000 = -(k^2 - 2 \cdot 25k + 25^2 - 25^2) + 5000 = -(k - 25)^2 + 25^2 + 5000 = -(k - 25)^2 + 5625$. Matome, kad funkcija įgyja didžiausią reikšmę, kai kvadratas $(k - 25)^2$ įgyja mažiausią galimą reikšmę 0. Taip nutiks, kai $k = 25$. Gauname ieškomą automobilio greitį $50 + k = 75$ km/h.

29. (C) 52

! Sunumeruokime medžius iš eilės nuo 1-ojo iki 100-ojo.

Pasirinkime pirmuosius 6 medžius, tada 6 medžius praleiskime ir pasirinkime 6 medžius nuo 13-ojo iki 18-ojo, tada vėl 6 medžius praleiskime ir pasirinkime 6 medžius nuo 25-ojo iki 30-ojo, ir t. t. Įsisitikinkime tuo, kad visi šie medžiai gali būti ąžuolai. Jei du medžiai priklauso tam pačiam gretimų medžių šešetui, tai tarp jų ne daugiau nei 4 medžiai. Jei du medžiai priklauso skirtingiems šešetams, tai tarp jų mažiausiai 6 medžiai. Kiekgi pasirinkome medžių? Pirmieji 96 medžiai pasidalija į $96 : 6 = 16$ šešetų. Mes pasirinkome kas antrą iš jų, taigi pasirinkome pusę visų šių medžių arba $96 : 2 = 48$ medžius. Be to, pasirinkome nepilną 17-ąjį „šešetą" iš paskutiniųjų keturių medžių. Iš viso turime 52 medžius, kurie visi gali būti ąžuolai.

Įrodykime, kad daugiau ąžuolų būti negali. Imkime bet kuriuos 12 iš eilės einančių medžių. Sunumeruokime juos iš eilės nuo 1-ojo iki 12-ojo ir suskirstykime juos į 6 poras: 1-ąjį ir 7-ąjį, 2-ąjį ir 8-ąjį, ..., 6-ąjį ir 12-ąjį. Kiekvienoje poroje tarp medžių yra lygiai penki kiti, todėl kiekvienoje poroje yra daugiausiai vienas ąžuolas. Taigi ąžuolai sudaro daugiausiai pusę visų 12 medžių. Dabar vėl imkime pirmuosius 96 medžius ir suskirstykime juos į $96 : 12 = 8$ gretimų medžių tuzinus. Kiekviename tuzine ne daugiau nei pusė medžių yra ąžuolai, todėl ir tarp 96 medžių bus daugiausiai $96 : 2 = 48$ ąžuolai. Dar nepaminėjome 4 paskutiniųjų medžių. Kartu su jais iš viso gali būti daugiausiai $48 + 4 = 52$ ąžuolai.

30. **B** 35 m

! Ieškomą vamzdžio ilgį metrais pažymėkime l. Ūkininko greitį pažymėkime v_u (m/s), o traktoriaus – v_t (m/s).

Kai ūkininkas pradėjo eiti palei vamzdį jo judėjimo kryptimi, iki antrojo vamzdžio galo jį skyrė atstumas l (m), jis judėjo greičiu v_u (m/s), o antrasis vamzdžio galas – ta pačia kryptimi greičiu v_t (m/s). Kai du objektai juda ta pačia kryptimi, juos skiriantis atstumas kinta taip pat, kaip jis kistų vienam iš objektų nejudant, o kitam judant greičiu, lygiu jo ir kito objekto greičių skirtumui. Todėl ūkininkas antrąjį vamzdžio galą pasivijo per laiką $\frac{l}{v_u-v_t}$ (s). Per šį laiką ūkininkas nuėjo $\frac{l}{v_u-v_t} \cdot v_u$ metrų ir tiek pat žingsnių.

Kai ūkininkas pradėjo eiti palei vamzdį priešinga kryptimi, iki antrojo vamzdžio galo jį skyrė atstumas l (m), jis judėjo greičiu v_u (m/s), o antrasis vamzdžio galas – priešinga kryptimi greičiu v_t (m/s). Kai du objektai juda priešingomis kryptimis, juos skiriantis atstumas kinta taip pat, kaip jis kistų vienam iš objektų nejudant, o kitam judant greičiu, lygiu jo ir kito objekto greičių sumai. Todėl ūkininkas antrąjį vamzdžio galą pasivijo per laiką $\frac{l}{v_u+v_t}$ (s). Per šį laiką ūkininkas nuėjo $\frac{l}{v_u+v_t} \cdot v_u$ metrų ir tiek pat žingsnių.

Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{l}{v_u-v_t} \cdot v_u = 140, \\ \frac{l}{v_u+v_t} \cdot v_u = 20. \end{cases}$$

Išsireikškime iš abiejų lygčių l:

$$\begin{cases} l = 140\frac{v_u-v_t}{v_u} = 140(1-\frac{v_t}{v_u}), \\ l = 20\frac{v_u+v_t}{v_u} = 20(1+\frac{v_t}{v_u}). \end{cases}$$

Dabar iš abiejų lygčių išsireikškime $\frac{v_t}{v_u}$:

$$\frac{v_t}{v_u} = 1 - \frac{l}{140} = \frac{l}{20} - 1.$$

Išspręskime gautąją lygtį l atžvilgiu:

$$\frac{l}{140} + \frac{l}{20} = 2,$$

$$l\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{20}\right) = 2,$$

$$l = \frac{2}{\frac{1}{140}+\frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{8}{140}} = \frac{2 \cdot 140}{8} = 35 \text{ (m)}.$$

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	C
3	C
4	C
5	C
6	E
7	E
8	C
9	D
10	C
11	D
12	B
13	D
14	D
15	D
16	D
17	A
18	C
19	D
20	E
21	C
22	D
23	C
24	E
25	B
26	D
27	C
28	C
29	C
30	B