Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Mažylis

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Juozas Mačys

Redaktorius
Juozas Mačys

Maketavimas
Paulius Šarka

© Juozas Mačys, 2013
© Kengūros organizavimo komitetas, 2013

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašai **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Sprendimai **13**

Atsakymai **22**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 3–4 klasių (*Mažylio* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Nykštukas, 1 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Nykštukas, 2 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

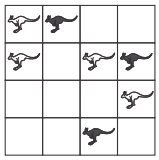
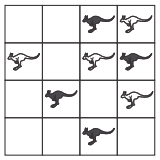
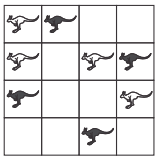
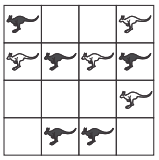
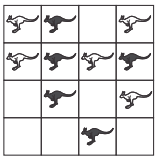
1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kuriame paveikslėlyje juodų kengūrų daugiau nei baltų?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

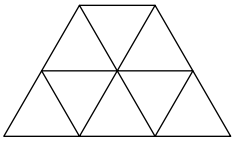
2. Alma teisingai atliko pratimą. Tada ji du vienodus skaitmenis užklijavo lipdukais:

Kokį skaitmenį slepia lipdukai?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

3. Tėvas kiekvienam iš savo trijų vaikų davė po 5 obuolius. Ona atidavė 3 obuolius Alei, o tada Alė pusę jos turimų obuolių atidavė Mikui. Kiek obuolių dabar turi Mikas?
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

4. Kiek trikampių galima įžiūrėti paveikslėlyje?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12



5. Kamilė turi 3 brolius ir 3 seseris. Kiek brolių ir seserų turi jos brolis Mikas?
A) 3 brolius ir 3 seseris **B)** 3 brolius ir 4 seseris **C)** 2 brolius ir 3 seseris
D) 3 brolius ir 2 seseris **E)** 2 brolius ir 4 seseris

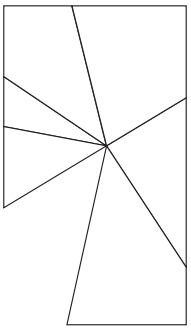
6. Dominykas turėjo 36 saldainius. Jis išdalijo tuos saldainius visiems savo draugams po lygiai. Kuris iš žemiau išvardytų skaičių negalėjo būti jo draugų skaičius?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

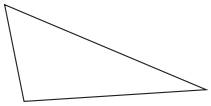
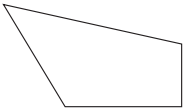
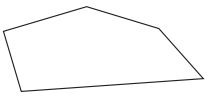
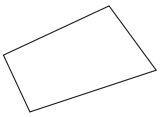
7. Veronikos mama daro dviejų duonos riekelių sumuštinius. Duonos pakelyje yra 24 riekelės. Kiek sumuštinių ji gali padaryti turėdama du su puse pakelio duonos?
A) 24 **B)** 30 **C)** 48 **D)** 34 **E)** 26

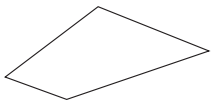
8. Penki berniukai kalbėjosi apie skaičių 325.
Andrius: „Tai 3-ženklis skaičius.“
Balys: „Visi jo skaitmenys yra skirtingi.“
Česlovas: „Skaitmenų suma lygi 10.“
Danielius: „Vienetų skaitmuo yra 5.“
Edmundas: „Visi skaitmenys yra nelyginiai.“
Kuris iš berniukų buvo neteisus?
A) Andrius **B)** Balys **C)** Česlovas **D)** Danielius **E)** Edmundas

Klausimai po 4 taškus

9. Sudužo stačiakampis veidrodis. Kurio iš penkių gabalų trūksta paveikslėlyje?



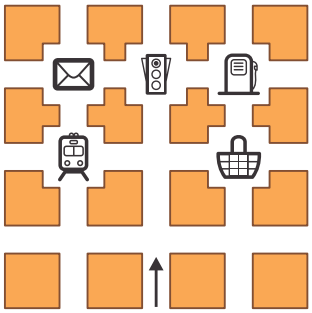
A)  **B)**  **C)**  **D)** 

E) 

10. Kai Pinokis meluoja, jo nosis pailgėja 6 centimetrais. Kai jis sako teisybę, jo nosis sutrumpėja 2 cm. Kai jo nosies ilgis buvo 9 cm, jis triskart sumelavo ir dukart pasakė teisybę. Koks pasidarė jo nosies ilgis?
A) 14 cm **B)** 15 cm **C)** 19 cm **D)** 23 cm **E)** 31 cm

11. Parduotuvėje parduoda apelsinus tik trijų dydžių dėžutėmis: su 5 apelsinais, su 9 apelsinais ir su 10 apelsinų. Mokytojas nupirko lygiai 48 apelsinus. Kiek mažiausiai dėžučių tai galėjo būti?
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

12. Agnė pradeda eiti rodyklės kryptimi. Kiekvienoje sankryžoje ji pasuka arba dešinėn, arba kairėn. Iš pradžių ji pasuko dešinėn, tada kairėn ir dar sykį kairėn, paskui vėl dešinėn ir dusyk kairėn. Kurioje sankryžoje atsidurs Agnė?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

13. Bedraklasės Alė, Beta, Cilė ir Dalė yra gimusios tais pačiais metais. Jų gimtadieniai yra vasario 20-oji, balandžio 12-oji, gegužės 12-oji ir gegužės 25-oji (nebūtinai šia tvarka). Beta ir Alė gimė tą patį mėnesį. Alė ir Cilė gimė skirtingų mėnesių tą pačią dieną. Kuri iš jų yra vyriausia?
A) Alė **B)** Beta **C)** Cilė **D)** Dalė **E)** Nustatyti neįmanoma

14. 30 vaikų apsilankė miesto parke. 15 iš jų sukosi karusele, 20 iš jų suposi supynėmis. Kiek vaikų ir sukosi karusele, ir suposi supynėmis?
A) 25 **B)** 15 **C)** 30 **D)** 10 **E)** 5

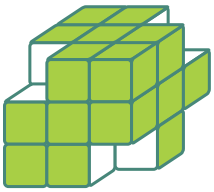
15. Paveikslėlyje pavaizduota dėlionės detalė. Kurią iš žemiau išvardytų detalių galima pridėti prie pavaizduotosios, kad susidarytų stačiakampis?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

16. Skaičius 35 dalijasi iš savo paskutinio skaitmens, o skaičius 38 tokios savybės neturi. Kiek yra skaičių, didesnių už 21, bet mažesnių už 30, kurie dalijasi iš savo paskutinio skaitmens?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Klausimai po 5 taškus

17. Iš keturių kubo kampų Adelė išėmė po kubelį. Keli iš šių paveikslėlių vaizduoja kurią nors kubo sieną?

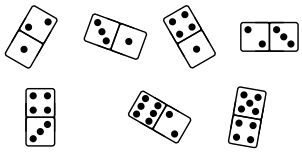


A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

18. Kiek metų turi praeiti nuo 2013 metų sausio 1-osios, kol pirmą sykį metų užrašo skaitmenų sandauga bus didesnė už tų skaitmenų sumą?
A) 87 **B)** 98 **C)** 101 **D)** 102 **E)** 103

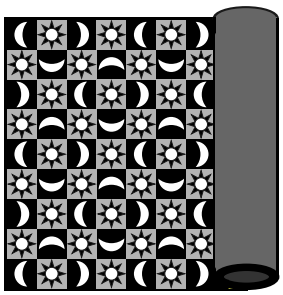
19. Gruodį katytė Micė miega lygiai 3 savaites. Kiek minučių tą mėnesį ji praleidžia nemiegodama?
A) $(31-7)\cdot 3\cdot 24\cdot 60$ **B)** $(31-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60$ **C)** $(30-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60$
D) $(31-7)\cdot 24\cdot 60$ **E)** $(31-7\cdot 3)\cdot 24\cdot 60\cdot 60$

20. Vytautas turi keletą domino kauliukų (žr. paveikslėlį). Jis deda juos į vieną eilę vieną šalia kito taip, kad dviejų gretimų kauliukų susiliečiantys kvadratai turėtų vienodai taškų. Kiek daugiausiai kauliukų jis gali sudėti į eilę?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



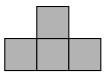
21. Kristė turi 7 stiklinius varpelius, kurių kainos yra 1 litas, 2 litai, 3 litai, 4 litai, 5 litai, 6 litai, 7 litai. Ji nusprendė varpelius sudėti į tris maišelius taip, kad maišelio kaina būtų ta pati. Keliais būdais ji tai gali padaryti?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Taip sudėti neįmanoma

22. Petras pirko kilimą, kurio plotis 36 decimetrai, o ilgis 60 dm. Kilimo raštą sudaro kvadratai, kuriuose pakaitomis išausti arba saulė, arba mėnulis. Į kilimo plotį telpa 9 kvadratai (žr. pav.). Kiek mėnulių yra visame išvyniotame kilime?
A) 68 **B)** 67 **C)** 65 **D)** 63 **E)** 60



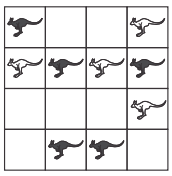
23. Mikė sudarinėja skaičius vien iš nulių ir vienetų. Kiek mažiausiai tokių skaičių užtenka Mikei sudėti, kad gautų sumą 2013?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 204

24. Beatričė turi daug vienodų kauliukų, tokių kaip pavaizduotas paveikslėlyje. Kiek mažiausiai kauliukų jai prireiks, kad galėtų sudėti kvadratą?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

Sprendimai

1. (D) 

! Paveikslėlyje **A** juodų kengūrų 3, baltų – 4. Paveikslėlyje **B** jų atitinkamai 4 ir 4, paveikslėlyje **C** – 4 ir 4, paveikslėlyje **D** – 5 ir 4, paveikslėlyje **E** – 5 ir 5. Taigi tik paveikslėlyje **D** juodų kengūrų daugiau.

2. (D) 7

! Visai paprasta patikrinti atsakymus. **A** netinka, nes $42 + 52 = 94$, o ne 104. **B** ir **C** netinka jau vien dėl to, kad sumos vienetų skaičius bus ne 4. **D** tinka: $47 + 57 = 104$. **E** vėl netinka, nes sumos vienetų skaičius būtų 6.

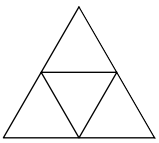
!! Iš salygos $4\square + 5\square = 104$, arba $40 + \square + 50 + \square = 104$. Tai reiškia, kad $\square + \square = 14$. Vadinasi, $\square = 7$.

3. (E) 9

! Kai Ona 3 obuolius atidavė Alei, Alė turėjo 8 obuolius. Pusę turimų obuolių, t.y. 4 obuolius, ji atidavė Mikui. Vadinasi, Mikas dabar turi $5 + 4 = 9$ obuolius.

4. (C) 10

! Mažųjų trikampių yra 8. Bet dar yra trikampių, sudėtų iš 4 trikampiukų (žr. pav.). Tokių trikampių yra 2, taigi iš viso paveikslėlyje galima įžiūrėti 10 trikampių.



5. (E) 2 brolius ir 4 seseris

! Kadangi Kamilė turi 3 brolius ir 3 seseris, tai šeimoje yra 7 vaikai: 3 berniukai ir 4 mergaitės. Vienas iš berniukų yra Mikas, todėl turi 2 brolius ir 4 seseris.

6. (D) 5

! Galima tiesiog tikrinti atsakymus. Jeigu draugų buvo 2, tai jie gavo po 18 saldainių. Jeigu draugų buvo 4 – tai po 9 saldainius, jei 6 – tai po 6 saldainius. Visa tai galėjo būti! O štai su 5 draugais nieko neišeina: jei jiems duotum po 7 saldainius, tai būtų išdalyti tik 35 saldainiai, ir vienas liktų. Jei duotum po 8 saldainius, tai prireiktų 40 saldainių, ir 4 saldainių pritrūktų. Taigi draugų negalėjo būti 5.

!! Žinoma, mokant dalyti, uždavinys visai aiškus. Skaičius 36 dalijasi iš 2, iš 3, iš 4, iš 6, bet iš 5 nesidalija. Vadinasi, draugų skaičius negalėjo būti 5.

7. (B) 30

! Kadangi duonos pakelyje yra 24 riekės, tai dviejuose su puse pakelio bus $24 + 24 + 12 = 60$ riekelių duonos. Todėl galima padaryti 30 sumuštinių.

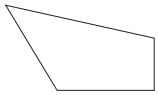
!! Galima skaičiuoti ir kitaip. Iš duonos pakelio (24 riekelės) galima padaryti 12 sumuštinių. Todėl iš pusės pakelio išeis 6 sumuštiniai. Taigi iš viso turėsime $12 + 12 + 6 = 30$ sumuštinių.

8. (E) Edmundas

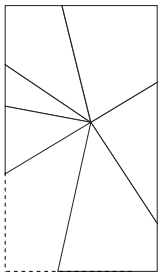
? Skaičius 325 yra triženklis, taigi Andrius teisus. Jo skaitmenys 3, 2 ir 5 skirtingi, taigi Balys teisus. Jo skaitmenų suma yra $3 + 2 + 5 = 10$, taigi Česlovas teisus. Jo vienetų skaitmuo, t.y. paskutinis skaitmuo, yra 5, taigi ir Danielius teisus.

Kadangi *Kengūros* konkurse teisingas tik vienas atsakymas, tai neteisus gali būti tik Edmundas.

! Iš tikrųjų čia visai nereikia nė Kengūros taisyklių. Jau patikrinome 4 teiginius – visi jie teisingi. Tikriname paskutinįjį – Edmundo teiginį: visi skaitmenys nelyginiai. Šis teiginys neteisingas – juk dešimčių skaitmuo 2 yra lyginis! Vadinasi, Edmundas neteisus.

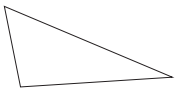
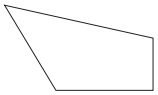
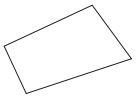
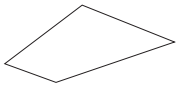
9. (B) 

? Papildykime veidrodį. Matome, kad papildytoji dalis panaši į **B**.



! Dalyvaujant *Kengūros* konkurse, tokio samprotavimo visiškai užtenka – juk taškai duodami vien už teisingą atsakymą.

Vis dėlto, jei tai uždavinys ne *Kengūrai*, atsakymą reikia pagrįsti, t.y. įrodyti (paaiškinti), kodėl jis tinka, ir kodėl kiti atsakymai netinka. Parodysime, kaip tai daroma.

A)  **B)**  **C)** **D)**  **E)** 

Papildytoji dalis yra keturkampė – todėl iš karto atmetame atsakymus **A** (ten šukė trikampė) ir **C** (šukė penkiakampė).

Šukė turi turėti labai smailų kampą – atkrenta atsakymas **D**. Liko dvi galimybės – **B** ir **E**. Bet šukė turi tik vieną smailų kampą – atkrenta ir atsakymas **E**. Lieka vienintelis atsakymas **B**.

Pastaba. Žinoma, samprotauti galima ir kitaip. Pavyzdžiui, pastebėkime, kad „papildytos“ šukės kraštinės eina viena kitai statmenai (kas žino, gali kalbėti ir apie statųjį kampą). Vadinasi, atsakymas **E** tikrai netinka.

10. (D) 23 cm

! Kai Pinokis 3 kartus sumelavo, jo nosis pailgėjo $3 \cdot 6 = 18$ centimetrais ir pasidarė $9 + 18 = 27$ centimetrų. Kai jis du kartus pasakė teisybę, nosis sutrumpėjo $2 \cdot 2 = 4$ centimetrais ir tapo $27 - 4 = 23$ centimetrų.

!! Žinoma, nosies ilgį galima rasti parašius reiškinį

$$9 + 6 + 6 + 6 - 2 - 2,$$

ir suskaičiavę gauname 23.

Beje, sąlygoje nepasakyta, kuria tvarka jis melavo ir sakė tiesą. Todėl sprendžiant verta pasirinkti paprasčiausią variantą, t.y. spręsti kuo paprastesnį uždavinį. Žinoma, čia atsakymas visiškai nepriklauso nuo melo ir teisybės sakymo tvarkos – reiškinyje veiksmų tvarką galima keisti.

11. (D) 5

? Teisingą atsakymą galima rasti taip. Iš pradžių tikriname mažiausią siūlomą dėžučių skaičių 4, t.y. atsakymą **E**. Jeigu įmanoma būtų 48 apelsinus nusipirkti 4 dėžutėmis, tai toks ir būtų *Kengūrai* tinkamas atsakymas: mažesni atsakymai mūsų nedomina.

Taigi ar galima 48 apelsinus parsinešti, pirkus 4 dėžutes? Aišku – ne: juk 4 dėžutėse gali būti daugiausiai $4 \cdot 10 = 40$ apelsinų.

Einame prie atsakymo **D**. Jeigu 5 dėžučių užtenka, tai ir būtų *Kengūros* atsakymas: 4 dėžučių neužtenka, o dar mažesnio jų skaičiaus *Kengūra* nesiūlo.

Į 5 dėžutes galima sudėti net $5 \cdot 10 = 50$ apelsinų. Bet mums reikia tik pilnų dėžučių ir lygiai 48 apelsinų. Kaip tai padaryti, matome iš karto: juk mums reikia apelsinų skaičių sumažinti 2 apelsinais. Pakeitę didžiąją 10 apelsinų dėžutę į vidutinę (9 apelsinų), apelsinų skaičių sumažinsime vienetu. Vadinasi, užtenka pakeisti 2 didžiąsias dėžutes į vidutines, ir turėsime $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 48$ apelsinus.

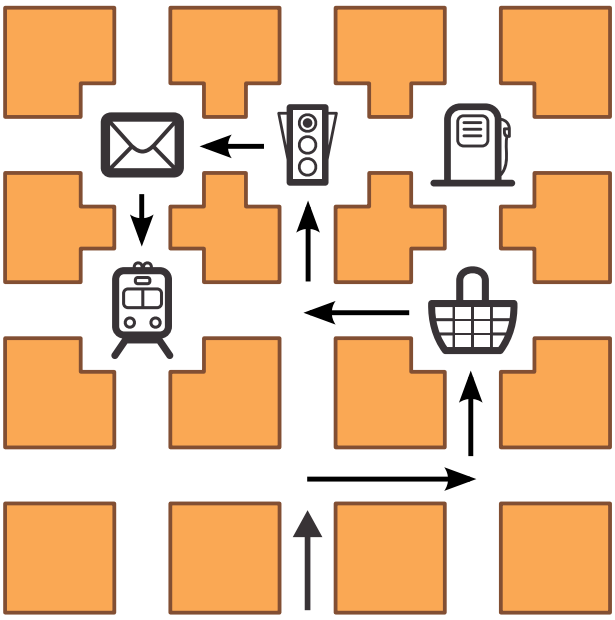
! Jau sakėme – kadangi ieškome mažiausio dėžučių skaičiaus, tai atsakymų **A**, **B** ir **C** nagrinėti nebereikia, nes ten nurodyti didesni už 5 dėžučių skaičiai.

Jei čia būtų ne Kengūriškas uždavinys, o tiesiog uždavinys be nurodytų atsakymų, tai sprendimas skirtųsi nedaug:

Keturių ar mažiau dėžučių neužtenka – jose būtų ne daugiau kaip $4 \cdot 10 = 40$ apelsinų. O štai 5 dėžučių gana: perkame 3 dėžutes po 10 apelsinų ir 2 dėžutes po 9 apelsinus: $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 48$.

12. (A)

! Nesunku nusipiešti Agnės kelią:



Vadinasi, ji pateko į sankryžą A.

13. (D) Dalė

! Kadangi Beta ir Alė gimė tą patį mėnesį, tai šis mėnuo yra gegužė (kitais mėnesiais gimtadienis tik vienas). Alė ir Cilė gimė tą pačią mėnesio dieną, todėl tai 12-oji (kitomis dienomis gimtadienių po vieną). Vadinasi, Alė gimė gegužės 12-ąją, todėl Beta kitą gegužės dieną – 25-ąją. Taigi Cilė gimė 12-ąją dieną ir ne gegužės mėnesį, – todėl balandžio 12-ąją. Dalei liko ketvirtoji data – vasario 20-oji. Kadangi ji ankstesnė už kitas, tai Dalė ir yra „vyriausia“.

14. (E) 5

? Nors tai ir nepasakyta, sąlygą reikia suprasti taip, kad kiekvienas iš vaikų arba suposi supynėmis, arba sukosi karusele, arba ir suposi ir sukosi (o ne tik žiopsojo).

Šį uždavinį galima spręsti labai įvairiai. Yra tik 15 vaikų, kurie sukosi karusele – tai tie, kurie tik sukosi karusele, ir tie, kurie tiek sukosi karusele, tiek ir suposi supynėmis. Vadinasi, suspėjusių pasilinksminti abejaip buvo ne daugiau kaip 15 – taigi tokių greituolių negalėjo būti 25 (atsakymas **A** netinka) ar 30 (atsakymas **C** netinka).

Tikriname atsakymą **B**. Jeigu greituolių buvo 15, tai tik supynėmis suposi 5 vaikai, o tik karusele sukosi $15 - 15 = 0$ vaikų. Kadangi visi vaikai – tai supęsi tik supynėmis, sukęsi tik karusele ir greituoliai, tai jų buvo $5 + 0 + 15 = 20$. Bet sąlygoje pasakyta, kad vaikų buvo 30. Vadinasi, su atsakymu **B** nieko neišeina (sakome: prieštara).

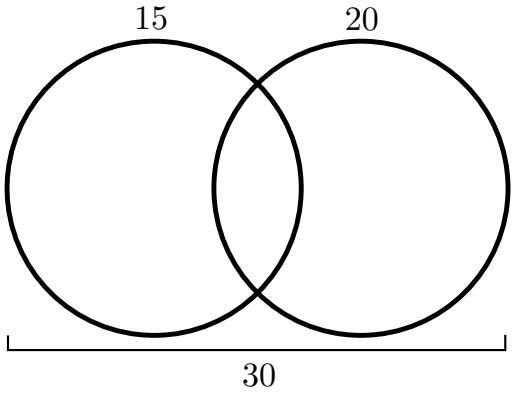
Imkime atsakymą **D**. Greituolių buvo 10, tik karusele sukosi $15 - 10 = 5$, tik supynėmis suposi $20 - 10 = 10$. Iš viso vaikų buvo $10 + 5 + 10 = 25$. Prieštara.

Liko atsakymas **E** – vadinasi tik jis *Kengūros* konkurse teisingas. O vis dėlto pasitikrinkime: greituolių buvo 5, tik karusele sukosi $15 - 5 = 10$, tik supynėmis suposi $20 - 5 = 15$. Iš viso vaikų buvo $5 + 10 + 15 = 30$. Šį kartą viskas gerai – jų ir turi būti 30.

! O gal galėjo greituolių būti dar kitas skaičius – ne 20, ne 15, 30, 10 ar 5? Tada ir uždavinio (nesiūlant 5 galimybių) atsakymas galėtų būti kitas (pavyzdžiui: 5 arba 7). Spręsti tokį uždavinį irgi galima tikrinant – tik tikrinti reikėtų visus atsakymus – 0, 1, 2, ..., 25, 26, 27, 28, 29, 30. Ir tai, kaip jau įsitikinome, paprasta.

Vis dėlto yra žymiai greitesnis būdas: kadangi 15 iš jų sukosi karusele, tai likusieji $30-15=15$ suposi tik supynėmis; kadangi 20 suposi supynėmis, tai $30-20=10$ sukosi tik karusele. Vadinasi, greituolių (ir pasisupusių ir pasisukusių) buvo $30-15-10=5$.

Tą patį būdą galima iliustruoti skrituliais.

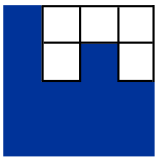


Sakykime, kad pirmame skritulyje „sėdi“ sukęsieji karusele, antrame – supęsieji supynėmis, o bendroje skritulių srityje – greituoliai. Vadinasi kairėje (iš 3 sričių) sėdi tik sukęsi, dešinėje tik supęsi, o vidurinėje – greituoliai. Kairėje srityje yra $30-20=10$ vaikų, dešinėje $30-15=15$, taigi vidurinėje srityje yra $30-15-10=5$ vaikai.

!! Galima ir įsivesti nežinomąjį. Sakykime, kad greituolių buvo G. Tada tik karusele sukosi $15-G$, o tik supynėmis suposi $20-G$ vaikų. Iš viso vaikų buvo $G+15-G+20-G$, t.y. $35-G$. Bet pagal sąlygą jų buvo 30, todėl $G=5$.

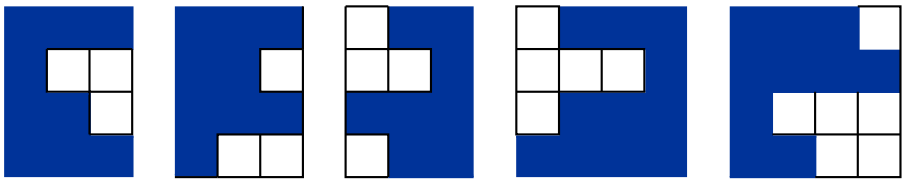
15. (B)

! Šiaip jau reikia geros vaizduotės, kad atspėtum atsakymą, ir daugelis išsprendusių šį uždavinį jį tiesiog atspėja.

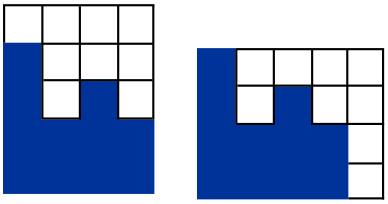


Kaip spręsti uždavinį, jeigu vaizduotė nepadeda? Kadangi turi išeiti stačiakampis, tai iš pridedamosios detalės tikrai galima iškirpti gabalą (žr. pav.). Deja, jį galima iškirpti iš kiekvienos figūrų **A**–**F** ir ši mintis nepadeda.

Bandykime kitaip. Kadangi turi susidaryti stačiakampis, tai jis turi apglėbti paveikslėlyje gautą kvadratą 4×4. Vadinasi, nė vienas stačiakampio matmuo negali būti mažesnis už 4. Duotoji detalė sudaryta iš $4\times 4-5=11$ kvadratėlių. Suskaičiuokime, kiek kvadratėlių turi siūlomi pavyzdžiai.



Papildžius jas iki stačiakampių, pasidaro akivaizdu, kad **A** susideda iš $3\times4-3=9$ kvadratėlių, **B** – iš $3\times4-3=9$ kvadratėlių, **C** – iš $3\times4-4=8$ kvadratėlių, **D** iš $4\times4-5=11$ kvadratėlių, **E** – iš $4\times4-6=10$ kvadratėlių. Pridėjus jas prie duotosios detalės, ir sudarius stačiakampį, šis turėtų turėti atitinkamai $11+9=20$, $11+9=20$, $11+8=19$, $11+11=22$, $11+10=21$ detalę. Bet stačiakampis, kurio plotas 21, gali būti tik 1×21 ir 3×7 – vienas matmuo per mažas (mažesnis už 4). Panašiai $22=1\times22$ arba $22=2\times11$, ir vėl vienas matmuo per mažas. Tas pats su $19=1\times19$. Taigi lieka atvejai **A** ir **B**: $20=1\times20=20\times1=4\times5$. Papildome duotąją detalę iki stačiakampio 4×5:



Kairiajame paveikslėlyje atpažįstame pridėtą detalę **B**.

16. **B** 3

! Vargu ar čia sugalvosi ką kita – tiesiog tikriname skaičius nuo 22 iki 29.

22 iš 2 dalijasi, 23 iš 3 nesidalija, 24 iš 4 dalijasi,

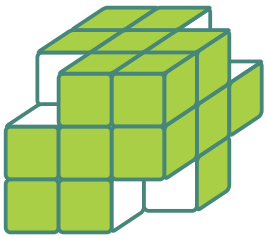
25 iš 5 dalijasi, 26 iš 6 nesidalija, 27 iš 7 nesidalija,

28 iš 8 nesidalija, 29 iš 9 nesidalija.

Taigi iš minėtų skaičių tik trys – 22, 24 ir 25 dalijasi iš savo paskutiniojo skaimens.

17. **D** 4

! Kubo priekinėje sienoje trūksta dviejų kubelių, dešiniojoje sienoje – 3 kubelių, užpakalinėje – 2, kairiojoje – 1, viršutinėje – 2, apatinėje – 2 kubelių.



Nesunku suvokti, kad I paveikslėlyje pavaizduota apatinė siena (jei žiūrėtume gulėdami po kubeliu galva į dešinę), II paveikslėlyje – dešinioji siena (jei kabėtume dešinėje galva žemyn), III paveikslėlyje – priekinė siena, IV paveikslėlyje – kairioji siena (tik į ją reikėtų žiūrėti iš kubelio vidaus). V paveikslėlis nevaizduoja jokios sienos – juk nė vienoje sienoje netrūksta 4 kubelių, kaip kad paveikslėlyje. Vadinasi, kubo sienas vaizduoja 4 paveikslėliai.

!! Galima įsivaizduoti, kad kubas stovi ant stalo ir jį sukiojame arba vartome tol, kol norimą vaizdą gauname priekinėje kubo sienoje.

Kad gautume I paveikslėlį, kubą verčiame per užpakalinę (pagrindo) briauną (t.y. nuo savęs). Priekine siena taps

ir užtenka kubą paversti į kairę (per kairiąją briauną), kad abiejų kvadratėlių trūktų viršutiniuose kvadrato kampuose.

Kad gautume II paveikslėlį, dešiniąją sieną pasukame į save, ir buvusi dešinioji siena taps priekine. Netgi nesvarbu, kokia trūkstamų tarp trijų kvadratėlių padėtis – kubą galima versti į kairę (arba į dešinę) tol, kol nebetrūks kairiojo apatinio kvadratėlio.

III paveikslėlį jau matome (žiūrėdami į priekinę kubo sieną).

IV paveikslėlį gausime atsukę kubo kairiąją sieną į save, o tada versdami kubą į kairę (ar į dešinę) tol, kol trūkstamas kvadratėlis taps kairiuoju viršutiniu.

18. (D) 102

? Patikriname atsakymus.

A) $2013 + 87 = 2100$, skaitmenų sandauga 0, suma 3;

B) $2013 + 98 = 2111$, skaitmenų sandauga 2, suma 5;

C) $2013 + 101 = 2114$, skaitmenų sandauga 8, suma 8;

D) $2013 + 102 = 2115$, skaitmenų sandauga 10, suma 9;

Jau galime rinktis atsakymą **D**: nors po 103 metų (t.y. 2116 metais) skaitmenų sandauga 12 didesnė už jų sumą 10, bet tai jau įvyksta nebe pirmą sykį.

! Įdomiau būtų spręsti, jeigu atsakymai nebūtų siūlomi.

Skaičiaus 2013 skaitmenų sandauga lygi 0. Ir iš viso, jeigu skaičius turi skaitmenį 0, tai skaitmenų sandauga (0) negali būti didesnė už skaitmenų sumą.

Visi skaičiai nuo 2013 iki 2099 turi antrą skaitmenį 0. Sekančio skaičiaus 2100 antras skaitmuo jau ne 0, bet nuo 2100 iki 2109 trečias skaitmuo 0. Sekantis skaičius 2110 taip pat dar turi nulį. Pagaliau, 2111 nulio jau neturi, bet skaitmenų sandauga 2 mažesnė už sumą 5. Skaičiaus 2112 skaitmenų sandauga (4) taip pat mažesnė už jų sumą (6), tas pat su skaičiumi 2113,– sandauga 6, suma 7. Pagaliau skaičiaus 2114 skaitmenų sandauga 8 bent jau lygi jų sumai (taip pat 8). O štai skaičius 2115 – pirmas po 2013, kurio skaitmenų sandauga (10) didesnė už sumą (9). Kadangi $2115 - 2013 = 102$, tai nuo 2013 metų turi praeiti 102 metai, kol skaitmenų sandauga taps didesnė už jų sumą.

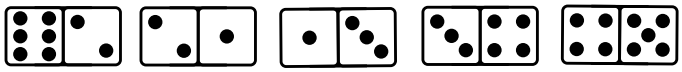
19. (B) $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24 \cdot 60$

? Gruodį Micė miega 3 savaites, t.y. $7 \cdot 3$ dienas. Likusiomis gruodžio dienomis, kurių yra $31 - 7 \cdot 3$, ji nemiega. Tai sudaro $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24$ valandų, t.y. $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24 \cdot 60$ minučių. Tiek duoda atsakymas **B**.

! O gal dar kuris rezultatas teisingas? Atsakymas **A** per didelis: jis didesnis už atsakymą **B**, nes $(31 - 7) \cdot 3$ yra daugiau už $31 - 7 \cdot 3$. Atsakymas **C** per mažas, nes $30 - 7 \cdot 3$ mažiau už $31 - 7 \cdot 3$. Atsakymas **D** per didelis, nes $31 - 7$ daugiau už $31 - 7 \cdot 3$. Pagaliau **E** taip pat aiškiai didesnis (60 kartų) už **B**.

20. (C) 5

? Keletą kartų pabandę sudedame net 5 kauliukus į eilę:



Šešių kauliukų sudėti niekaip nepavyksta. Renkamės atsakymą **C**.

! Šį kartą sprendimas **?** mūsų visai netenkina – gal mes tiesiog nerandame, kaip sudėti bent 6 kauliukus į eilę. Paaiškinsime, kodėl vis dėlto sudėti 6 kauliukus neįmanoma.

Įsivaizduokite, kad jau sudėjome 6 kauliukus. Tarp jų yra 6 tarpai, o šalia kiekvieno tarpo turi būti vienodi akučių skaičiai. Kauliukuose yra 3 vienetai – iš jų galima sudaryti daugiausia 1 porą. Yra 3 dvejetai – antra pora. Yra 3 trejetai – trečia pora. Yra 3 ketvertai – ketvirta pora. Yra tik 1 penketas ir 1 šešetas – jie porų nebesudaro. Porų daugiau nebėra, o turėjo būti 5 poros. Prieštara.

21. (E) Taip sudėti neįmanoma

? Norint pasiekti, kad maišeliai turėtų tą pačią kainą, natūralu iš karto nustatyti, kokia ji bus. Visi varpeliai kainuoja $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ litus. Bet 28 iš 3 nesidalija, todėl padaryti maišelių kainą vienoda nepavyks.

22. (A) 68

! Į kilimo plotį (36 dm) telpa 9 kvadratai, taigi kvadrato kraštinė lygi $36 : 9 = 4$ dm. Pirmame kvadratų stulpelyje matome 4 saules ir 5 mėnulius. Antrame yra 5 saulės ir 4 mėnuliai. Matome, kad trečiame (ir visuose nelyginiuose stulpeliuose) yra 4 saulės ir 5 mėnuliai, o visuose lyginiuose stulpeliuose – 5 saulės ir 4 mėnuliai.

Išvyniotame kilime bus $60 : 5 = 15$ stulpelių. Iš jų 8 bus nelyginiai (pirmas, trečias, ... , penkioliktas) ir 7 lyginiai (antras, ketvirtas, ... , keturioliktas).

Vadinasi, nelyginiuose stulpeliuose bus $8 \cdot 5 = 40$ mėnulių, o lyginiuose $7 \cdot 4 = 28$ mėnuliai, iš viso 68 mėnuliai.

!! Skaičiuoti galima ir kitaip. Kadangi kvadrato kraštinė lygi $36 : 9 = 4$ dm, tai yra 15 stulpelių, o iš viso $9 \cdot 15 = 135$ kvadratai. Juostoje, kurią sudaro du gretimi stulpeliai, yra lygiai saulių ir mėnulių (po 9). Atmeskime 14 paskutinių stulpelių, t.y. 7 juostas – juose saulių ir mėnulių yra po lygiai. Likusiame pirmame stulpelyje mėnulių yra vienu daugiau, taigi ir visuose 135 kvadratų mėnulių yra 1 daugiau. Atmetus tą 1 mėnulį, saulių ir mėnulių bus po lygiai, t.y. $(135 - 1) : 2 = 67$. Vėl pridėję tą mėnulį, jų gausime 68.

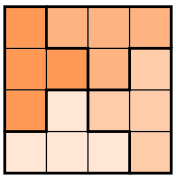
23. (B) 3

! Kadangi reikia imti kuo mažiau skaičių, tai natūralu vieną jų imti kuo didesnį – taigi keturženklį. Bet sumos antras skaitmuo 0, taigi pirmą skaičių imame 1011. Lieka dar paimti kuo mažiau skaičių, kad jų suma būtų $2013 - 1011 = 1002$. Dabar natūralu imti 1001, ir liks 1. Todėl trijų skaičių užtenka:

$$2013 = 1011 + 1001 + 1.$$

Liko paaiškinti (= įrodyti), kad mažiau skaičių sumai 2013 gauti neužteks. Galvokime apie vienetų skaitmenį 3 – jam dviejų skaičių tikrai neužtenka. Vadinasi, mažiausias dėmenų skačius – trys.

24. (B) 4



? Įsitikiname, kad nupiešti kvadratą, sudėtą iš 2 ar 3 kauliukų neįmanoma. Nupiešti kvadratą sudarytą iš 4 kauliukų, įmanoma (žr. pav.). Renkamės atsakymą **B**.

! Nors tai tarsi ir akivaizdu, kad mažiau kaip 4 kauliukų neužteks, verta tai pagrįsti.

Imkime 2 kauliukus, juose 8 kvadratėliai. O kvadrate gali būti tik $a \cdot a$ kvadratėlių, kur a – kraštinės ilgis kvadratėliais, t.y. $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, $5 \cdot 5 = 25$, ir t.t. Vadinasi, negalima sudėti kvadrato ir iš 3 kauliukų, nes juose yra 12 kvadratėlių.

Beje, tikrai negalima kvadrato sudėti iš 5 kauliukų, nes juose 20 kvadratėlių, ir iš 6 kauliukų, nes juose 24 kvadratėliai. Taigi lieka du atsakymai **B** (4 kauliukai) ir **E** (9 kauliukai), kai sunkiau pasakyti, galima ar negalima sudėti iš tiek kauliukų.

Jau matėme, kad galima nupiešti kvadratą, sudėtą iš 4 kauliukų, o iš mažiau kauliukų to padaryti negalima. Taigi 4 yra mažiausias kauliukų skaičius.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	D
2	D
3	E
4	C
5	E
6	D
7	B
8	E
9	B
10	D
11	D
12	A
13	D
14	E
15	B
16	B
17	D
18	D
19	B
20	C
21	E
22	A
23	B
24	B