Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Kadetas

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Paulius Drungilas

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

© Paulius Drungilas, 2013
© Kengūros organizavimo komitetas, 2013

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašai **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Sprendimai **13**

Atsakymai **22**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 7–8 klasių (*Kadeto* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Nykštukas, 1 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Nykštukas, 2 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Lygiakraščio trikampio plotas lygus 9. Trys tiesės, lygiagrečios trikampio kraštinėms, dalija kiekvieną iš jų į tris lygias dalis. Kam lygus pilkosios trikampio dalies plotas?

A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

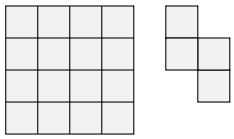
2. Aišku, kad lygybė $\frac{1111}{101} = 11$ yra teisinga. Kam lygi reiškinio $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$ reikšmė?

A) 5 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 55 **E)** 99

3. Skirtumas tarp skaičiaus 7 didžiausio dviženklio kartotinio ir skaičiaus 7 mažiausio dviženklio kartotinio lygus:

A) 70 **B)** 77 **C)** 84 **D)** 91 **E)** 98

4. Kvadratinio popieriaus lapo abi pusės padalytos į mažus kvadratėlius (žr. kairįjį pav.). Kirpdama per kvadratėlių kraštines, Onutė iškirpinėja vienodas figūras, kaip kad pavaizduotoji dešiniajame paveikslėlyje. Kiek mažiausiai nepanaudotų kvadratėlių jai gali likti?



A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

5. Antanas lentoje parašė mažiausią natūralųjį skaičių, kurio skaitmenų sandauga lygi 24. Kam lygi šio skaičiaus skaitmenų suma?

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

6. Dėžėje yra keturių skirtingų spalvų rutuliai: 2 raudoni, 3 mėlyni, 4 žali ir 5 juodi. Atsitiktinai iš dėžės imami rutuliai ir negrąžinami atgal į dėžę. Kiek mažiausiai rutulių reikia paimti iš dėžės, kad tarp paimtų rutulių būtinai būtų bent du tos pačios spalvos rutuliai?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 14

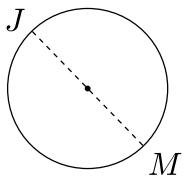
7. Algimantas kas 10 minučių uždega po žvakę. Kiekviena žvakė sudega per 40 minučių. Kiek žvakių degs praėjus 55 minutėms nuo tada, kai Algimantas uždegė pirmąją?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8. Yra penkios šeimos. Vidutinis šių šeimų vaikų skaičius negali būti lygus:

A) 0,2 **B)** 1,2 **C)** 2,2 **D)** 2,4 **E)** 2,5

9. Martynas ir Jūratė stovi apskrito fontano priešingose pusėse (žr. pav.). Jie abu tuo pačiu metu pradeda bėgti apie fontaną pagal laikrodžio rodyklę. Martyno greitis lygus $\frac{9}{8}$ Jūratės greičio. Kiek kartų Jūratė bus apibėgusi apie fontaną, kai Martynas pirmą kartą ją pasivys?



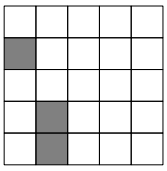
A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 2 **E)** 72

10. Natūralieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ ir $z \cdot x = 35$. Kam lygus skaičius $x + y + z$?

A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

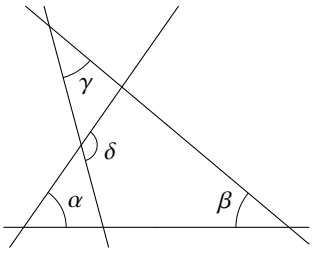
Klausimai po 4 taškus

11. Leticija su drauge 5×5 lentelėje žaidžia žaidimą „laivų mūšis“ ir joje pažymėjo du laivus (žr. pav.). Keliais būdais Leticija šioje lentelėje gali pažymėti trijų langelių laivą (t.y. 3×1 arba 1×3), kad jokie du lentelėje pažymėti laivai neturėtų nė vieno bendro taško?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

12. Brėžinyje kampai $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ ir $\gamma = 35°$. Kam lygus kampas δ?

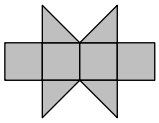
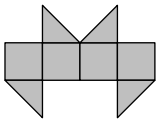
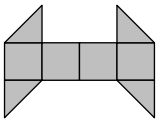
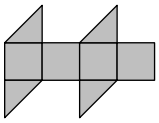
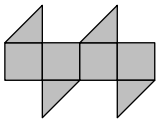


A) 100° **B)** 105° **C)** 120° **D)** 125° **E)** 130°

13. Trapecijos visų kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai, o jos perimetras lygus 5. Kam lygūs du mažiausi trapecijos kampai?

A) 30° ir 30° **B)** 60° ir 60° **C)** 45° ir 45° **D)** 30° ir 60° **E)** 45° ir 90°

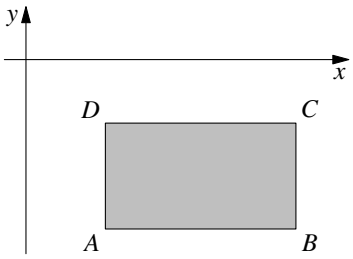
14. Iš kurios figūros, lankstant per pažymėtas linijas, neįmanoma išlankstyti kubo?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

15. Romualdas lentoje parašė kelis iš eilės einančius natūraliuosius skaičius. Kuris iš žemiau išvardytų skaičių negali būti lentoje parašytų nelyginių skaičių procentų skaičius?

A) 40 **B)** 45 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 60

16. Paveikslėlyje pavaizduotas stačiakampis $ABCD$, kuris yra žemiau koordinačių ašies Ox ir dešiniau koordinačių ašies Oy. Stačiakampio kraštinės yra lygiagrečios koordinačių ašims, kiekvienos jo viršūnės abi koordinatės yra sveikieji skaičiai. Kiekvienai stačiakampio $ABCD$ viršūnei suskaičiuojame jos koordinačių santykį $\frac{y}{x}$. Kuriai stačiakampio viršūnei šis santykis yra mažiausias?

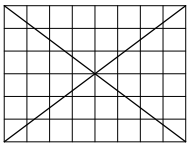


A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** To neįmanoma nustatyti

17. Lentoje didėjimo tvarka surašyti visi keturženkliai skaičiai, gaunami perstatant skaičiaus 2013 skaitmenis vietomis. Kam lygus didžiausias skirtumas tarp gretimų lentoje parašytų skaičių?

A) 702 **B)** 703 **C)** 693 **D)** 793 **E)** 198

18. Paveikslėlyje pavaizduotame 6×8 stačiakampyje lygiai 24 langelių nekerta nė viena šio stačiakampio įstrižainė. Kiek 6×10 stačiakampio langelių nekirs nė viena jo įstrižainė?



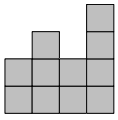
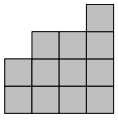
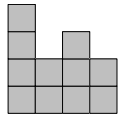
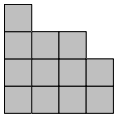
A) 28 **B)** 29 **C)** 30 **D)** 31 **E)** 32

19. Arūno, Birutės, Cecilijos, Donato ir Elenos gimimo datos yra šios: 2001-02-20, 2000-03-12, 2001-03-20, 2000-04-12 ir 2001-04-23 (metai-mėnuo-diena). Arūnas ir Elena gimė tą patį mėnesį. Taip pat ir Birutė su Cecilija yra gimusios tą patį mėnesį. Arūnas ir Cecilija gimė skirtingų mėnesių tą pačią dieną. Donatas ir Elena taip pat gimė skirtingų mėnesių tą pačią dieną. Kuris iš vaikų yra jauniausias?
A) Arūnas **B)** Birutė **C)** Cecilija **D)** Donatas **E)** Elena

20. Jonas iš kubelių sudėjo statinį. Paveikslėlyje greta pavaizduotas statinio vaizdas iš viršaus. Ant kiekvieno viršutinio kubelio yra užrašytasis skaičius nurodo, kelių kubelių aukščio yra atitinkamas bokštas. Kokį vaizdą matys Jonas, žiūrėdamas į statinį?

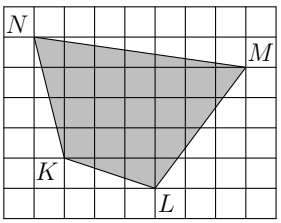
Jonas

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

A) **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Klausimai po 5 taškus

21. Languotame popieriaus lape, kurio kiekvieno langelio kraštinės ilgis yra 2, nupieštas keturkampis $KLMN$ (žr. pav.). Taškai K, L, M ir N yra langelių viršūnės. Kam lygus keturkampio $KLMN$ plotas?
A) 96 **B)** 84 **C)** 76 **D)** 88 **E)** 104



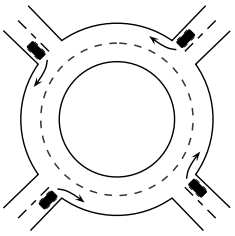
22. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2013^6 išrinkime tuos, kurie yra sveikojo skaičiaus kvadratas, o jų kiekį pažymėkime raide S. Iš tų pačių natūraliųjų skaičių išrinkime tuos, kurie yra sveikojo skaičiaus kubas, o jų kiekį pažymėkime raide Q. Tada:
A) $S = Q$ **B)** $2S = 3Q$ **C)** $3S = 2Q$ **D)** $S = 2013Q$ **E)** $S^3 = Q^2$

23. Jonas lentoje užrašė penkiaženklį skaičių, o nutrynęs vieną jo skaitmenį gavo keturženklį skaičių. Šio keturženklio skaičiaus ir pradinio penkiaženklio skaičiaus suma lygi 52713. Kam lygi pradinio penkiaženklio skaičiaus skaitmenų suma?
A) 26 **B)** 20 **C)** 23 **D)** 19 **E)** 17

24. Sodininkas į eilę pasodino 20 medžių (klevų ir liepų). Nėra tokių dviejų klevų, tarp kurių augtų lygiai trys medžiai. Kiek daugiausiai klevų gali būti iš šių 20 medžių?
A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

25. Artūras ir Dainius dalyvavo bėgimo varžybose. Dalyvių, užėmusių žemesnes už Artūrą vietas, buvo dvigubai daugiau nei dalyvių, užėmusių aukštesnes už Dainių vietas. Dalyvių, užėmusių žemesnes už Dainių vietas, buvo pusantro karto daugiau nei dalyvių, užėmusių aukštesnes už Artūrą vietas. Artūras užėmė 21 vietą. Kiek mokinių dalyvavo varžybse?
A) 31 **B)** 41 **C)** 51 **D)** 61 **E)** 81

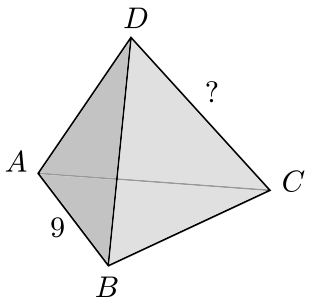
26. Keturios mašinos tuo pačiu metu skirtingais keliais įvažiuoja į žiedinę sankryžą (žr. pav.). Mašinos, žiedinėje sankryžoje apvažiavusius mažiau nei vieną ratą, išvažiuoja iš sankryžos skirtingais keliais. Kiek yra skirtingų būdų mašinoms išvažiuoti iš žiedinės sankryžos?
A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 81



27. Kiekvienas sekos 1, −1, −1, 1, −1, −1, 1, ... narys (pradedant trečiuoju) lygus dviejų prieš jį einančių narių sandaugai. (Pavyzdžiui, šeštasis sekos narys lygus penktojo ir ketvirtojo sandaugai.) Kam lygi pirmųjų 2013 šios sekos narių suma?
A) -1006 **B)** -671 **C)** 0 **D)** 671 **E)** 1007

28. Mama vaikams vieną po kito kepė 6 lietinius (numeruokime lietinius paeiliui skaičiais nuo 1 iki 6). Vaikai retkarčiais įbėgdavo į virtuvę ir suvalgydavo karščiausią lietinį. Kuria tvarka vaikai negalėjo suvalgyti visų šešių lietinių?
A) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ **B)** $1, 2, 5, 4, 3, 6$ **C)** $3, 2, 5, 4, 6, 1$ **D)** $4, 5, 6, 2, 3, 1$ **E)** $6, 5, 4, 3, 2, 1$

29. Kiekviena iš keturių tetraedro viršūnių ir kiekviena iš šešių jo briaunų pažymėta vienu iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 11 (skaičius 10 praleistas). Kiekvienas iš šių skaičių panaudotas lygiai vieną kartą. Bet kuriose dviejose viršūnėse pažymėtų skaičių suma lygi tas viršūnes jungiančios briaunos skaičiui. Briauna AB pažymėta skaičiumi 9 (žr. pav.). Kokiu skaičiumi pažymėta briauna CD?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 11

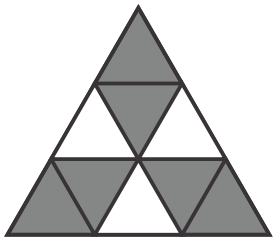


30. Natūralusis skaičius N yra mažesnis už trijų didžiausių savo daliklių (neskaitant paties skaičiaus N) sumą. Kuris iš teiginių yra teisingas?
A) Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 4 **B)** Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 5
C) Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 6 **D)** Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 7
E) Tokio skaičiaus N nėra

Sprendimai

1. (D) 6

! Padalykime trikampį į 9 lygius lygiakraščius trikampėlius, kaip parodyta paveikslėlyje. Tada pilkoji pradinio trikampio dalis sudaryta iš 6 trikampėlių, kurių kiekvieno plotas lygus 1. Taigi pradinio trikampio pilkosios dalies plotas lygus 6.



2. (D) 55

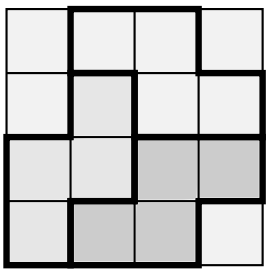
! Kadangi $\frac{3333}{101} = 3 \cdot \frac{1111}{101} = 33$ ir $\frac{6666}{303} = \frac{6}{3} \cdot \frac{1111}{101} = 22$, tai $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303} = 55$.

3. (C) 84

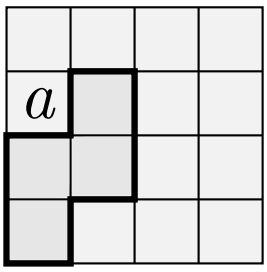
! Didžiausias skaičiaus 7 dviženklis kartotinis yra 98, o mažiausias – 14, todėl ieškomas skirtumas lygus $98 - 14 = 84$.

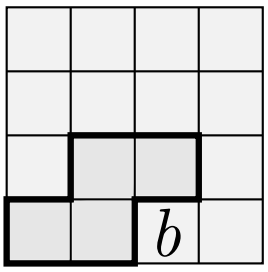
4. (C) 4

! Iš duoto popieriaus lapo galima iškirpti tris figūras (šiuo atveju lieka keturi nepanaudoti kvadratėliai):



Paaiškinsime, kodėl iškirpti keturių figūrų neįmanoma. Iš tikrųjų, jei iš duoto kvadratinio popieriaus lapo būtų įmanoma iškirpti keturias figūras, tai turėtume panaudoti visus 16 langelių. Apatinį kairįjį langelį galima būtų iškirpti dviem būdais:





Tačiau pirmuoju atveju nebeįmanoma iškirpti a langelio, o antruoju – b langelio.

5. (E) 11

! Antanas lentoje negalėjo parašyti vienaženklio skaičiaus, nes tokio skaičiaus skaitmenų sandauga taip pat yra vienaženklis skaičius, kuris nelygus 24.

Skaičiaus 38 skaitmenų sandauga lygi $3 \cdot 8 = 24$, todėl Antanas lentoje parašė dviženklį skaičių. Jei dviženklio skaičiaus pirmasis skaitmuo yra 1 arba 2, tai jo skaitmenų sandauga ne didesnė už $2 \cdot 9 = 18$. Vadinasi, skaičius 38 yra pats mažiausias natūralusis skaičius, kurio skaitmenų sandauga lygi 24.

6. (C) 5

! Iš viso turime 4 spalvų rutulius, todėl, iš dėžės išėmus 5 rutulius, bent du iš jų bus tos pačios spalvos. Kita vertus, 4 rutulių neužtenka: ištraukus po vieną raudoną, mėlyną, žalią ir juodą rutulį, visi šie rutuliai bus skirtingų spalvų.

7. (C) 4

! Per 55 minutes (skaičiuoti pradedant nuo pirmosios žvakės uždegimo) Algimantas iš viso uždega 6 žvakes. Per šį laiko tarpą sudega pirmoji ir antroji žvakės, o trečiajai žvakei degti lieka 5 minutės. Taigi praėjus 55 minutėms nuo pirmosios žvakės uždegimo vis dar degs $6 - 2 = 4$ žvakės.

8. (E) $2,5$

! Vidutinis penkių šeimų vaikų skaičius gaunamas bendrą visų šių šeimų vaikų skaičių padalijus iš 5. Vadinasi, iš viso penkiose šeimose esančių vaikų skaičius yra penkis kartus didesnis už vidurkį. Kadangi skaičius $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ nėra sveikasis, tai vidutinis penkių šeimų vaikų skaičius negali būti 2,5.

Įsitikinsime, kad **A**–**D** atsakymuose nurodyti vidurkiai yra galimi. Vidutinį visų šeimų vaikų skaičių pažymėkime v. Jei pirmoje šeimoje yra vienas vaikas, o kitos šeimos vaikų neturi, tai $v = \frac{1}{5} = 0,2$. Jei pirmoje šeimoje yra du vaikai, o likusiose – po vieną, tai $v = \frac{6}{5} = 1{,}2$. Jei pirmoje šeimoje yra trys vaikai, o likusiose – po du, tai $v = \frac{11}{5} = 2{,}2$. Ir, pagaliau, jei pirmoje šeimoje yra keturi vaikai, o likusiose – po du, tai $v = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

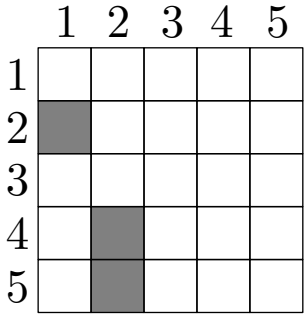
9. (A) 4

! Martynui vejantis Jūratę, atstumas tarp jų mažėja aštuonis kartus lėčiau už Jūratės greitį. Vadinasi, Martynui pasivijus Jūratę, ji bus nubėgusi 8 kartus ilgesnį kelią apie fontaną nei pradinis atstumas tarp jų (skaičiuojamas bėgant ratu apie fontaną), kuris lygus pusei rato apie fontaną ilgio. Taigi Martynui pasivijus Jūratę, ši bus apibėgusi apie fontaną lygiai 4 ratus.

10. (C) 14

! Rasime skaičius x, y ir z. Sudauginę duotąsias lygybes, gauname $xy \cdot yz \cdot xz = 14 \cdot 10 \cdot 35$, todėl $xyz = 70$. Taigi $x = \frac{xyz}{yz} = \frac{70}{10} = 7$, $y = \frac{xyz}{xz} = \frac{70}{35} = 2$, $z = \frac{xyz}{xy} = \frac{70}{14} = 5$. Vadinasi, $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$.

11. (E) 8

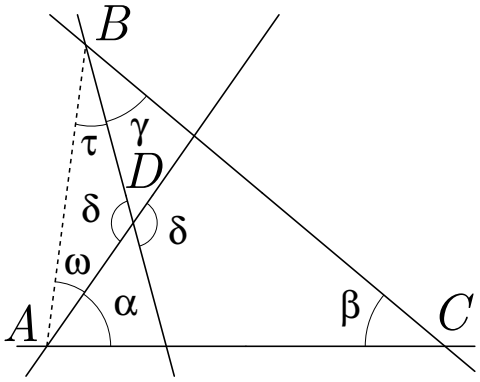


! Sunumeruokime 5×5 lentelės eilutes ir stulpelius, kaip parodyta paveikslėlyje. Jei Leticija 1×3 laivą pažymės trečioje, ketvirtoje arba penktoje eilutėje, tai jis turės bent vieną bendrą tašką su toje lentelėje pažymėtu 2×1 laivu. Kita vertus, pirmoje ir antroje eilutėse pažymėti 1×3 laivą, neturintį bendrų taškų su pažymėtais 1×1 ir 2×1 laivais, Leticija gali vieninteliu būdu. Taigi Leticija 1×3 laivą gali pažymėti lygiai 2 būdais.

Jei Leticija 3×1 laivą pažymės pirmame, antrame arba trečiame stulpelyje, tai jis turės bent vieną bendrą tašką su toje lentelėje pažymėtu 2×1 laivu. Kita vertus, tiek ketvirtame, tiek ir penktame stulpelyje pažymėti 3×1 laivą, neturintį bendrų taškų su pažymėtais 1×1 ir 2×1 laivais, Leticija gali lygiai 3 būdais. Taigi Leticija 3×1 laivą gali pažymėti lygiai 6 būdais.

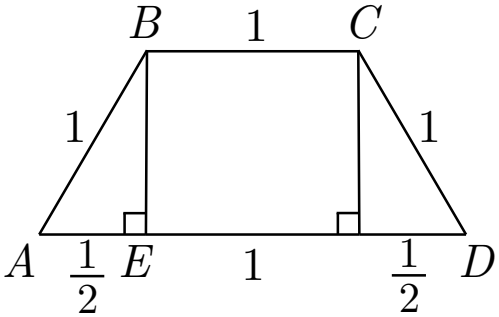
Vadinasi, Leticija lygiai $2+6 = 8$ būdais 5×5 lentelėje gali pažymėti trijų langelių laivą (3×1 arba 1×3), kad jokie du lentelėje pažymėti laivai neturėtų nė vieno bendro taško.

12. (E) 130°



! Brėžinyje pažymėkime kampus τ ir ω bei viršūnes A, B, C ir D (žr. pav.). Taip pat sujunkime taškus A ir B. Trikampio ABD kampų suma lygi 180°: $\tau+\omega+\delta = 180°$. Be to, trikampio ABC kampų suma taip pat lygi 180°: $\tau + \gamma + \beta + \alpha + \omega = 180°$. Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją, gauname $\delta = \alpha+\beta+\gamma = 55°+40°+35° = 130°$.

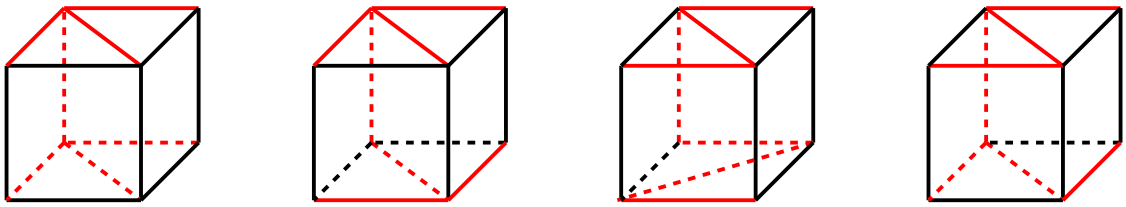
13. (B) 60° ir 60°



! Nesunku įsitikinti, kad trapecijos kraštinių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2. Taigi trapecija lygiašonė, o jos pagrindo ilgis yra 2. Iš trapecijos viršūnių B ir C į jos pagrindą AD nuleiskime statmenis (žr. pav.). Stačiojo trikampio ABE statinio AE ilgis lygus pusei įžambinės AB, todėl $\angle ABE = 30°$. Vadinasi, $\angle BAE = 90° - \angle ABE = 90° - 30° = 60°$. Kadangi trapecija lygiašonė, tai $\angle CDA = \angle BAE = 60°$.

14. (C)

? Kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą kubą kerpame išilgai raudonų linijų ir išlankstome (lenkiama išilgai kubo briaunų). Tokiu būdu gausime **A**, **B**, **D** ir **E** atsakymuose nurodytas figūras.



Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, lygiai vienas atsakymas yra teisingas.

15. (B) 45

? Parodysime, kad atsakymų variantai **A**, **C**, **D** ir **E** galimi:

tarp natūraliųjų skaičių 2, 3, 4, 5, 6 yra lygiai 40% nelyginių skaičių;
tarp natūraliųjų skaičių 2, 3, 4, 5, ..., 24, 25, 26 yra lygiai 48% nelyginių skaičių;
tarp natūraliųjų skaičių 1, 2 yra lygiai 50% nelyginių skaičių;
tarp natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, 4, 5 yra lygiai 60% nelyginių skaičių.

Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, lygiai vienas atsakymas yra teisingas, tad renkamės atsakymą **B**.

! Įrodysime, kad iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje negali būti lygiai 45% nelyginių skaičių. Iš tikrųjų, sakykime, kad yra tokia iš eilės einančių natūraliųjų skaičių seka, kurioje nelyginiai skaičiai sudaro lygiai 45% visų skaičių. Jei sekoje yra lyginis narių skaičius, tai lygiai 50% jos narių yra nelyginiai skaičiai. Vadinasi, nagrinėjamos sekos narių skaičius yra nelyginis, kurį pažymėkime $2n+1$; čia n – natūralusis skaičius.

Mažiausią nagrinėjamos sekos skaičių pažymėkime a. Tuomet ši seka yra $a, a+1, \ldots, a+2n$. Jei skaičius a yra lyginis, tai sekoje yra lygiai n nelyginių skaičių, todėl nelyginių skaičių procentų skaičius yra $\frac{100n}{2n+1}$. Jei skaičius a yra nelyginis, tai sekoje yra lygiai $n+1$ nelyginis skaičius, todėl nelyginių skaičių procentų skaičius yra $\frac{100(n+1)}{2n+1}$. Taigi $\frac{100n}{2n+1} = 45$ arba $\frac{100(n+1)}{2n+1} = 45$. Nesunku įsitikinti, kad nei viena iš šių lygčių neturi sprendinių natūraliaisiais skaičiais. Vadinasi, nėra tokios iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekos, kurioje nelyginiai skaičiai sudarytų lygiai 45% visų skaičių.

16. (A) A

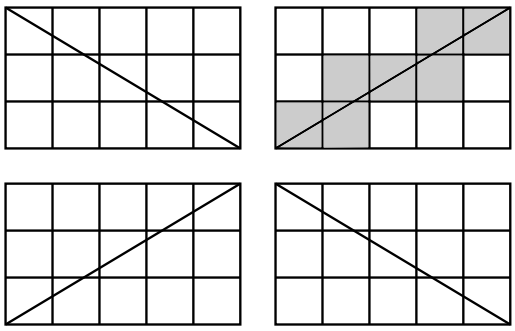
! Kiekvienos stačiakampio viršūnės abscisė yra teigiama, o jos ordinatė – neigiama, todėl jos koordinačių santykis $\frac{y}{x}$ bus visada neigiamas. Taigi santykis $\frac{y}{x}$ bus mažiausias, kai $\frac{|y|}{x}$ bus didžiausias, t. y., kai $|y|$ bus didžiausias, o x – mažiausias. Vadinasi, santykis $\frac{y}{x}$ bus mažiausias viršūnei A.

17. (A) 702

! Jei dviejų gretimų lentoje parašytų skaičių tūkstančių skaitmenys sutampa, tai skirtumas tarp jų ne didesnis už $321 - 12 = 309$. Kita vertus, jei dviejų gretimų lentoje parašytų skaičių tūkstančių skaitmenys yra skirtingi, tai šie skaičiai yra 1320 ir 2013 arba 2310 ir 3012. Pirmuoju atveju skirtumas yra $2013 - 1320 = 693$, o antruoju – $3012 - 2310 = 702$. Taigi didžiausias skirtumas tarp gretimų lentoje parašytų skaičių yra 702.

18. (E) 32

! 6×10 stačiakampį padalykime į keturis 3×5 stačiakampius, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Šie stačiakampiai yra simetriški, todėl užtenka nagrinėti vieną 3×5 stačiakampį ir vieną jo įstrižainę. Pažymėkime 3×5 stačiakampyje visus langelius, kuriuos kerta jo įstrižainė (žr. dešinįjį viršutinį stačiakampį). Jų yra lygiai 7, todėl 3×5 stačiakampyje yra lygiai $3 \cdot 5 - 7 = 8$ langeliai, kurių nekerta jo įstrižainė. Vadinasi, 6×10 stačiakampyje yra lygiai $4 \cdot 8 = 32$ langeliai, kurių nekerta nė viena jo įstrižainė.



19. (B) Birutė

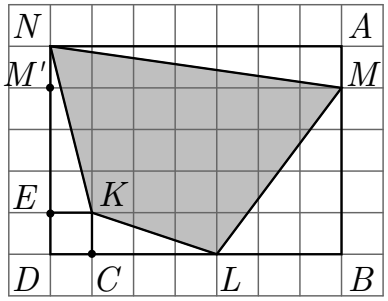
! Vasario mėnuo tarp duotų gimimo datų pasitaiko vieną kartą, o kovo ir balandžio – po du. Vadinasi, Arūnas ir Elena gimė kovo mėnesį, o Birutė ir Cecilija – balandžio, arba atvirkščiai – Arūnas ir Elena gimė balandžio mėnesį, o Birutė ir Cecilija –kovo. Taigi Donato gimimo data yra 2001-02-20. Kadangi Donatas ir Elena gimė tą pačią dieną, tai Elenos gimimo data yra 2001-03-20, todėl Arūnas gimė 2000-03-12. Kadangi Arūnas ir Cecilija gimė tą pačią dieną, tai Cecilijos gimimo data yra 2000-04-12, todėl Birutė gimė 2001-04-23. Taigi Birutė yra jauniausias vaikas.

20. (C)

! Jonas, žiūrėdamas į statinį (iš užpakalio), mato, kad pirmas bokštas iš dešinės sudarytas iš 4 kubelių, antras – iš 3 (mato aukščiausią bokštą toje eilėje), trečias – iš 3, o ketvirtas – iš 2.

21. (B) 84

! Išilgai langelių kraštinių nubrėžkime stačiakampį, kaip parodyta paveikslėlyje. Stačiakampio $NABD$ plotas lygus $10 \cdot 14 = 140$. Trikampio NAM plotas lygus pusei stačiakampio $NAMM'$ ploto, kuris lygus $2 \cdot 14 = 28$. Taigi trikampio NAM plotas lygus 14. Panašiai randame, kad trikampio MBL plotas lygus 24, trikampio LCK plotas lygus 6, o trikampio KEN plotas lygus 8. Be to, kvadrato $EKCD$ plotas lygus $2 \cdot 2 = 4$. Taigi keturkampio $KLMN$ plotas lygus $140 - 14 - 24 - 6 - 8 - 4 = 84$.



22. (D) $S = 3013Q$

! Kadangi $2013^6 = (2013^3)^2$, tai nuo 1 iki 2013^6 yra visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2013^3 kvadratai. Taigi $S = 2013^3$. Panašiai gauname, kad nuo 1 iki 2013^6 yra visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2013^2 kubai, todėl $Q = 2013^2$. Vadinasi, $S = 2013Q$. Nesunku įsitikinti, kad skaičiai S ir Q tenkina tik atsakymo **D** lygybę.

23. (C) 23

! Kadangi skaičiaus 52713 paskutinis skaitmuo 3 yra nelyginis, tai Jonas nutrynė paskutinį penkiaženklio skaičiaus skaitmenį (jeigu Jonas būtų išbraukęs ne paskutinį skaitmenį, tai penkiaženklio ir keturženklio skaičių paskutiniai skaitmenys sutaptų, todėl jų sumos paskutinis skaitmuo būtų lyginis). Jono lentoje užrašytą penkiaženklį skaičių pažymėkime $\overline{abcde}$. Jonui išbraukus paskutinį šio penkiaženklio skaičiaus skaitmenį, gaunamas keturženklis skaičius $\overline{abcd}$. Taigi

$$\begin{array}{r} abcde \\ +\ \ abcd \\ \hline 52713 \end{array}$$

Aišku, kad skaitmuo a lygus 4 arba 5. Tačiau jei $a = 5$, tai skaičių $\overline{abcde}$ ir $\overline{abcd}$ suma būtų ne mažesnė už $50000 + 5000 = 55000$, o taip nėra. Taigi $a = 4$. Tada

$$\begin{array}{r} bcde \\ +\ \ bcd \\ \hline 8713 \end{array}$$

Iš čia matyti, kad $b = 7$ arba $b = 8$. Jei $b = 8$, tai $\overline{bcde} + \overline{bcd} \geqslant 8000 + 800 = 8800 > 8713$. Taigi $b = 7$. Gauname lygybę

$$\begin{array}{r} cde \\ +\ \ cd \\ \hline 1013 \end{array}$$

iš kurios matyti, kad $c = 9$. Tuomet

$$\begin{array}{r} de \\ +\ \ d \\ \hline 23 \end{array}$$

Aišku, kad $d = 1$ arba 2. Jei $d = 1$, tai $e = 12$, bet tada e nėra skaitmuo. Taigi $d = 2$, o tada $e = 1$. Vadinasi, Jonas ant lentos užrašė penkiaženklį skaičių 47921.

24. (C) 12

! Nesunku įsitikinti, kad sodininkas uždavinio sąlygoje minimu būdu gali pasodinti 12 klevų. Iš tikrųjų, sodininkas klevus ir liepas į eilę galėtų sodinti tokia tvarka:

KKKKLLLLKKKKLLLLKKKK,

čia K žymi klevą, o L – liepą. Tarkime, kad sodininkas į eilę pasodino 20 medžių (liepų ir klevų), tarp kurių yra bent 13 klevų. Įrodysime, kad būtinai atsiras du klevai, tarp kurių pasodinti lygiai trys medžiai. Iš tikrųjų, į eilę susodintus medžius paeiliui pažymėkime raidėmis A, B, C ir D:

ABCDABCDABCDABCDABCD

Tuomet atsiras keturi klevai, pažymėti ta pačia raide (jei kiekviena raide būtų pažymėti ne daugiau kaip trys klevai, tai iš viso sodininkas būtų pasodinęs ne daugiau kaip $3 \cdot 4 = 12$ klevų). Paprastumo dėlei tarkime, kad ši raidė yra A. Taigi yra bent keturi klevai, pažymėti raide A. Iš viso yra penki A raide pažymėti medžiai, todėl atsiras du iš eilės einantys A raide pažymėti klevai (t. y. tarp jų nėra kito A raide pažymėto medžio). Belieka pastebėti, kad tarp bet kurių dviejų iš eilės einančių ta pačia raide pažymėtų medžių yra pasodinti lygiai trys medžiai.

25. (B) 41

! Kadangi Artūras užėmė 21 vietą, tai už jį žemesnę vietą užėmusių dalyvių buvo 20, todėl lygiai 10 dalyvių užėmė aukštesnes vietas už Dainių. Varžybose dalyvavusių mokinių skaičių pažymėkime x. Tada dalyvių, užėmusių žemesnes vietas už Dainių, buvo $x - 11$, o dalyvių, užėmusių aukštesnes vietas už Artūrą buvo $x - 21$. Pagal sąlygą $x - 11 = \frac{3}{2}(x - 21)$. Iš čia randame $x = 41$.

26. (A) 9

! Mašinas pažymėkime A, B, C ir D. Yra lygiai 3 keliai, kuriais mašina A gali išvažiuoti iš žiedo: mašinų B, C ir D keliai. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad mašina A iš žiedo išvažiavo mašinos B keliu. Mašinai B iš žiedo išvažiuoti taip pat yra 3 keliai: mašinų A, C ir D keliai. Parodysime, kad kiekvienu atveju mašinos C ir D iš žiedo išvažiuoja vieninteliu būdu.

Jei mašina B iš žiedo išvažiavo mašinos A keliu, tai mašinos C ir D iš žiedo išvažiuotų viena kitos keliais, t. y. mašina C išvažiuotų mašinos D keliu (nes savo keliu išvažiuoti negali), o mašina D – mašinos C keliu.

Jei mašina B iš žiedo išvažiavo mašinos C keliu, tai mašinoms C ir D iš žiedo išvažiuoti lieka mašinų A ir D keliai. Tačiau mašina D negali išvažiuoti savo keliu, todėl ji išvažiuos mašinos A keliu, o mašina C – mašinos D keliu.

Panašiai įsitikiname, kad jei mašina B iš žiedo išvažiavo mašinos D keliu, tai mašina C išvažiuos mašinos A keliu, o mašina D – mašinos C keliu.

Taigi jei mašina A iš žiedo išvažiuoja mašinos B keliu, tai likusios mašinos išvažiuoti iš žiedo gali lygiai 3 būdais. Vadinasi, iš žiedo mašinos gali išvažiuoti $3 \cdot 3 = 9$ būdais.

(Taip pat žr. Senjoro 30 uždavinio sprendimą.)

27. (B) -671

! Nesunku pastebėti, kad sekos nariai kartojasi kas 3, t. y. seka periodiškai kartojasi blokais $1, -1, -1$. Skaičius 2013 dalijasi iš 3: $2013 = 3 \cdot 671$, todėl sudėdami 2013 pirmuosius duotos sekos narius, juos galime grupuoti po tris:

$$(1-1-1)+(1-1-1)+(1-1-1)+\cdots+(1-1-1).$$

Kiekviename bloke esančių skaičių suma lygi $1-1-1=-1$, o iš viso blokų yra $\frac{2013}{3}=671$. Taigi sekos pirmųjų 2013 narių suma lygi -671.

28. (D) $4, 5, 6, 2, 3, 1$

! Vaikai negalėjo suvalgyti blynų **D** atsakyme nurodyta tvarka $4, 5, 6, 2, 3, 1$. Iš tikrųjų, šia tvarka valgant šaltesnis 2 blynas būtų suvalgomas anksčiau už karštesnį 3 (valgant 4 blyną, 1, 2 ir 3 jau buvo iškepti). Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, teisingas atsakymas gali būti tik vienas. Nesunku įsitikinti, kad vaikai galėjo suvalgyti blynus kiekviena iš atsakymuose **A**, **B**, **C** ir **E** nurodyta tvarka.

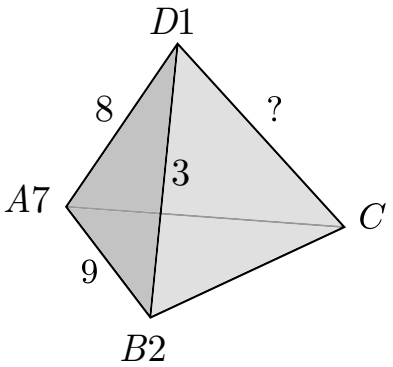
29. (B) 5

! Skaičiai 1 ir 2 negali būti parašyti tetraedro briaunose, nes šių skaičių neįmanoma išreikšti dviejų skirtingų natūraliųjų skaičių suma. Vadinasi, skaičiais 1 ir 2 pažymėtos tetraedro dvi viršūnės.

Sakykime, kad viršūnės C ir D pažymėtos skaičiais 1 ir 2 (nebūtinai šia tvarka). Kadangi viršūnėse A ir B pažymėtų skaičių suma yra 9, tai šie skaičiais ne didesni už 8. Tada bet kuris iš briaunose AD, AC, BD, BC ir CD pažymėtų skaičių yra ne didesnis už $8+2=10$. Vadinasi, jokia briauna ir jokia viršūnė nepažymėta skaičiumi 11, o taip būti negali.

Taigi skaičiumi 1 arba 2 pažymėta viena iš viršūnių A arba B.

Jei viršūnė A arba B pažymėta skaičiumi 1, tai kita iš jų pažymėta skaičiumi 8, nes, pagal sąlygą, šiose viršūnėse pažymėtų skaičių suma yra 9. Tačiau tada briauna, kurios galai pažymėti skaičiais 2 ir 8, pažymėta skaičiumi 10, o taip būti negali.



Vadinasi, viršūnė A arba B pažymėta skaičiumi 2, o viršūnė C arba D pažymėta skaičiumi 1. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad skaičiumi 2 pažymėta viršūnė B, o skaičiumi 1 – viršūnė D. Tada briauna BD pažymėta skaičiumi $2+1=3$. Viršūnė A pažymėta skaičiumi 7 (viršūnėse A ir B pažymėtų skaičių suma yra 9), todėl briauna AD pažymėta skaičiumi 8 (žr. pav.). Taigi liko skaičiai 4, 5, 6 ir 11, kuriais gali būti pažymėta viršūnė C. Ji negali būti pažymėta skaičiumi 5, nes tada briauna BC būtų pažymėta skaičiumi $2+5=7$, kuriuo jau pažymėta viršūnė A. Taip pat viršūnė C negali būti pažymėta skaičiumi 6, nes tada briauna CD būtų pažymėta skaičiumi $6+1=7$. Pagaliau, viršūnė C negali būti pažymėta skaičiumi 11, nes tada briauną CD reikėtų pažymėti skaičiumi $11+1=12$, o tai neįmanoma. Vadinasi, viršūnė C pažymėta skaičiumi 4, todėl briauna CD pažymėta skaičiumi 5. (Briauna AC pažymėta skaičiumi 11, o briauna BC – skaičiumi 6.)

30. Ⓒ Visi tokie skaičiai N dalijasi iš 6

? Skaičius 30 tenkina uždavinio sąlygą ($6+10+15 = 31 > 30$), todėl netinka atsakymas **E**. Kita vertus, skaičius 30 nesidalija nei iš 4, nei iš 7, todėl netinka atsakymai **A** ir **D**.
Skaičius 12 taip pat tenkina uždavinio sąlygą: $3 + 4 + 6 = 13 > 12$. Be to, 12 nesidalija iš 5, todėl netinka ir atsakymas **B**. Remiantis *Kengūros* taisyklėmis, teisingas atsakymas gali būti tik vienas.

! Įrodysime, kad visi tokie skaičiai N dalijasi iš 6. Iš tikrųjų, tegul $1 < a < b < c$ – keturi mažiausi skaičiaus N dalikliai, neskaitant paties N. Tada $\frac{N}{a}$, $\frac{N}{b}$ ir $\frac{N}{c}$ – trys didžiausi šio skaičiaus dalikliai. Remiantis uždavinio sąlyga, teisinga nelygybė $\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} > N$. Abi nelygybės puses padaliję iš skaičiaus N, gauname nelygybę

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1.$$

Kadangi $a < b < c$, tai $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ir $\frac{1}{a} > \frac{1}{c}$, todėl

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1,$$

t. y. $\frac{3}{a} > 1$. Iš čia gauname nelygybę $a < 3$. Taigi $a = 2$. Šią reikšmę įstatę į nelygybę $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$, gauname

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}.$$

Kadangi $b < c$, tai

$$\frac{2}{b} > \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2},$$

todėl $\frac{2}{b} > \frac{1}{2}$, t. y. $b < 4$. Kadangi $b > a = 2$, tai $b = 3$. Taigi skaičius N dalijasi iš $a = 2$ ir iš $b = 3$, todėl šis skaičius dalijasi ir iš $2 \cdot 3 = 6$.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	D
3	C
4	C
5	E
6	C
7	C
8	E
9	A
10	C
11	E
12	E
13	B
14	C
15	B
16	A
17	A
18	E
19	B
20	C
21	B
22	D
23	C
24	C
25	B
26	A
27	B
28	D
29	B
30	C