Kengura 2013

Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai

Senjoras

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS

KENGŪRA 2013

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius ir sudarytojas
Aivaras Novikas

Redaktorius
Aivaras Novikas

Maketavimas
Paulius Šarka

© Aivaras Novikas, 2013
© Kengūros organizavimo komitetas, 2013

Turinys

Pratarmė **4**

Geriausiųjų sąrašai **6**

Dalyvio kortelės pavyzdys **8**

Sąlygos **9**

Sprendimai **13**

Atsakymai **25**

Pratarmė

Paprastai žiūrint, *Kengūros* konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į *Kengūros* kalnelius? Kuo tie *Kengūros* kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: *jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus.* Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje *pramogų gadynėje.*

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali *užsikabinti* pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne – tai sužinojo) per 53000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2013 metais. Juk konkursas – it žavus tornadas (o tokių irgi būna) – negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas – žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių – 1–12 klasių *kengūriukų* – atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi – priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį – bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi *Kengūros* konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes *Kengūros* uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą – peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali *sukristi* jos sprendimas – štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš *Kengūros* gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė *Kengūrai* ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie *Kengūros* konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai.

Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą *Kengūros* konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti – čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru – Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, *Kengūrai* nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir *Kengūros* ratas sukasi kiaurus metus – net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek *kengūriniuose* (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje *Kengūra* kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas – juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku – bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2013metų kovo 21 dieną keliavo ir gausiai sprendė 11–12 klasių (*Senjoro* amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų *kengūriniai* sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse–žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su *Kengūra* – išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Nykštukas, 1 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Nykštukas, 2 klasė, 50 geriausiųjų

Vadovaujantis 2018 m. gegužės 25 d. įsigaliojusiu Europos Sąjungos bendruoju duomenų apsaugos reglamentu, asmeniniai mokinių **rezultatai nebeskelbiami**. Dėkojame už supratingumą.

Konkurso organizatoriai

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA
Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** P A V A R D E N I S

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys:

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

- Lietuvių ☐
- Lenkų ☐
- Rusų ☐
- Anglų ☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o klaidingas atsakymas vertinamas minus 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

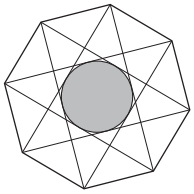
Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2013

2013 m. konkurso užduočių sąlygos

Klausimai po 3 taškus

1. Kuris skaičius didžiausias?
A) 2013 **B)** 2^{0+13} **C)** 20^{13} **D)** 201^3 **E)** $20 \cdot 13$

2. Taisyklingojo aštuonkampio kraštinės ilgis lygus 10. Jo įstrižainės iškerta mažesnį aštuonkampį, į kurį įbrėžtas apskritimas (žr. pav.). Kam lygus apskritimo spindulys?
A) 10 **B)** 7,5 **C)** 5 **D)** 2,5 **E)** 2



3. Prizmė turi iš viso 2013 sienų. Kiek ji turi briaunų?
A) 2011 **B)** 2013 **C)** 4022 **D)** 4024 **E)** 6033

4. Kokį skaičių gauname, ištraukę kubinę šaknį iš skaičiaus 3^{3^3}?
A) 3^3 **B)** 3^{3^3-1} **C)** 3^{2^3} **D)** 3^{3^2} **E)** $(\sqrt{3})^3$

5. Šių, 2013-ųjų, metų užraše yra keturi iš eilės einantys skaitmenys 0, 1, 2 ir 3. Kiek metų praėjo nuo paskutinio karto, kai metų užraše buvo kokie nors keturi iš eilės einantys skaitmenys?
A) 467 **B)** 527 **C)** 581 **D)** 693 **E)** 990

6. Tiesinė funkcija f tenkina lygybę $f(2013) - f(2001) = 100$. Kam lygus skirtumas $f(2031) - f(2013)$?
A) 75 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

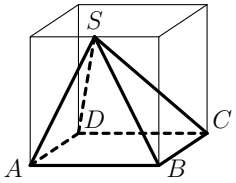
7. Kelios iš dvigubųjų nelygybių

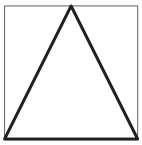
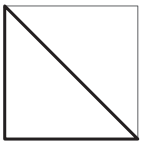
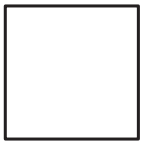
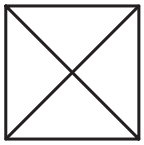
$$4 < x^2 < 9, \quad 4 < 2x < 9, \quad 6 < 3x < 9, \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

teisingos su visomis x reikšmėmis, tenkinančiomis sąlygą $2 < x < 3$?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8. Šeši bildukai pagavo 20 apuokų. Pirmasis bildukas pagavo vieną apuoką, antrasis – du, o trečiasis – tris. Ketvirtasis bildukas pagavo daugiau apuokų nei bet kuris kitas. Kiek mažiausiai apuokų galėjo pagauti ketvirtasis bildukas?
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

9. Neperregima piramidė $ABCDS$ yra perregimo kubo viduje (žr. pav.). Jos viršūnė S yra kubo briaunos vidurys. Kubas nufotografuotas iš viršaus, iš apačios, iš priekio, iš užpakalio, iš kairės ir iš dešinės. Kuris paveikslėlis nėra nė viena iš fotografijų?

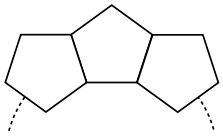


A)  **B)**  **C)**  **D)** **E)** 

10. Ištirpus bildukų auksui, jo tūris padidėja dvyliktadaliu. Kokia dalimi sumažėja tūris, kai auksas vėl sukietėja?
A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{14}$

Klausimai po 4 taškus

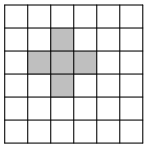
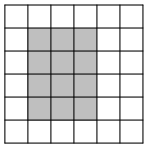
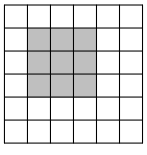
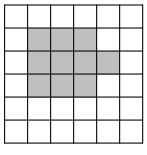
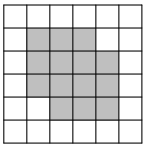
11. Arnas vienodas taisyklingojo penkiakampio formos plyteles sudėjo ratu, šliedamas jas kraštinėmis vieną prie kitos (žr. pav.). Kiek plytelių sudaro pilną ratą?



A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

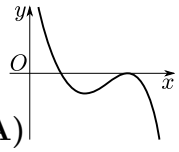
12. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių n, kad $\frac{n}{3}$ ir $3n$ abu yra triženkliai sveikieji skaičiai?
A) 12 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 100 **E)** 300

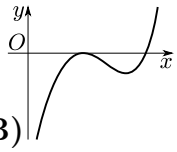
13. Skritulio formos kilimas patiestas ant kvadratinėmis plytelėmis dengtų grindų. Išdykėlė Inga nudažė visas plyteles, bent iš dalies uždengtas kilimo (t.y. turinčias su juo daugiau nei vieną bendrą tašką). Kurio nudažymo ji negalėjo gauti?

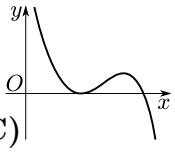
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

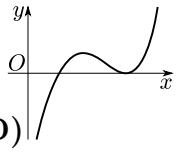
14. Funkcija $f(x)$ apibrėžta visiems sveikiesiems skaičiams ir įgyja sveikąsias reikšmes. Ramunė apie ją pasakė tokį teiginį: „Bet kokiam lyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra lyginis.“ Paaiškėjo, kad Ramunė neteisi. Tai reiškia, kad:
A) Bet kokiam lyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra nelyginis
B) Bet kokiam nelyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra lyginis
C) Bet kokiam nelyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ yra nelyginis
D) Yra toks lyginis skaičius x, kad skaičius $f(x)$ yra nelyginis
E) Yra toks nelyginis skaičius x, kad skaičius $f(x)$ yra nelyginis

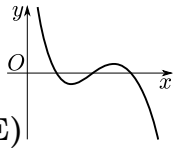
15. Duota funkcija $Q(x) = (a - x)(b - x)^2$, čia $a < b$. Viename iš šių brėžinių pavaizduotas jos grafikas. Kuriame?

A) 

B) 

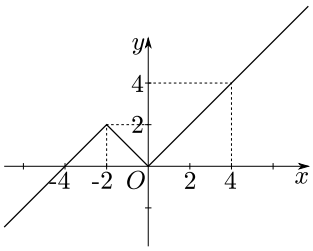
C) 

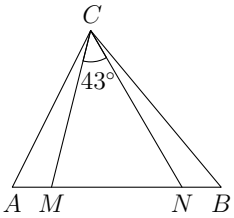
D) 

E) 

16. Viena stačiakampio kraštinė lygi 5. Stačiakampis padalytas į dvi figūras – kvadratą ir mažesnį stačiakampį. Vienos iš jų plotas lygus 4. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti pradinio stačiakampio antrosios kraštinės ilgis?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17. Funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ grafiką sudaro atkarpa ir du spinduliai (žr. pav.). Kiek sprendinių turi lygtis $f(f(f(x))) = 0$?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0





18. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėti tokie taškai M ir N, kad $AN = AC$ ir $BM = BC$ (žr. pav.). Raskite $\angle ACB$, jei $\angle MCN = 43°$.
A) 86° **B)** 89° **C)** 90° **D)** 92° **E)** 94°

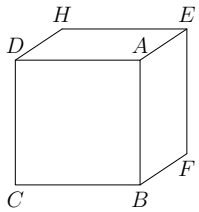
19. Kiek natūraliųjų skaičių porų (x, y) tenkina lygtį $x^2y^3 = 6^{12}$?
A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** Kitas skaičius

20. Dėžėje guli 900 kortelių. Ant kiekvienos iš jų užrašyta po skaičių nuo 100 iki 999 (bet kurių dviejų kortelių skaičiai skirtingi). Goda užsimerkusi traukia iš dėžės korteles. Kiek mažiausiai kortelių ji turi ištraukti, kad būtų visiškai tikra ištraukusi tris korteles su ta pačia skaitmenų suma?
A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

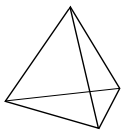
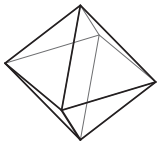
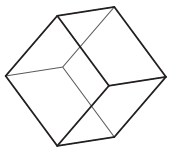
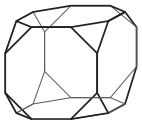
Klausimai po 5 taškus

21. Kiek yra sveikųjų skaičių tokių porų (x, y), kad $x \leqslant y$ ir $xy = 5(x + y)$?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

22. Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžia tokios jos savybės: ji yra periodinė su periodu 5, o intervale $[-2; 3)$ galioja lygybė $f(x) = x^2$. Raskite $f(2013)$.
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9



23. Pilnaviduris kubas (žr. pav.) perpjautas išilgai plokštumos, einančios per viršūnes D, E ir B, gretimas viršūnei A. Panašiai atlikti dar septyni pjūviai (per tris viršūnes, gretimas vienai iš kubo viršūnių). Tik tada kubas subyrėjo į dalis. Kaip atrodo kubo dalis, kuriai priklauso jo centras?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)**

24. Kiek realiųjų sprendinių (x, y) turi lygtis $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?
A) 1 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** Be galo daug

25. Neneigiamų sveikųjų skaičių aibę pažymėkime $\mathbb{N}_0$. Funkciją $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ apibrėžia sąlyga $f(2n) = f(2n + 1) = n$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0$. Bet kokiam natūraliajam skaičiui k pažymėkime $f^k(n) = f(f(...f(n)...)))$, čia dešinėje pusėje simbolis f pasikartoja k kartų. Kiek sprendinių turi lygtis $f^{2013}(n) = 1$?
A) 0 **B)** 4026 **C)** 2^{2012} **D)** 2^{2013} **E)** Be galo daug

26. Plokštumoje nubrėžtos kelios tiesės. Tiesė a kertasi su lygiai trimis tiesėmis, tiesė b – su lygiai keturiomis, o tiesė c – nei su lygiai trimis, nei su lygiai keturiomis tiesėmis. Kiek iš viso tiesių nubrėžta?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** Kitas skaičius

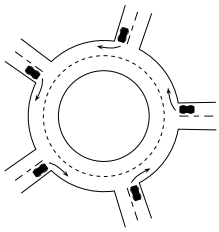
27. Sudėjus pirmuosius n natūraliųjų skaičių, gautas triženklis skaičius, kurio visi skaitmenys lygūs. Kam lygi skaičiaus n skaitmenų suma?
A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

28. Saloje gyvena tiesuoliai, visada sakantys tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Keliauninkas sutiko du salos gyventojus ir paklausė aukštesniojo, ar jie abu yra tiesuoliai. Gavęs atsakymą, jis dar negalėjo nustatyti, kas yra jo pašnekovai, todėl paklausė žemesniojo, ar aukštesnysis yra tiesuolis. Gavęs atsakymą, keliauninkas jau žinojo, kas yra jo sutikti salos gyventojai. Kuris iš teiginių apie juos yra teisingas?

A) Jie yra tiesuoliai **B)** Jie yra melagiai **C)** Tiesuolis yra tik aukštesnysis
D) Tiesuolis yra tik žemesnysis **E)** Nustatyti neįmanoma

29. Julija sugalvojo seką: pasirinko $a_1 = 1$, o kitus narius skaičiavo pagal formulę $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ (čia m ir n yra bet kokie natūralieji skaičiai). Kam lygus a_{100}?

A) 100 **B)** 1000 **C)** 2012 **D)** 4950 **E)** 5050



30. Į paveikslėlyje pavaizduotą žiedą skirtingais keliais tuo pačiu metu įvažiavo penkios mašinos. Jos visos ir paliko žiedą išvažiavusios skirtingomis kryptimis, nė viena neapvažiavusi pilno rato. Keliais būdais mašinos galėjo palikti žiedą?

A) 24 **B)** 44 **C)** 60 **D)** 81 **E)** 120

Sprendimai

1. (C) 20^{13}

! Įvertinkime, kiek skaitmenų sudaro kiekvieną iš skaičių.

A) Turime keturis skaitmenis.

B) Kadangi $2^{13} = 2 \cdot (2^3)^4 < 2 \cdot 10^4 = 20000$, tai turime ne daugiau nei penkis skaitmenis. (Be to, šis atsakymas netinka, nes yra akivaizdžiai mažesnis už atsakymą C: $2^{13} < 20^{13}$.)

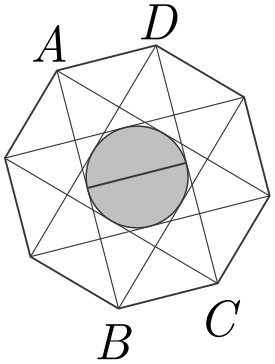
C) Kadangi $20^{13} > 10^{13}$, tai turime bent keturiolika skaitmenų.

D) Kadangi $201^3 < 300^3 = 27000000$, tai turime ne daugiau nei aštuonis skaitmenis.

E) Kadangi $20 \cdot 13 = 260$, teturime tris skaitmenis.

Matome, kad atsakymas C gerokai didesnis už kitus.

2. (C) 5



? Brėžinys tiesiog perša mintį, kad keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis. Skersmuo, jungiantis lietimosi taškus, statmenas abiem kraštinėms AB ir CD (žr. pav.), tad jo ilgis lygus atstumui tarp jų $BC = 10$. Apskritimo spindulys dvigubai trumpesnis: $10/2 = 5$.

! Taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti į apskritimą, kurį jo viršūnės dalija į lygias dalis. Todėl priešingos aštuonkampio viršūnės A ir C yra to apskritimo skersmens galai. Kampas ABC yra statusis (remiasi į pusapskritimį AC), kaip ir kampai BCD, DCA, CAB. Keturkampio $ABCD$ visi kampai statūs, todėl jis yra stačiakampis.

Tą patį galima įrodyti bet kuriam taisyklingajam daugiakampiui su lyginiu kraštinių skaičiumi: keturkampis, gautas dvi priešingas daugiakampio kraštines papildžius dviem kitomis atkarpomis, yra stačiakampis.

3. (E) 6033

! Dvi prizmės sienos yra jos pagrindai, todėl ji turi $2013 - 2 = 2011$ šoninių sienų-lygiagretainių. Kiek yra šoninių sienų, po tiek kraštinių turi pagrindai. Tad jau turime $2 \cdot 2011$ briaunų, priklausančių pagrindams. Pagrindams nepriklauso dar 2011 briaunų, jungiančių gretimas šonines prizmės sienas. Gauname $3 \cdot 2011 = 6033$ briaunų.

4. (D) 3^{3^2}

! Iš skaičiaus 3, pakelto laipsniu $3^3 = 27$, traukiame kubinę šaknį: $\sqrt[3]{3^{3^3}} = (3^{3^3})^{\frac{1}{3}} = 3^{(3^3 \cdot \frac{1}{3})} = 3^{3^2} = 3^9$. Tinka atsakymas D. Kituose atsakymuose skaičius 3 keliamas laipsniu $3, 3^3 - 1 = 26, 2^3 = 8, \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

5. (C) 581

! Šiame uždavinyje atsakymą galima gauti tiesiog iš eilės (nuo mažiausio) tikrinant atsakymus, kol gausime tinkamą metų užrašą. Bet iš karto spręskime šį uždavinį griežtai.

Jei ieškomas metų užrašas prasidėtų skaitmeniu 2, tai tas užrašas prasidėtų 200... arba 201... Dviejų nulių užraše būti negali; netinka nei vienas iš skaičių 2010, 2011, 2012. Ieškokime metų, prasidedančių vienetu. Jei vienetas yra vienas iš keturių iš eilės einančių skaitmenų, tai tie skaitmenys yra 0, 1, 2, 3 arba 1, 2, 3, 4. Vadinasi, didžiausias skaitmuo, einantis po vieneto, gali būti 4. Po jo didžiausias skaitmuo yra 3, o tada lieka skaitmuo 2. Taip gauname didžiausią tinkamą skaičių 1432. Nuo šių metų praėjo $2013 - 1432 = 581$ metai.

6. (D) 150

! Tiesinė funkcija turi pavidalą $f(x) = kx + b$. Tad

$$100 = f(2013) - f(2001) = 2013k + b - 2001k - b = (2013 - 2001)k = 12k$$

ir

$$f(2031) - f(2013) = (2031 - 2013)k = 18k = 18 \cdot \frac{100}{12} = 150.$$

7. (E) 4

! Nelygybes $2 < x < 3$ pakelkime kvadratu (tai turime teisę daryti su nelygybe, kai abi jos pusės teigiamos; ne tik skaičiai 2 ir 3, bet ir skaičius $x > 2$ yra teigiamas). Gauname išvadą: $4 < x^2 < 9$.

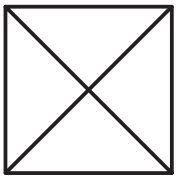
Nelygybes visada galima padauginti iš teigiamo skaičiaus. Padauginkime duotąsias nelygybes iš 2 ir iš 3: $4 < 2x < 6$ ir tuo labiau $4 < 2x < 9$; taip pat $6 < 3x < 9$.

Pagaliau nagrinėkime parabolę, kurią aprašo funkcija $y = x^2 - 2x$. Jos viršūnė yra $(1; -1)$ ir jos šakos nukreiptos į viršų. Todėl funkcija mažėja, kol $x < 1$, ir didėja, kai $x > 1$. Vadinasi, ji didėja, kai x kinta nuo 2 iki 3. T. y. y didėja nuo $2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ iki $3^2 - 2 \cdot 3 = 3$. Todėl galioja nelygybės $0 < x^2 - 2x < 3$. (Šias nelygybes pastabesnis žmogus gali įrodyti ir greičiau: tereikia iš nelygybių $2 < x < 3$ atimti 1, pakelti jas kvadratu ir vėl atimti 1.)

Įrodėme visas ketverias dvigubas nelygybes.

8. (B) 6

! Iš karto aišku, kad ketvirtasis bildukas pagavo bent keturis apuokus. Bet jei būtų pagavęs tik penkis ar (tuo labiau) tik keturis, tai 5-asis ir 6-asis bildukai pagautų po mažiau nei penkis apuokus, t. y. daugiausiai po keturis, ir bendra apuokų suma neviršytų $1+2+3+5+4+4 < 20$. Šešis apuokus 4-asis bildukas pagauti galėjo. Pvz., šešių bildukų grobis galėtų būti paskirstytas taip: $20 = 1 + 2 + 3 + 6 + 4 + 4$.

9. (E) 

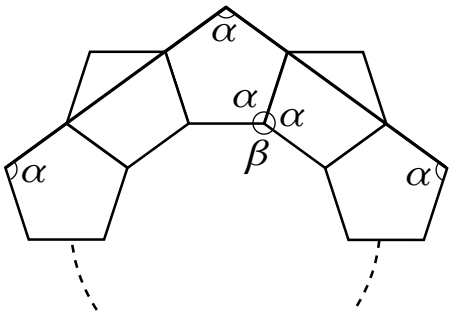
! Paveikslėlis A sutampa su nuotraukomis iš priekio ir užpakalio, B – su nuotrauka iš dešinės ir su pasukta nuotrauka iš kairės, C – su nuotrauka iš apačios (nepamirškime, kad piramidė neperregima), D – su nuotrauka iš viršaus (matome ir sieną CDS, ir jos neužstojamą pagrindą $ABCD$). Visos galimybės paminėtos, tad paveikslėlis E neatitinka jokios nuotraukos.

10. (D) $\frac{1}{13}$

! Jei aukso luito tūris lygus V, tai auksui suskystėjus jo tūris bus $W = V + \frac{1}{12}V = \frac{13}{12}V$. Taigi $V = \frac{12}{13}W = W - \frac{1}{13}W$. Matome, kad auksui sukietėjus, jo tūris sumažės $\frac{1}{13}$.

11. (C) 10

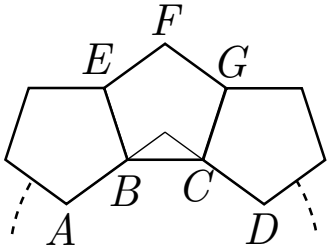
? Iš brėžinio nesunku atspėti, kad pratęsus kas antros plytelės „išorines” kraštines iki jų tarpusavio susikirtimo, gaunamas taisyklingasis daugiakampis, kurio kampas lygus taisyklingojo penkiakampio kampui α (žr. pav.). Vadinasi, tas daugiakampis ir bus penkiakampis. Plytelių, kurių kraštines pratęsėme, yra penkios, o tarp jų yra dar penkios plytelės, iš viso – 10 plytelių.



! „Vidinės”, į figūros centrą nukreiptos plytelių kraštinės sudaro taisyklingąjį daugiakampį: jos lygios ir kampai tarp jų lygūs vis tam pačiam dydžiui $\beta = 360° - 2\alpha$ (žr. pav.). Raskime α. Daugiakampio kampų suma lygi $180°(n-2)$ ($n-$ viršūnių skaičius). Todėl taisyklingojo daugiakampio kampas lygus $\frac{180°(n-2)}{n}$. Taigi $\alpha = \frac{180°(5-2)}{5} = 108°$. Jei Arnas panaudojo m plytelių, tai turi galioti lygybės $\frac{180°(m-2)}{m} = \beta = 360° - 2\alpha = 144°$. Iš tiesinės lygties randame m: $180°(m-2) = 144°m$ arba $36°m = 360°$. Gavome $m = 10$.

Nors uždavinys to nereikauja, galime paklausti, kodėl būtinai tos plytelės sudarys pilną ratą nepersidengdamos. Iš tiesų, kai jau žinome atsakymą, ir tai pagrįsti nesunku. Iš karto imkime dešimtkampį ir prie jo kraštinių iš išorės glauskime plyteles. Kad tokiu būdu plytelės priglus ne vien prie dešimtkampio, bet ir viena prie kitos, akivaizdu iš lygybės $\beta = 360° - 2\alpha$, garantuojančios, kad dviejų plytelių ir dešimtkampio kampai sudaro pilnąjį kampą.

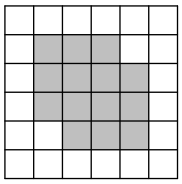
!! Atsakymą galima pagrįsti ir neskaičiuojant kampų. Pratęskime atkarpas AB ir CD iki jų susikirtimo taško (žr. pav.). Tiesės AB ir EF lygiagrečios pagal priešinius kampus ABE ir BEF. Taip pat lygiagrečios tiesės CD ir FG. Vadinasi, AB ir CD kertasi tuo pačiu kampu, kaip ir EF su FG, t. y. taisyklingojo penkiakampio kampu α. Taip pratęsę kas antros plytelės „vidines” kraštines iki jų susikirtimų gausime taisyklingąjį daugiakampį su kampu α. Kadangi kuo daugiau taisyklingasis daugiakampis turi viršūnių, tuo jo kampas didesnis, tai kampą α gali turėti tik taisyklingasis penkiakampis. Ėmėme kas antrą plytelę, todėl jų iš viso yra $5 \cdot 2 = 10$.



12. (A) 12

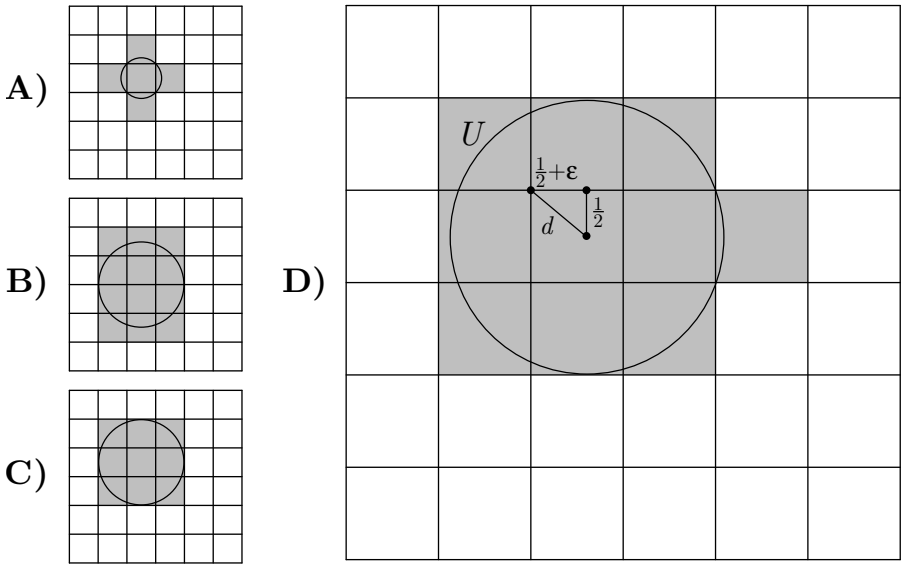
! Skaičius $\frac{n}{3}$ yra sveikasis, tad skaičius n dalijasi iš 3. O kad skaičiai $\frac{n}{3}$ ir $3n$ būtų triženkliai, turi galioti nelygybės $100 \leq \frac{n}{3} < 3n \leq 999$. Išspręskime nelygybes n atžvilgiu: $300 \leq n \leq 333$. Matome, kad n gali būti lygus 300, 303, ..., 333. Tą patį pasakykime kitaip: $\frac{n}{3}$ gali būti lygus 100, 101, ..., 111. Gavome $111 - 99 = 12$ galimybių.

13. (E)

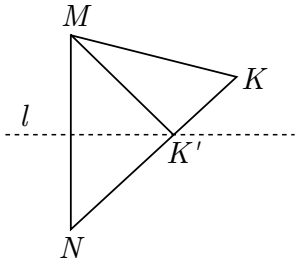


? Paprasčiausia pastebėti, kad nudažymai A – D yra galimi (žr. pav.; plytelės kraštinės ilgį laikykime lygiu 1):

A) skritulio centras sutampa su plytelės centru, o spindulys lygus $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
B) centras sutampa su plytelės kraštinės viduriu ir $r = \frac{3}{2}$;
C) skritulio centras sutampa su plytelės centru, o spindulys lygus $r = \frac{3}{2}$;
D) panašu į atvejį C, tik skritulys yra lygiagrečiai pastumtas į dešinę nedideliu atstumu ϵ, kad apskritimas eitų per nenuspalvintų plytelių viršūnes.

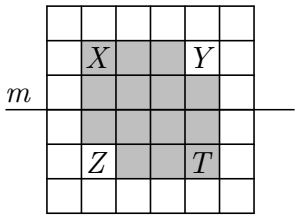


Abejojant tuo, ar skritulys dengs, ar nedengs tam tikras plyteles, visada galima rasti jų atstumą iki skritulio centro. Pvz., atveju B kampinės nudažyto stačiakampio plytelės dengiamos skritulio, nes jų atstumas (imamas kaip trumpiausias galimas atstumas) iki jo centro lygus $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} < \frac{3}{2} = r$. Atveju D panašiai galime rasti dydį ϵ. Lygties $\sqrt{(\frac{3}{2} - \epsilon)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2} (= r)$ abi puses pakeliame kvadratu ir išsprendžiame kvadratinę lygtį: $\epsilon = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$. Turime imti mažesnę reikšmę $\epsilon = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, nes didesnioji atitinka atvejį, kai patį skritulį pastumiame dar toliau ir jo centras atsiduria kitoje pusėje nuo nagrinėjamų plytelių viršūnių. Vėlgi, nepasitikint nuojauta, būtų galima patikrinti, ar skritulys vis dar kerta plytelę U: skritulio centro atstumas iki jos $d = \sqrt{(\frac{1}{2} + \epsilon)^2 + (\frac{1}{2})^2} < r = \frac{3}{2}$, tad plytelė nudažyta pagrįstai.
Renkamės atsakymą E.



! Prieštaros būdu įrodykime, kad nudažymo E niekada negausime. Tarkime, kad toks nudažymas galimas.

Pastebėkime, kad jei du taškai M ir N yra simetriški tiesės l atžvilgiu, o taškas K yra toje pačioje tiesės pusėje kaip ir M (žr. pav.), tai $KM < KN$. Iš tiesų, tiesė l kerta atkarpą KN. Sankirtos taškui K' gauname lygiašonį trikampį $K'MN$, kurio kampai $K'MN$ ir $K'NM$ lygūs. Bet tada kampas KMN didesnis už kampą KNM, todėl $KM < KN$. (Jei taškas K priklauso tiesei l, tai $KM = KN$.)



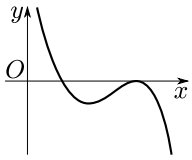
Remiantis įrodyta savybe (kurios teisingumas ir be įrodymo turėtų būti gana suprantamas), jei skritulio centras būtų žemiau tiesės m arba joje (žr. pav.), tai plytelė Z būtų nutolusi nuo to centro ne daugiau nei plytelė X. Plytelė X nudažyta, ji dengiama skritulio, todėl ir plytelė Z tada būtų nudažyta (juk centras yra jos pusėje ir jos taškai turi būti arčiau skritulio centro nei atitinkami simetriški plytelės X taškai). Ji nėra – vadinasi, skritulio centras turi būti virš tiesės m. Bet analogiškai nagrinėdami plyteles Y ir T gauname, kad centras turi būti žemiau tiesės m. Gavome prieštarą, todėl nudažymas nėra įmanomas.

14. (D) Yra toks lyginis skaičius x, kad skaičius $f(x)$ yra nelyginis

! Prašoma nurodyti teiginį, priešingą Ramunės teiginiui. Aišku, jis turi būti nesuderinamas su pradiniu teiginiu, neigti jį. Pvz., teiginys B su pradiniu teiginiu yra suderinamas: funkcija gali įgyti lygines reikšmes tiek lyginėms, tiek nelyginėms argumento reikšmėms. Pvz., čia tiktų funkcija $f(x) = 2x$. O teiginys A nėra suderinamas su pradiniu teiginiu, nes lyginiam skaičiui x skaičius $f(x)$ negali būti ir lyginis, ir nelyginis vienu metu. Tačiau teiginys A taip pat nėra priešingas, nesuderinamumo nepakanka. Priešingas teiginys turi tik paneigti pradinį – ir daugiau nieko. Teiginys A yra „stipresnis": jis ne tik paneigia pradinį teiginį, bet ir eliminuoja dalį kitų galimybių (funkcijas, kurios lyginiams skaičiams x įgyja tiek lyginių, tiek nelyginių reiškmių; pvz., funkcija, lygi skaičiaus skaitmenų sumai).

Teiginiai C ir E suderinami su pradiniu teiginiu kaip ir B (pvz., tinka funkcija $f(x) = x$). Mums lieka teiginys D, kuris ir yra priešingas. Iš tikrųjų, kad Ramunės teiginys būtų neteisingas, būtina ir pakanka, kad atsirastų toks lyginis skaičius x, kuriam skaičius $f(x)$ nebūtų lyginis. Būtent tai ir teigia teiginys D.

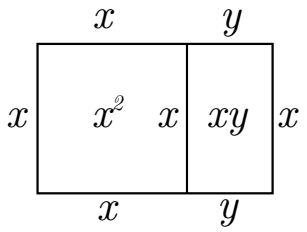
15. (A)



! Prilyginkime funkciją nuliui ir tokiu būdu raskime jos sankirtas su Ox ašimi: $x = a$ ir $x = b$. Tad tų sankirtų tebus dvi (jau galime atmesti atsakymą E). Kairiąją iš jų atitinka maženioji reikšmė $x = a$. Kadangi $(b - x)^2 \geq 0$, tai funkcijos W reikšmių ženklas priklausys tik nuo funkcijos $a - x$ ženklo. Kai $x < a$, tai $a - x > 0$. Todėl funkcijos grafiko kairioji dalis bus virš Ox ašies, ir mums lieka atsakymai A bei C. Kai $x > a$, tai $a - x < 0$. Todėl likusioji funkcijos grafiko dalis bus žemiau Ox ašies, tik pakils prie ašies ties $x = b$. Toks yra atsakymas A.

16. (D) 4

! Suglaudę gautuosius stačiakampį ir kvadratą turime gauti pradinį stačiakampį. Tai galima padaryti, tik suglaudus juos kraštinėmis, kurios turi būti lygios (žr. pav.). Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x, o antrosios stačiakampio kraštinės ilgį – y. Pradinio stačiakampio krašinių ilgiai yra $x + y$ ir x, dviejų figūrų plotai lygūs x^2 ir xy. Duoti vienos iš dviejų pradinio stačiakampio kraštinių ilgis ir vienos iš dviejų figūrų plotas. Turime keturias galimybes:



1) $x + y = 5$ ir $x^2 = 4$. Gauname $x = 2$ ir $y = 5 - 2 = 3$. Stačiakampis 5×2 padalytas į kvadratą 2×2 ir stačiakampį 3×2.
2) $x+y = 5$ ir $xy = 4$. Gauname $y = 5-x$ ir $x(5-x) = 4$. Kvadratinė lygtis $x^2-5x+4 = 0$ turi šaknis 1 ir 4. Kai $x = 1$, tai $y = 4$. Kai $x = 4$, tai $y = 1$. Vienu atveju stačiakampis 5×1 padalytas į kvadratą 1×1 ir stačiakampį 4×1. Kitu atveju stačiakampis 5×4 padalytas į kvadratą 4×4 ir stačiakampį 1×4.
3) $x = 5$ ir $x^2 = 4$. Gauname $5 = x = 2$. Taip būti negali.
4) $x = 5$ ir $xy = 4$. Gauname $y = \frac{4}{x} = \frac{4}{5}$ ir $x + y = 5\frac{4}{5}$. Stačiakampis $5\frac{4}{5} \times 5$ padalytas į kvadratą 5×5 ir stačiakampį $\frac{4}{5} \times 5$.

Matome, kad pradinio stačiakampio antrosios kraštinės ilgis gali būti lygus vienai iš keturių reikšmių 2, 1, 4 arba $5\frac{4}{5}$.

17. (A) 4

! Spindulys, einantis per taškus $(-4; 0)$ ir $(-2; 2)$, priklauso tiesei $y = x + 4$ (tiesės, einančios per du duotus taškus, lygtį galima rasti užsirašant tiesės lygtį $y = kx + b$, įsistatant į ją taškų koordinates ir išsprendžiant dviejų lygčių sistemą). Spindulys, einantis per taškus $(0; 0)$ ir $(4; 4)$, priklauso tiesei $y = x$, o atkarpa – tiesei $y = -x$.

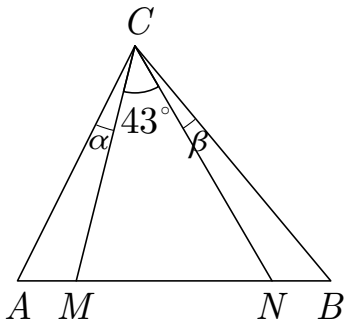
Funkcijos grafikas kerta Ox ašį, kai $x = -4$ ir kai $x = 0$. Todėl $f(t) = f(f(f(x))) = 0$, kai $t = f(f(x)) = 0$ arba $t = f(f(x)) = -4$. Uždavinį apie $f(f(f(x)))$ suvedėme į du analogiškus uždavinius apie $f(f(x))$. Toliau lygiai taip pat pereisime nuo $f(f(x))$ prie $f(x)$ ir pagaliau prie x.

Jei $f(s) = f(f(x)) = 0$, tai $s = f(x) = 0$ arba $f(x) = -4$. Atveju $f(s) = f(f(x)) = -4$ turime klausti, kada funkcija įgyja reikšmę -4. Iš funkcijos grafiko matome, kad ji neigiamas reikšmes įgyja, tik kai $x < -4$, o tada $f(x) = x + 4$ (kairysis spindulys). Išsprendę lygtį $f(s) = s + 4 = -4$, randame $s = f(x) = -8$. Taigi $f(x) = 0, -4$ arba -8.

Jei $f(x) = 0$, tai $x = 0$ arba $x = -4$. Jei $f(x) = -4$, tai (ir vėl) $x < -4, f(x) = x + 4$ ir $x = -8$. Jei $f(x) = -8$, tai $x < -4, f(x) = x + 4$ ir $x + 4 = -8$ duoda mums sprendinį $x = -12$.

Taigi turime keturis sprendinius $x = 0, -4, -8$ ir -12.

18. (E) $94°$



! Pažymėkime $\alpha = \angle ACM$ ir $\beta = \angle BCN$ (žr. pav.). Mums reikia rasti $\angle ACB = \alpha + \beta + 43°$. Pasinaudokime tuo, kad trikampiai CAN ir CBM lygiašoniai: $AN = AC$ ir $BM = BC$, todėl $\angle CNA = \angle ACN = \alpha + 43°$ ir $\angle CMB = \angle BCM = \beta + 43°$.

Užrašykime trikampio CMN kampų sumą $180° = \angle CNM + \angle CMN + \angle MCN = \angle CNA + \angle CMB + 43° = \alpha + 43° + \beta + 43° + 43° = (\alpha + \beta + 43°) + 86°$. Randame $\angle ACB = \alpha + \beta + 43° = 180° - 86° = 94°$.

19. (E) Kitas skaičius

? Dešinioji lygybės pusė yra tikslusis kvadratas: $6^{12} = (6^6)^2$. Kairėje pusėje taip pat turime kvadratą x^2. Nuojauta turėtų patarti, kad tada natūraliojo skaičiaus kvadratas turėtų būti ir y^3. Dar daugiau, jei pats skaičius y nebūtų kvadratas, tai nebūtų ir y^3. Todėl pažymėkime $y = b^2$. Lygiai taip pat spėkime, kad skaičius x turėtų būti natūraliojo skaičiaus kubas: $x = a^3$. Tokiu būdu suprastiname lygtį: $a^6b^6 = 6^{12} = (6^2)^6 = 36^6$ ir $ab = 36$. Šios lygties sprendinius rasti nesunku: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$. Turime penkis sprendinius, kur $a \leq b$. Keturis sprendinius, kur $a > b$, gauname sukeitę vietomis skaičius jau rastose porose. Iš viso gauname 9 sprendinius.

! Įsitikinkime, kad ? dalies samprotavimai teisingi. Perrašykime lygtį kitaip: $y = \frac{6^{12}}{x^2y^2} = \left(\frac{6^6}{xy}\right)^2$. Tarkime, suprastinus trupmeną $\frac{6^6}{xy}$ gaunama nesuprastinama trupmena $\frac{m}{n}$. Tada trupmena $y = \frac{m^2}{n^2}$ taip pat nesuprastinama. Jei $n \neq 1$, tai skaičius y nėra sveikasis. Taigi $n = 1$ ir $y = m^2$ yra tikslusis kvadratas. Kad x yra kubas, lygiai taip pat įrodoma pasinaudojus lygybe $x = \frac{x^3y^3}{6^{12}} = \left(\frac{xy}{6^4}\right)^3$.

!! Išskaidykime dešiniąją pusę pirminiais daugikliais: $6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12}$. Kairioji pusė taip pat negali dalytis iš kitų pirminių skaičių nei 2 ir 3. Todėl skaičius x ir y galime užrašyti kaip dvejeto ir trejeto laipsnių sandaugas: $x = 2^u3^v$, $y = 2^w3^t$ (čia u, v, w, t yra neneigiami sveikieji skaičiai). Gauname lygybę $(2^u3^v)^2(2^w3^t)^3 = 6^{12}$ arba $2^{2u+3w}3^{2v+3t} = 2^{12} \cdot 3^{12}$.
Turime išspręsti dviejų lygčių $2u + 3w = 12$ ir $2v + 3t = 12$ sistemą. Atskirai išspręskime pirmąją lygtį: u turi dalytis iš 3. Imdami iš eilės galimas u reikšmes (0, 3,...) gauname tris sveikuosius sprendinius $(u, w) = (0, 4), (3, 2), (6, 0)$ (kai $u > 6$, tai $w < 0$). Tokia pati antroji lygtis taip pat turi tris sprendinius. Abi kartu viena nuo kitos nepriklausomos lygtys turi $3 \cdot 3 = 9$ sprendinius. Vadinasi, tiek jų turi ir pradinė lygtis.

20. (C) 53

! Yra tik viena kortelė (pažymėta skačiumi 100) su mažiausia skaitmenų suma $1 = 1 + 0 + 0$ ir tik viena kortelė (pažymėta skačiumi 999) su didžiausia skaitmenų suma $27 = 9 + 9 + 9$. Skaitmenų sumas nuo 2 iki 26 atitinka bent po dvi korteles. Kad tuo įsitikintume, imkime sumas $2 = 1 + 0 + 1, 3 = 1 + 0 + 2, 4 = 1 + 0 + 3, ..., 10 = 1 + 0 + 9, 11 = 1 + 1 + 9, 12 = 1 + 2 + 9, ..., 19 = 1 + 9 + 9, 20 = 2 + 9 + 9, 21 = 3 + 9 + 9, ..., 26 = 8 + 9 + 9$. Kiekvienu atveju iš sudėtų skaitmenų galima sudaryti bent du triženklius skaičius (tai nepavyktų tik su trimis vienodais skaitmenimis arba su trimis skaitmenimis, iš kurių du yra nuliai). Taigi Goda gali ištraukti korteles su skaičiais 100 ir 999 bei po dvi korteles su kiekviena iš 25 sumų 2, 3, ..., 26. Matome, kad tarp $2 + 2 \cdot 25 = 52$ kortelių dar gali nebūti trijų norimų.

O 53 kortelių visada pakaks. Juk jei tarp ištrauktų kortelių nėra trijų su ta pačia skaitmenų suma, tai su kiekviena iš 25 sumų 2, 3, ..., 26 ištraukta daugiausiai po dvi korteles, o su likusiomis galimomis sumomis 1 ir 27 – daugiausiai po vieną kortelę. Tada galime turėti daugiausiai $\underbrace{2+2+...+2}_{\text{25 kartus}}+1+1=2\cdot 25+2=52$ korteles.

21. (A) 4

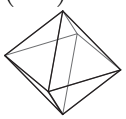
! Pertvarkykime lygtį:

$$xy-5x-5y=0;$$
$$x(y-5)-5y=0;$$
$$x(y-5)-5(y-5+5)=0;$$
$$x(y-5)-5(y-5)-25=0;$$
$$(x-5)(y-5)=25.$$

Kadangi $x-5$ dalija $25=5^2$, tai $x-5=-25,-5,-1,1,5$ arba 25. Tada atitinkamai $y-5=-1,-5,-25,25,5$ arba 1. Gauname lygties sprendinius $(-20,4),(0,0),(4,-20),(6,30),(10,10),(30,6)$. Atsižvelgus į sąlygą $x\le y$, lieka 4 sprendiniai.

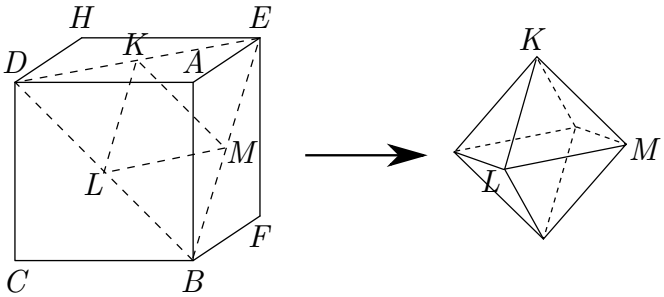
22. (D) 4

! Dėl funkcijos periodiškumo $f(2013)=f(2013-5)=f(2008)=f(2008-5)=f(2003)=...$, ir vis atimdami po 5 pagaliau gausime, kad $f(2013)=f(2013-403\cdot 5)=f(-2)$. O -2 priklauso intervalui $[-2;3)$ (kitaip nei skaičius 3, kuriam taip pat galioja lygybė $f(2013)=f(3)$), todėl $f(-2)=(-2)^2=4$.



23. (B)

! Atkarpų ED, DB, BE vidurio taškus atitinkamai pažymėkime K, L, M (žr. pav.). Šie taškai yra ir kubo sienų centrai. Per trikampį KLM eina pjovimo plokštuma DEB.



Nagrinėti atkarpomis sujungtus kubo sienų centrus turėtų paskatinti tai, kad per kiekvieną iš jų eina po keturias pjovimo plokštumas. Tarkime, per tašką L eina plokštumos DEB, AHC, DGB, ACF. Be to, DEB ir AHC eina ir per tašką K. Eidamos per K ir L, plokštumos eina ir per šiuos taškus jungiančią trikampio KLM kraštinę, jos susikerta tiesėje KL.

Taigi jei sujungsime visų kubo sienų centrus, gausime oktaedrą, briaunainį, sudarytą iš tokių trikampių kaip KLM, kurių kraštinės jungia bendrą viršūnę turinčių kubo sienų centrus. Per šio oktaedro sienas eina aštuonios pjovimo plokštumos, tad jis ir yra visų tų plokštumų apribota kubo dalis.

24. (E) Be galo daug

? Nesunku rasti 9 sprendinius $(0,0), (\pm1,0), (0,\pm1), (\pm1,\pm1), (\pm1,\mp1)$. Ieškokime dar bent vieno lygties sprendinio. Įsistatę bet kokią konkrečią x reikšmę iš intervalo $(0;1)$ ir laikydami, kad $y>0$, gausime kvadratinę lygtį y atžvilgiu $y^2-y-(x-x^2)=0$, kuri turės teigiamą šaknį. Pvz., kai $x=\frac{1}{2}$, gauname $y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Radome 10 reikšmių, tad pirmieji keturi atsakymai jau netinka.

! Apsiribokime vien teigiamomis x ir y reikšmėmis ir pertvarkykime lygtį: $x^2+y^2=x+y$ arba $x^2-x=-(y^2-y)$. Nagrinėkime kvadratinę funkciją $f(x)=x^2-x$ teigiamoms x reikšmėms. Jos grafikas bus parabolė, kurios viršūnė yra $(\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$, o šakos nukreiptos aukštyn. Tad funkcija f didėja, kai $x>\frac{1}{2}$, nuo $-\frac{1}{4}$ iki begalybės, įgydama visas tarpines reikšmes. Savo ruožtu, kai $y>\frac{1}{2}$, kvadratinė funkcija $-f(y)=-(y^2-y)$ įgys visas reikšmes mažesnes už $\frac{1}{4}$. Jei paimsime bet kokią reikšmę t iš intervalo $[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}]$, tai abi lygtys $t=x^2-x$ ir $t=-(y^2-y)$ turės po teigiamą sprendinį, su kuriais galios lygybė $x^2-x=-(y^2-y)$. Skaičių t galima iš intervalo parinkti be galo daug būdų ir kiekvienam t mes gausime vis po kitą sprendinį (x,y) (jei $x_1=x_2$, tai $t_1=x_1^2-x_1=x_2^2-x_2=t_2$). Todėl pradinė lygtis turės be galo daug sprendinių.

!! Apsiribokime vien teigiamomis x ir y reikšmėmis: $x^2+y^2=x+y$. Pertvarkykime lygtį išskirdami pilnuosius kvadratus:

$$4x^2-4x+4y^2-4y=0,$$

$$4x^2-4x+1+4y^2-4y+1=2,$$

$$(2x-1)^2+(2y-1)^2=2.$$

Pasižymėję $X=2x-1$ ir $Y=2y-1$, gauname apskritimo lygtį $X^2+Y^2=2$. Apskritimą sudaro be galo daug taškų, tarp jų – be galo daug taškų, esančių pirmajame koordinačių sistemos ketvirtyje (ketvirtis apskritimo). Todėl paskutinė lygtis turi be galo daug tokių sprendinių (X,Y), kad $X,Y>0$, o lygtis $x^2+y^2=x+y$ turi be galo daug tokių sprendinių, kad $2x-1, 2y-1>0$, t. y. be galo daug tokių sprendinių, kad $x,y>\frac{1}{2}$. Tuo labiau $x,y>0$, tad visi šie be galo daug sprendinių bus ir pradinės lygties sprendiniai.

25. (D) 2^{2013}

! Pažiūrėkime, kaip kinta funkcija f: $f(1)=0, f(2)=1, f(3)=1, f(4)=2, f(5)=2, f(6)=3, f(7)=3, f(8)=4, ...$ Kai m yra lyginis skaičius, tai $f(m)=\frac{m}{2}$ ir gretima reikšmė $f(m+1)=f(2\cdot\frac{m}{2}+1)=\frac{m}{2}$. Matome, kad funkcija nemažėjanti. Bet tada ir funkcija $f^2(m)=f(f(m))$ nemažėjanti: jei $a>b$, tai $f(a)\geq f(b)$ ir $f(f(a))\geq f(f(b))$. Lygiai taip pat nemažėjančios yra funkcijos $f^3, f^4, ..., f^{2013}$.

Pastebėkime, kad $f(2^k)=f(2^{k-1}\cdot 2)=2^{k-1}$ ir $f(2^k-1)=f(2(2^{k-1}-1)+1)=2^{k-1}-1$, kai k yra natūralusis skaičius. Todėl $f^{2013}(2^{2013}-1)=f^{2012}(f(2^{2013}-1))=f^{2012}(2^{2012}-1)$. Tuo pačiu būdu toliau gauname, kad $f^{2013}(2^{2013}-1)=f^{2012}(2^{2012}-1)=f^{2011}(2^{2011}-1)=...=f^2(2^2-1)=f(2-1)=f(1)=0$. Padidinę argumentą vienetu, gausime kitokį rezultatą $f^{2013}(2^{2013})=f^{2012}(2^{2012})=f^{2011}(2^{2011})=...=f^2(2^2)=f(2)=1$. Panašiai $f^{2013}(2^{2014}-1)=f^{2012}(2^{2013}-1)=f^{2011}(2^{2012}-1)=...=f^2(2^3-1)=f(2^2-1)=f(3)=1$ bei $f^{2013}(2^{2014})=f^{2012}(2^{2013})=f^{2011}(2^{2012})=...=f^2(2^3)=f(2^2)=f(4)=2$.

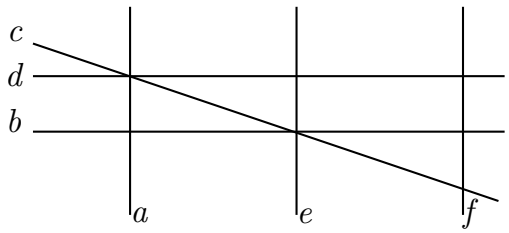
Kadangi funkcija f^{2013} nemažėjanti, tai nustatėme, kad $f^{2013}(n) = 0$, kai $n \leq 2^{2013} - 1$, $f^{2013}(n) = 1$, kai $2^{2013} \leq n \leq 2^{2014} - 1$, ir $f^{2013}(n) \geq 2$, kai $n \geq 2^{2014}$. Tarp 2^{2013} ir $2^{2014} - 1$ yra $2^{2014} - 1 - (2^{2013} - 1) = 2^{2014} - 2^{2013} = 2^{2013}$ skaičių.

!! Jei skaičių n užrašysime dvetainėje skaičiavimo sistemoje, vien per skaitmenis 0 ir 1, tai iš skaičiaus $n > 1$ skaičių $f(n)$ visada gausime nubraukdami paskutinįjį skaičiaus n skaitmenį: lyginį skačių, kuris baigiaisi 0, padalijame iš 2, nubraukdami tą skaitmenį 0; o iš nelyginio, besibaigiančio 1, atimame 1, paskutinįjį skaitmenį paversdami 0, ir gautąjį lyginį skaičių, besibaigiantį 0, vėlgi padalijame iš 2.

Skaičių $f^{2013}(n)$ gausime, iš eilės nubraukdami paskutiniuosius 2013 skaičiaus n dvejetainės išraiškos skaitmenų. Tad $f^{2013}(n) = 1$ skaičiams, kurių dvejetainėje išraiškoje po pirmojo skaitmens 1 eina dar 2013 bet kokių skaitmenų. Kiekvieną iš tų skaitmenų galime laisvai parinkti dviem būdais (0 arba 1), todėl iš viso turime $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{2013}$ galimybių.

26. (C) 6

? Jei tiesės kerta ne po lygų skaičių kitų tiesių, tai kai kurios iš jų turi būti lygiagrečios. Pabandžius įvairius variantus, galima rasti pavyzdį su 6 tiesėmis (žr. pav.).



! Įrodykime, kad kito tiesių skaičiaus gauti neįmanoma. Tiesių skaičių pažymėkime n. Kadangi tiesė b kertasi su keturiomis tiesėmis, tai $n \geq 5$. Jei dvi tiesės yra lygiagečios, tai tiesės, kertančios vieną iš jų, kerta ir kitą. Todėl dvi lygiagrečios tiesės kertasi su vienodu kitų tiesių skaičiumi. Todėl pagal uždavinio sąlygą jokios dvi iš tiesių a, b ir c nėra lygiagrečios. Tiesė a kertasi su tiesėmis b, c ir dar su lygiai viena tiese, kurią pažymėkime d. Visos kitos tiesės, kurių yra $n - 4$, turi būti lygiagrečios su tiese a. Kadangi jos lygiagrečios su a, tai turi kirsti tiek b, tiek c, kaip tai daro a.

Jei $n = 5$, tai tiesė c kertasi su daugiausiai keturiomis tiesėmis, bet nei su keturiomis, nei su trimis, todėl tik su dviem – a ir b. Tai reiškia, kad kitos tiesės, tarp jų ir tiesė, lygiagreti su tiese a, yra lygiagrečios su c, o taip būti negali, nes a ir c nelygiagrečios.

Jei $n \geq 7$, tai tiesei a lygiagrečios bent $7 - 4 = 3$ tiesės. Jos visos drauge su a ir c kerta tiesę b, o tai prieštarauja tam, kad b kertasi tik su keturiomis tiesėmis.

Vadinasi, $n = 6$.

27. (B) 9

? Turime lygybę $1+2+3+...+n = \overline{aaa} = a \cdot 111$, čia a yra nenulinis skaitmuo. Pagal aritmentinės progresiijos formulę $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Be to, $111 = 37 \cdot 3$, todėl 37 dalija $\frac{n(n+1)}{2}$ ir (tuo labiau) $n(n + 1)$. Kadangi 37 yra pirminis skaičius, tai jis dalija vieną iš dauginamųjų n ir $n + 1$. Tad turime tikrinti galimybes $n = 37, 2 \cdot 37, 3 \cdot 37, ...$ bei $n + 1 = 37, 2 \cdot 37, 3 \cdot 37, ...$ Dabar jau nesunku pastebėti, kad kai $n + 1 = 37$, tai $1 + 2 + 3 + ... + 36 = \frac{36 \cdot 37}{2} = 18 \cdot 37 = 6 \cdot 3 \cdot 37 = 6 \cdot 111 = 666$. Šiuo atveju skaičiaus $n = 36$ skaitmenų suma lygi $3 + 6 = 9$.

! Įrodykime, kad kitos n ir $n+1$ reikšmės, gautos ? dalyje, netinka. Reikšmė $n = 37$ netinka, nes $\frac{n(n+1)}{2} = 37 \cdot 19$ nesidalija iš 3 ir tuo labiau iš 111. Likusios reikšmės tiesiog per didelės: jau kai n ar $n+1 = 2 \cdot 37$, tai skaičius $\frac{n(n+1)}{2} \geq 37 \cdot (2 \cdot 37 - 1) > 37 \cdot 27 = 999$ nėra triženklis.

28. (D) Tiesuolis yra tik žemesnysis

! Nagrinėkime pirmąjį klausimą ir visas galimas situacijas.

1) Abu salos gyventojai tiesuoliai. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „taip". Gautasis atsakymas yra „taip".
2) Tik aukštesnysis gyventojas yra tiesuolis. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „ne".
3) Tik žemesnysis gyventojas yra tiesuolis. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „taip".
4) Abu salos gyventojai melagiai. Teisingas atsakymas į pirmąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „taip".

Keliauninkas po atsakymo „ne" galėtų nustatyti, kad tik aukštesnysis gyventojas yra tiesuolis. Kadangi to nenustatė, tai gavo atsakymą „taip" ir atmetė 2) atvejį. Nagrinėkime antrąjį klausimą ir visas galimas situacijas.

1) Abu salos gyventojai tiesuoliai. Teisingas atsakymas į antrąjį klausimą yra „taip". Gautasis atsakymas yra „taip".
2) Tik aukštesnysis gyventojas yra tiesuolis. Šis atvejis jau atmestas po pirmojo klausimo.
3) Tik žemesnysis gyventojas yra tiesuolis. Teisingas atsakymas į antrąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „ne".
4) Abu salos gyventojai melagiai. Teisingas atsakymas į antrąjį klausimą yra „ne". Gautasis atsakymas yra „taip".

Keliauninkas po atsakymo „taip" negalėtų pasirinkti tarp 1) ir 4) atvejų. Kadangi pašnekovų tapatybę jis nustatė, tai gavo atsakymą „ne", kuriuo remdamasis pasirinko likusį 3) atvejį, atitinkantį tikrovę.

29. (E) 5050

! Visos informacijos, kurią suteikia duotoji formulė, sprendime nereikia. Formulėje imkime $m = 1$:

$$a_{n+1} = a_1 + a_n + n = a_n + (n+1).$$

Vadinasi, $a_{100} = a_{99} + 100 = a_{98} + 99 + 100 = ... = a_2 + 3 + 4 + ... + 100 = a_1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050$ (pasinaudojome aritmentinės progresijos sumos formule).

(Kaip radome a_{100}, taip galime rasti bet kurį narį $a_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Pastebėkime, kad taip apibrėžta seka tenkina ir bendrąją Julijos formulę, kuria nesinaudojome. Bendroji formulė virsta lygybe $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + mn$, kuri iš tiesų yra teisinga bet kuriems natūraliesiems skaičiams m ir n: tuo galima įsitikinti ją suprastinus.)

30. (B) 44

! Nagrinėkime du atvejus, kaip mašinos galėjo palikti žiedą.

1) Tarkime, kad yra dvi mašinos nuvažiavusios viena kitos keliais, „apsikeitusios" jais. Tas mašinas pažymėkime A ir B, o likusias tris $-$ C, D, E. Jei dvi iš tų trijų taip pat nuvažiuotų viena kitos keliais, tai likusioji penktoji mašina turėtų važiuoti savo pačios keliu, kuriuo ji įvažiavo. Taip būti negali. Iš penkių mašinų išskirti dvi mašinas A ir B galime $C_5^2 = 10$ būdų (derinių skaičius).

Kaip gali važiuoti kitos trys mašinos? Yra du būdai. Jei mašina C važiuotų mašinos D keliu, tai mašinai D liktų kelias, kuriuo į žiedą įvažiavo mašina E, o pastarajai liktų mašinos C kelias. O jei mašina C važiuotų mašinos E keliu, tai mašina E važiuotų mašinos D keliu ir mašina D važiuotų mašinos C keliu.

Gauname $10 \cdot 2 = 20$ galimybių.

2) Tarkime, kad nėra dviejų mašinų, nuvažiavusių viena kitos keliais. Kaip dabar mašinos gali išvažiuoti iš žiedo? Pradėkime nuo bet kurios mašinos, kurią užfiksuokime ir pažymėkime A. Ji išvažiuoja kitos mašinos, kurią pažymėkime B, keliu. Mašiną B galime pasirinkti 4 būdais. Ji negali važiuoti mašinos A keliu, nes kitaip turėtume 1) atvejį. Tad ji išvažiuoja vienos iš trijų likusių mašinų keliu. Tą naują mašiną pažymėkime C; ją galime pasirinkti 3 būdais. Jei C išvažiuotų mašinos A keliu, tai likusios neįvardytos dvi mašinos turėtų išvažiuoti viena kitos keliais, o taip vėlgi negali būti. Mašinos B kelias jau užimtas mašinos A. Todėl C turi išvažiuoti vienos iš dviejų likusių mašinų keliu. Tą naują mašiną pažymėkime D; ją galime pasirinkti 2 būdais. Mašina D taip pat negali išvykti mašinos A keliu, nes tada likusi penktoji mašina (ją pažymėkime E) turėtų važiuoti savo pačios keliu. Tad mašinai D lieka mašinos E kelias, o mašinai E lieka paskutinis dar neužimtas kelias, kuriuo į žiedą įvažiavo mašina A. Mašinos apsikeičia keliais cikliškai: A išvažiuoja B keliu, $B - C$ keliu, $C - D$ keliu, $D - E$ keliu ir $E - A$ keliu.

Gauname $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ galimybes.

Iš viso mašinos gali palikti žiedą $20 + 24 = 44$ būdais.

Atsakymai

Uždavinio Nr.	Atsakymas
1	C
2	C
3	E
4	D
5	C
6	D
7	E
8	B
9	E
10	D
11	C
12	A
13	E
14	D
15	A
16	D
17	A
18	E
19	E
20	C
21	A
22	D
23	B
24	E
25	D
26	C
27	B
28	D
29	E
30	B